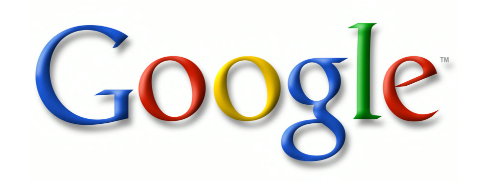
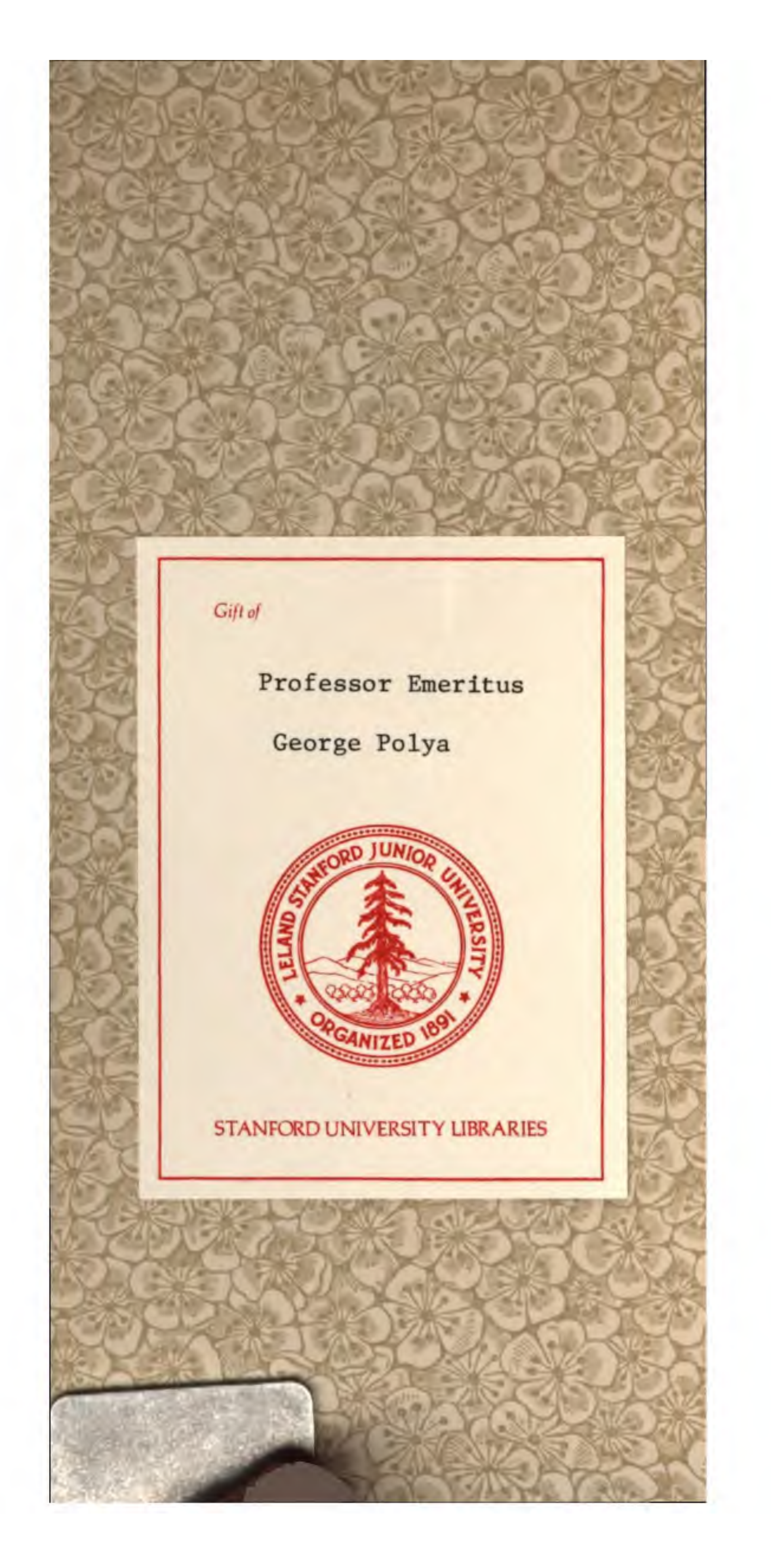
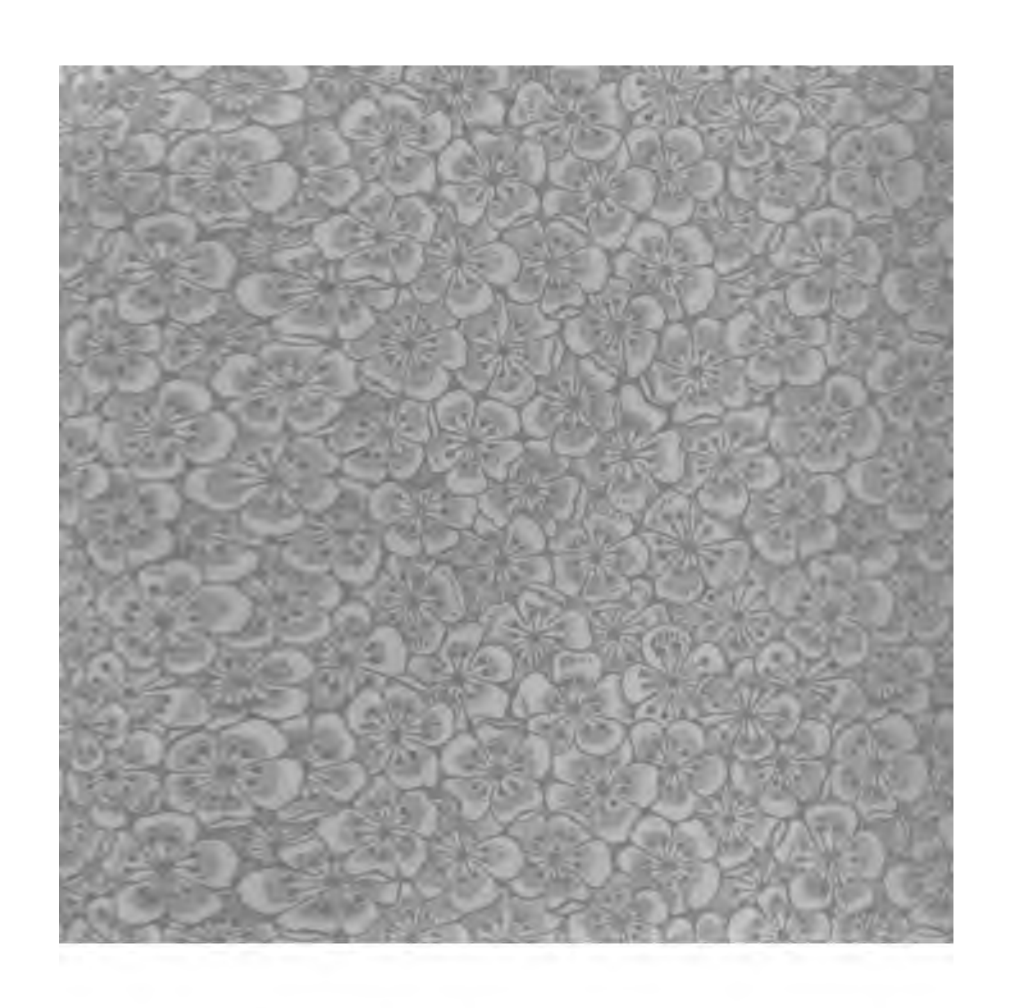





LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
ORGANIZED 1891



TRAITÉ

D'ALGÈBRE,

À L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

CINQUIÈME ÉDITION,

EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES,

REVUE

Par J.-H. MARCHAND,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE.

À l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1897



TRAITÉ

D'ALGÈBRE.


Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

TRAITÉ

D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

Par H. LAURENT,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

CINQUIÈME ÉDITION,

EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES,

revue

Par J.-H. MARCHAND,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE,

A l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1897.

AVERTISSEMENT

DE LA CINQUIÈME ÉDITION.

Cette cinquième édition diffère peu de la précédente.

La faveur méritée que le *Traité d'Algèbre* de M. Laurent a rencontrée auprès des étudiants nous faisait une loi de ne pas modifier l'ordre suivi dans l'exposition des matières et traçait notre rôle :

Revoir le texte avec soin, le rendre aussi correct que possible, et ne toucher qu'avec discrétion au fond même de l'Ouvrage.

Aussi, les modifications que nous avons introduites sont-elles essentiellement de détail et à peine pouvons-nous indiquer comme refonte plus complète la démonstration du théorème de Rolle et celle de la loi de l'inertie de Sylvester.

Il était difficile, d'ailleurs, de faire plus, alors que MM. Gauthier-Villars, propriétaires du Livre, et moi-même, nous étions convaincus que son ensemble laissait peu à désirer comme perfection didactique.

J.-H. Marchand.

PRÉFACE DE LA TROISIÈME ÉDITION.

.... Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très-évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées.

(PASCAL, *De l'esprit géométrique.*)

L'édition que je publie aujourd'hui de mon *Traité d'Algèbre* diffère pour la forme des précédentes ; mes idées sur l'enseignement de l'Algèbre n'ont pas varié beaucoup quant au fond, mais j'ai dû mettre à profit quelques observations de mes collègues, et surtout les perfectionnements récemment apportés dans les méthodes d'enseignement. C'est ainsi que j'ai pu donner tantôt un tour plus rapide à certaines démonstrations, tantôt plus de rigueur à d'autres qui laissaient un peu à désirer sous ce rapport. Enfin, j'ai cru devoir augmenter beaucoup le nombre des Exercices proposés, en donnant une solution très-sommaire de quelques-uns d'entre eux et en y joignant des Notes sur des questions étrangères aux programmes, mais qui m'ont paru instructives et intéressantes. On voudra bien remarquer, d'ailleurs, que les exercices que je propose sont le plus souvent tirés des œuvres des grands maîtres.

Je veux maintenant me justifier de quelques re-

proches qui m'ont été adressés et dont je n'ai pas cru devoir tenir compte.

On a critiqué la façon dont j'entrais en matière (mais je dois dire que beaucoup de professeurs m'ont approuvé); on prétend qu'il est difficile de donner dès le début des notions exactes sur les quantités *négatives* et qu'il faut rejeter leur théorie après les équations du premier degré.

Je réponds à cela que la quantité négative n'est pas plus difficile à saisir que la quantité positive, et que $+3$ est aussi absurde que -3 au point de vue concret. Tout élève comprendra parfaitement que l'on peut appeler *quantité algébrique* un nombre précédé d'un signe, pourvu que ce nombre et ce signe fassent partie d'une formule. Ainsi, dans $2+3-4$, je dis que -4 est un terme négatif du polynôme $2+3-4$. Il n'est pas difficile non plus de faire comprendre que $(+3)\times(-2)=-3\times 2$ est une définition. Je ne tarde pas à montrer que le but de pareilles définitions est de simplifier les énoncés de certains théorèmes. L'interprétation vient plus tard, mais jamais la quantité négative n'a apparu comme une chose absurde.

Au contraire, ceux qui ne veulent pas entendre parler de quantités négatives au commencement de l'Algèbre ne font que tromper les élèves et leur donner des idées fausses, en leur cachant l'absurde et en les faisant passer outre quand ils le rencontrent.

Par exemple, comment est-il permis de dire que l'on peut faire passer un terme d'une équation d'un membre dans un autre en changeant son signe avant

d'avoir parlé des quantités positives et négatives? Je suppose qu'il s'agisse de résoudre

$$1 - x = 5 - 2x$$

La solution est $x = 4$; mais, si l'élève ne sait pas ce que c'est qu'une quantité négative, cette équation, *a priori,* n'a pas de sens, car, quand $x = 4$, on a

$$1 - 4 = 5 - 8.$$

Mais encore, si vous écrivez, je suppose, cette autre équation

$$x - 1 = 2x - 5,$$

pouvez-vous faire passer x d'un membre dans un autre? Savez-vous d'avance si l'opération sera possible? Etc., etc. On croit avoir fait un chef-d'œuvre en passant du simple au composé; mais c'est aux dépens du bon sens, en trompant l'élève et en lui faussant le jugement.

J'ai souvent entendu dire dans le monde que l'étude des Mathématiques rendait l'esprit faux : c'est parfaitement exact si on les enseigne mal et si l'on exerce les élèves à ne pas apercevoir les fautes grossières de raisonnement que l'on fait devant eux.

Telle que je l'expose, la théorie des imaginaires ne laisse aucun nuage dans l'esprit; dans une Note placée à la suite du Chapitre IV de la IIe Partie, j'ai indiqué sommairement une manière différente de présenter cette théorie. Croit-on aussi rectifier le jugement des élèves quand on leur dit que l'on convient de considérer $\sqrt{-1}$ comme une quantité qui aurait pour

carré — 1? Pourquoi ne peut-on pas convenir aussi qu'en ajoutant 2 et 2 on obtiendra 10?

Plusieurs absurdités ont déjà disparu de l'enseignement : les séries divergentes, l'infini en tant que quantité déterminée très-grande, etc. Il faut espérer qu'on fera disparaître aussi les théories qui font de $\sqrt{-1}$ une quantité dénuée de sens.

Dans cette édition, je me suis mieux conformé aux programmes officiels que dans les précédentes; j'ai développé plus simplement et plus complétement la théorie des déterminants, la théorie des fonctions dérivées et celle de l'élimination. Enfin, on voudra bien remarquer le dernier Chapitre sur les polynômes homogènes du second degré et leurs applications à la séparation des racines des équations; cette théorie m'a paru une bonne préparation à l'étude des coniques et des surfaces du second ordre, indépendamment des immenses services que la loi dite *de l'inertie* est appelée à rendre à la théorie des équations.

Que l'on me permette à ce propos une digression : plus d'une théorie importante a été portée à un haut degré de perfection lorsqu'elle a été régulièrement introduite dans l'enseignement, et, quand on compare cette théorie avec ce qu'elle était cinq ou six ans auparavant, on y rencontre des énoncés plus nets et plus féconds, une précision et une rigueur qui en ont fait un instrument riche et puissant. C'est ainsi que la théorie de l'élimination s'est bien perfectionnée depuis qu'elle est exigée pour l'entrée à l'École Polytechnique. Je suis convaincu que, si nos professeurs voulaient introduire peu à peu la théorie des formes

quadratiques dans leur enseignement, comme ils ont introduit autrefois celle des déterminants, on verrait cette théorie faire faire à l'Analyse des progrès prodigieux.

Le jour n'est peut-être pas éloigné où l'on pourra substituer au théorème de Sturm, déjà si riche en conséquences, une méthode réellement pratique pour la séparation sûre et rapide des racines d'une équation.

Que l'on veuille bien se rappeler combien les élèves redoutaient autrefois l'introduction des déterminants dans les Cours de Mathématiques spéciales. Que de récriminations n'entendrait-on pas aujourd'hui si on les empêchait de se servir de ce précieux instrument, qui vient si à propos soulager leur mémoire et leur attention! Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler que c'est M. Moutard qui a surtout contribué par son enseignement à la vulgarisation de la théorie des déterminants.

H. L.

Septembre 1879.

INTRODUCTION.

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS D'ARITHMÉTIQUE.

I. — DES LIMITES ET DES INCOMMENSURABLES.

Les mots *égaler, ajouter* présentent, le plus souvent, un sens assez net à l'esprit pour que l'on n'ait pas besoin de les définir, toutefois nous ferons observer qu'il serait impossible d'en donner une définition générale parce qu'ils ont des significations très différentes suivant la nature des objets auxquels on les applique. Mais, s'il est impossible de donner une définition générale de ces mots *égaler, ajouter,* il est facile, il est même quelquefois indispensable de les définir quand ils s'appliquent à des objets déterminés.

Quelle que soit la définition que l'on donne de l'addition de plusieurs choses, nous supposerons toujours que le résultat de cette addition est indépendant de l'ordre dans lequel on considère ces choses. Nous supposerons aussi que la définition de l'égalité soit telle que deux choses égales à une autre soient égales entre elles.

On appelle *quantités* ou *grandeurs mesurables*, toutes les choses à propos desquelles on peut concevoir ou définir l'*égalité* et l'*addition*.

On dit qu'une quantité A est plus grande qu'une autre B, quand on obtient A en ajoutant à B une certaine quantité C, et alors on dit aussi que B est plus petit que A.

On dit que des quantités sont de *même espèce*, si l'on peut les concevoir égales entre elles, ou plus grandes et plus petites les unes que les autres, si enfin on peut les ajouter entre elles.

Considérons des quantités de même espèce et, parmi ces quantités, choisissons-en une arbitrairement, donnons-lui le nom d'*unité*, appelons aussi unités toutes les quantités qui lui sont égales, nous démontrerons que l'unité étant connue et déterminée, il est possible de désigner nettement une quantité déterminée et toutes celles qui lui sont égales au moyen de ce que l'on appelle un *nombre*.

Ainsi, le *nombre* qui *mesure* une quantité, est une locution ou un signe qui sert à désigner une quantité et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer de celles qui sont plus grandes ou plus petites. *Mesurer* une quantité, c'est chercher le nombre qui la mesure. Nous dirons que deux nombres sont égaux, quand ils serviront à mesurer des quantités égales; un nombre sera plus grand ou plus petit qu'un autre, quand il servira à mesurer une quantité plus grande ou plus petite que la quantité mesurée par cet autre.

Ajouter des nombres, c'est trouver le nombre qui mesure la quantité que l'on obtient en ajoutant les quantités mesurées par ces nombres.

Retrancher un nombre B d'un nombre A, c'est trouver le nombre qu'il faut ajouter à B pour obtenir A.

Nombres entiers. — Les nombres entiers sont ceux qui mesurent les quantités résultant de l'addition de plusieurs unités. On convient de dire que les unités sont mesurées par le nombre *un*, que le résultat de l'addition de l'unité à l'unité est mesuré par le nombre *deux*, et l'on donne ainsi un nom particulier aux nombres mesurant les quantités formées d'additions successives d'unités à

l'unité, nous n'avons pas ici à examiner la manière dont ces noms ont été choisis, nous supposerons seulement que l'on ait donné un nom à tout nombre entier et qu'on l'ait représenté par un signe particulier.

La *multiplication* des nombres entiers est une opération qui a pour but de trouver le résultat de l'addition d'autant de nombres égaux à un nombre donné appelé *multiplicande* qu'il y a d'unités dans un autre nombre appelé *multiplicateur;* le résultat est appelé *produit.*

La *division* des entiers est une opération qui a pour but, étant donnés deux nombres appelés *dividende* et *diviseur,* de trouver combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, ce que l'on peut faire en retranchant successivement le diviseur du dividende autant de fois que cela est possible; ce nombre de fois est le *quotient.*

Nombres fractionnaires. — Quelquefois l'unité est indivisible : c'est ce qui arrive, par exemple, quand cette unité est un être animé, mais le plus souvent elle est divisible, et il existe des quantités autres que celles qui résultent de l'addition d'unités. Supposons qu'il s'agisse de mesurer une quantité A qui ne puisse s'obtenir en ajoutant des unités; on partagera l'unité en deux parties égales qu'on appellera des *demis,* en trois parties égales que l'on appellera des *tiers,* etc.; s'il arrive que A résulte, par exemple, de l'addition de sept tiers, on dira que A est mesuré par le *nombre fractionnaire* sept tiers. Ainsi les nombres fractionnaires sont ceux qui mesurent les quantités résultant de l'addition des parties égales de l'unité.

Les nombres entiers et fractionnaires portent le nom de *nombres commensurables.* Deux quantités sont dites *commensurables* quand il existe une unité qui peut servir à les exprimer toutes deux en nombres entiers.

Multiplier un nombre par une fraction, c'est prendre cette fraction de ce nombre; diviser un nombre par une fraction, c'est trouver un nombre qui, multiplié par cette fraction, reproduit le nombre proposé.

NOMBRES INCOMMENSURABLES. — Nous appellerons *limite d'une quantité variable* une quantité fixe dont celle-ci s'approche de manière à en différer d'aussi peu que l'on veut.

Supposons que, ayant successivement partagé l'unité en 2, 3, ..., n, ... parties égales, la quantité A ne puisse jamais résulter de l'addition de parties égales de l'unité, on dira que A est *incommensurable* avec l'unité, et est mesuré par un nombre *incommensurable*. Il s'agit maintenant de définir ce nombre, c'est-à-dire de désigner toutes les quantités égales à A de manière à les distinguer de celles qui sont plus grandes ou plus petites. Pour cela, je dis qu'il suffit de dire quels sont les nombres commensurables mesurant les quantités plus grandes que A et les nombres commensurables mesurant les quantités plus petites que A. En effet, si l'on connaît tous les nombres commensurables mesurant des quantités plus grandes et plus petites que A, on saura, par exemple, que A est compris entre les m et les $(m+1)$ $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, quel que grand que soit n, et, si une autre quantité B pouvait jouir des mêmes propriétés, A et B différeraient entre elles de moins que la $n^{\text{ième}}$ partie de l'unité, c'est-à-dire d'aussi peu que l'on voudrait : B serait donc une des quantités égales à A. Ainsi, un nombre incommensurable sera défini en donnant le moyen de se procurer les nombres commensurables plus grands et plus petits, c'est-à-dire les nombres commensurables mesurant des quantités plus grandes et plus petites que celles qu'il mesure lui-même.

On peut maintenant dire que l'on appelle *limite* d'un

nombre variable, un nombre fixe dont ce nombre variable peut s'approcher de manière à en différer d'aussi peu que l'on veut.

Nous admettons qu'étant données un nombre limité ou illimité de quantités (et par suite de nombres mesurant ces quantités), si toutes ces quantités sont inférieures à une quantité Q, il y en aura une et une seule fixe, telle qu'elles ne pourront la dépasser, mais telle qu'elles pourront en approcher de manière à en différer d'aussi peu que l'on voudra; dans certains cas, elles pourront arriver à l'égaler; dans d'autres cas, elles pourront s'en rapprocher, mais sans jamais l'égaler; en tout cas, cette quantité fixe sera la limite des quantités considérées.

Ce principe est de toute évidence; quelques géomètres ont essayé de le démontrer, mais en s'appuyant, à notre avis, sur d'autres principes bien moins évidents, et tantôt en dissimulant la vraie nature de la quantité, tantôt en donnant des quantités incommensurables des définitions tout à fait fantaisistes et qui ne sont pas dans la nature des choses.

Il ne faut pas oublier que les définitions ne sont pas toujours arbitraires, et que bien souvent elles ne servent qu'à donner de la précision à des idées déjà existantes dans notre esprit. Les définitions que l'on est obligé de donner au début de la Science sont de cette nature; la définition du nombre n'est pas arbitraire et la définition que nous en avons donnée n'est que la traduction précise, en langage scientifique, de l'idée que tout le monde, que l'enfant, se fait du nombre (¹).

(¹) Il nous est impossible d'admettre cette définition : une fraction *c'est l'ensemble de deux entiers séparés par une barre*. Demandez à un enfant ce qu'est la moitié d'un gâteau, il ne vous répondra pas que c'est un, séparé de deux par une barre : il coupera son gâteau et vous en montrera un morceau.

Nous pouvons donc poser le principe suivant :

1° *Si l'on considère une suite illimitée de nombr croissants, mais moindres qu'un nombre donné* N, *i ont une limite qui est le plus petit nombre qu'ils n peuvent dépasser, qu'ils l'atteignent effectivement o qu'ils ne l'atteignent pas.*

2° *Si l'on considère une suite illimitée de nombre décroissants supérieurs à un nombre donné* N, *ils on une limite qui est le plus grand nombre au-dessou duquel ils ne peuvent descendre.*

Il en résulte qu'un nombre incommensurable est l limite commune des nombres commensurables décrois sants plus grands que lui et des nombres commensurable croissants plus petits que lui.

II. — GÉNÉRALISATION DES QUATRE OPÉRATIONS.

Nous avons défini, d'une manière générale, l'additio et la soustraction, mais la multiplication et la divisio n'ont pas encore été définies pour les nombres incom mensurables.

Soient A et B deux nombres commensurables ou in commensurables ; soient

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les nombres commensurables crois sants ayant pour limite A ;

$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ les nombres commensurables crois sants ayant pour limite B ;

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ les nombres commensurables décrois sants ayant pour limite A ;

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ les nombres commensurables décrois-sants ayant pour limite B.

Si nous considérons les nombres croissants $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., $a_n b_n$, ..., moindres que $\alpha_1 \beta_1$, ils ont une limite l; de même, les nombres décroissants $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, ..., $\alpha_n \beta_n$, ..., tous supérieurs à $a_1 b_1$, ils ont une limite λ. Je dis que $l = \lambda$. En effet, soit

$$\alpha_n = a_n + \omega_n, \qquad \beta_n = b_n + \varpi_n,$$

on a

$$\begin{aligned}\alpha_n \beta_n - a_n b_n &= (a_n + \omega_n)(b_n + \varpi_n) - a_n b_n \\ &= a_n \varpi_n + b_n \omega_n + \omega_n \varpi_n.\end{aligned}$$

Or $a_n \varpi_n$, $b_n \omega_n$, $\omega_n \varpi_n$ étant aussi petits que l'on veut, il en est de même de leur somme $\alpha_n \beta_n - a_n b_n$, ce qui revient à dire que $\alpha_n \beta_n$ et $a_n b_n$ diffèrent l'un de l'autre d'aussi peu que l'on veut, et il en est alors de même de leurs limites l et λ; donc ces limites sont égales, car si elles différaient, on ne pourrait pas prendre leur différence aussi petite que l'on voudrait. Alors $l = \lambda$ est ce que l'on appelle le produit de A par B.

Il est clair qu'un produit ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre des facteurs, etc.

Remarque. — Les nombres sont des quantités puisque l'on a défini leur égalité et leur addition.

Le *quotient* de deux incommensurables appelées *dividende* et *diviseur* est un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende.

Soient D le dividende, d le diviseur; je dis que le quotient existe toujours. En effet, soient Δ, Δ', δ, δ' des quantités commensurables satisfaisant aux relations

$$\Delta > D > \Delta', \qquad \delta > d > \delta';$$

on trouvera toujours deux nombres q et q' satisfaisant aux relations

$$(1) \qquad \Delta = \delta' q, \qquad \Delta' = \delta q'.$$

Si l'on fait tendre Δ et Δ' vers D, δ et δ' vers d, q di-

minue, q' augmente, mais on a toujours $q > q'$; don
et q' ont chacun une limite. Je dis que ces limites s
égales; en effet, en appelant r la différence entre Δ et
et s la différence entre δ et δ', on a, au lieu des f
mules (1),

$$\Delta = (\delta - s)q, \qquad \Delta + r = \delta q',$$

et, en retranchant membre à membre,

$$r = \delta q' - (\delta - s)q,$$

ou bien

$$r = \delta q' - \delta q + sq.$$

Mais, s et r pouvant être pris aussi petits que l'on ve
$\delta q'$ et δq peuvent être pris aussi voisins l'un de l'au
que l'on veut, et par suite q et q' aussi, ce qui prou
bien l'existence d'un quotient unique.

III. — APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

Les notions qui précèdent suffisent pour édifier
théorie générale des nombres, mais elles ne suffisent p
pour en faire des applications : nous allons les complét

On appelle produit d'une *quantité* A par un nomb
entier n le résultat de l'addition de n quantités égal
à A; produit de A par la fraction $\frac{m}{n}$, le résultat de l'add
tion de m quantités égales à la $n^{\text{ième}}$ partie de A, ou l
$\frac{m}{n}$ de A; enfin, le produit de A par un nombre incomme
surable i est la limite des quantités que l'on obtient e
multipliant A par les nombres commensurables qui on
pour limite i, et l'on démontre l'existence de cette limi
en employant le même mode de raisonnement que si
était un nombre.

Ceci posé, nous appellerons *rapport* de deux quantité

A, B de même espèce le nombre par lequel il faut multiplier B pour avoir A. Ce que nous voulons prouver, c'est que *le rapport de deux quantités est le quotient des nombres qui mesurent ces quantités, quelle que soit l'unité qui sert à les mesurer.*

D'abord, je dis que le rapport de A à B est le nombre qui mesure A quand B est pris pour unité; cela est évident si ce rapport est commensurable. Si, en effet, il est $\frac{5}{7}$, A est les $\frac{5}{7}$ de B et, par suite, A est mesuré par le nombre $\frac{5}{7}$ si B est l'unité. Supposons maintenant le rapport de A à B incommensurable et égal à i; A étant le produit de B par i sera compris entre les $\frac{m}{n}$ et les $\frac{m+1}{n}$ de B par exemple, n étant un nombre que l'on pourra prendre si grand que l'on voudra, $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ désignant les valeurs de i à $\frac{1}{n}$ près.

Si B est pris pour unité, le nombre μ qui mesure A est aussi compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$: donc i et μ diffèrent entre eux de moins de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire d'aussi peu que l'on veut; ils sont donc égaux. C. Q. F. D.

Maintenant, calculons le rapport r de A à B. En prenant U pour unité, les nombres mesurant A et B seront; par exemple, a et b. Pour former A, nous formons B en multipliant U par b; pour former A, on multiplie B par r : donc A s'obtient en multipliant U par b, puis le résultat par r; mais on peut aussi l'obtenir en multipliant U par a; mais, U étant l'unité, le produit de U par un nombre est une quantité représentée par ce nombre, donc

$$b.r = a \quad \text{et} \quad r = \frac{a}{b}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

TRAITÉ
D'ALGÈBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.
NOTIONS FONDAMENTALES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Il est difficile de donner une définition bien nette et bien précise de l'objet de l'Algèbre ; toutefois, on peut dire que la science des nombres comprend l'Arithmétique et l'Algèbre.

L'Arithmétique a pour but de trouver des nombres inconnus d'après leur mode de dépendauce avec d'autres nombres donnés.

L'Algèbre, au contraire, a pour but « de trouver le système d'opérations à faire sur des quantités données pour en déduire les valeurs des quantités que l'on cherche... Le tableau de ces opérations... est ce que l'on appelle une *formule* » (Lagrange, *De la résolution des équations numériques*).

entre les Grecs et les Hindous. Le Livre de Brahmegupta est postérieur de deux siècles à celui de Diophante, mais la perfection de son Ouvrage annonce certainement que l'Algèbre avait déjà une existence très-ancienne dans l'Inde. » (*Id.*, p. 489.)

L'Algèbre des anciens différait beaucoup de l'Algèbre moderne, dont l'origine remonte à Viète, qui a le premier eu l'idée de représenter dans les calculs les nombres par des lettres.

II. — DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

En Algèbre comme en Arithmétique, nous ferons usage des signes + et — pour exprimer que les nombres séparés par ces signes doivent être ajoutés ou retranchés l'un de l'autre. Les nombres qui, dans une formule, ne sont précédés d'aucun signe, ou qui sont précédés du signe +, sont appelés *quantités positives;* ceux qui sont précédés du signe — sont appelés *quantités négatives*.

On considère souvent les quantités algébriques indépendamment des formules dans lesquelles elles doivent entrer; mais, quand nous parlerons dorénavant d'une quantité négative, il faudra toujours sous-entendre qu'elle fait partie d'une formule sans laquelle cette quantité n'offrirait aucun sens net à l'esprit. Ainsi, par exemple, quand nous parlerons de la quantité -4, nous devrons toujours supposer une formule, par exemple

$$5-4=1, \quad 2+7-4=5, \quad \ldots,$$

dont -4 fasse partie, sans qu'il soit cependant nécessaire de préciser la formule en question. On conçoit, en effet, que le signe — placé devant le chiffre 4 donne à ce chiffre certaines propriétés dont il jouira, quelle que soit la formule dans laquelle il se trouve écrit. Ce que nous venons

de dire du symbole — 4 pourrait se répéter de cet aut
+ 4, que l'on ne saurait concevoir que comme faisa
partie d'une formule existante.

On appelle *valeur absolue* et quelquefois aussi *modu*
d'une quantité positive ou négative le nombre précédé
signe + ou — qui entre dans cette quantité.

On dit que deux quantités sont *égales* lorsque leu
valeurs absolues sont égales et que leurs signes sont l
mêmes; cette égalité algébrique s'exprime à l'aide
signe =, qui n'amène aucune confusion si nous conv
nons de regarder comme précédées du signe + les qua
tités arithmétiques qui n'ont pas de signe.

On convient de regarder les quantités négatives comn
plus petites que zéro, et d'autant plus petites que leur v
leur absolue est plus grande, et l'on conserve les signes <
> de l'Arithmétique pour exprimer qu'une quantité pos
tive ou négative est plus petite ou plus grande qu'u
autre.

Ces conventions n'ont d'autre but que de simplifier
langage et d'éviter de longues périphrases; on finit p
s'y accoutumer, et l'on y trouve souvent le grand avanta
de comprendre dans un seul énoncé plusieurs propositio
qui sans cela nécessiteraient autant d'énoncés distincts.

III. — ADDITION.

L'*addition algébrique* est une opération qui a po
but de faire la *somme algébrique* de deux ou plusieu
quantités.

On appelle *somme algébrique* de deux quantités
même signe la somme de leurs valeurs absolues précéd
du signe commun; la *somme algébrique* de deux quantit
de signes contraires est la différence de leurs valeurs abs
lues précédée du signe de la plus grande.

Ainsi la somme de -4 et -5 est -9, la somme de -4 et $+5$ est $+1$, celle de $+4$ et -6 est -2.

La somme de plusieurs quantités telles que -1, $+2$, -4, $+7$ est le résultat obtenu en ajoutant la première et la seconde, puis la troisième à la somme des deux premières, puis la quatrième à la somme des trois premières, etc.

Pour indiquer que plusieurs quantités doivent être ajoutées, on fait usage du signe $+$; ainsi

$$(-2)+(-4)+(+5)$$

représente le résultat obtenu en ajoutant -2 à -4 et $+5$ à la somme ainsi obtenue. Le plus souvent, on se contente d'écrire les quantités les unes à la suite des autres sans changer les signes; ainsi

$$-2+4-5$$

est équivalent à

$$(-2)+(+4)+(-5).$$

Le symbole $3+6-4+1-2$, qui en Arithmétique représente une suite de sommes et de différences, et en Algèbre une somme, conduit dans les deux sciences au même résultat lorsqu'il est arithmétiquement possible, ce qui est très-avantageux au point de vue des applications.

Quelquefois on désigne une quantité positive ou négative telle que -4 par une seule lettre a. Pour exprimer que plusieurs quantités $a, b, c, \ldots$ doivent être ajoutées, on les sépare les unes des autres par le signe $+$, ainsi : $a+b+c+\ldots$ (¹).

Lemme I. — *Soit* N *un nombre plus grand que les va-*

(¹) On pourra à une première lecture passer les lemmes et remarques suivantes, et admettre le théorème I sans démonstration.

leurs absolues de a et de a'; si l'on a

$$(1) \qquad N + a = N + a',$$

on aura $a = a'$.

D'abord je dis que les signes de a et a' sont les mêmes car si, par exemple, a était négatif et a' positif, en mettan les signes de a et a' en évidence et en appelant α et α' leur valeurs absolues, on aurait

$$N - \alpha = N + \alpha',$$

ce qui est absurde, car le premier membre est plus peti que le second. Les signes de a et a' étant les mêmes, la formule (1) revient à $N + \alpha = N + \alpha'$ ou à $N - \alpha = N - \alpha'$ ce qui ne peut avoir lieu que si $\alpha = \alpha'$. Donc a et a' son égaux en valeur absolue et en signe. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Si* N *est plus grand en valeur absolue que* a, b *et* $a + b$, *on aura*

$$N + (a + b) = N + a + b;$$

en explicitant les signes de a et b, cette formule revient aux quatre suivantes, où α et β sont les valeurs absolues de a et b :

$$(1) \qquad N + (+\alpha + \beta) = N + \alpha + \beta,$$
$$(2) \qquad N + (-\alpha + \beta) = N - \alpha + \beta,$$
$$(3) \qquad N + (+\alpha - \beta) = N + \alpha - \beta,$$
$$(4) \qquad N + (-\alpha - \beta) = N - \alpha - \beta.$$

La formule (1) est évidente, car, $+\alpha + \beta$ étant positif, pour l'ajouter à N, il faut faire l'opération arithmétique qui est l'addition de la somme $\alpha + \beta$, ou, ce qui revient au même, ajouter α puis β. Pour démontrer la formule (2), on observe que $-\alpha + \beta$ est égal à $+(\beta - \alpha)$ si $\beta > \alpha$ et à

$-(\alpha-\beta)$ si $\alpha > \beta$; on doit donc, dans le premier cas, ajouter $\beta-\alpha$ à N, ce qui revient à lui retrancher α, puis à lui ajouter β, et dans le second cas lui retrancher $\alpha-\beta$, ce qui se fera en retranchant α et en ajoutant β au résultat; donc, en tout cas, la formule (2) est exacte. La formule (3) revient à (2), car $+\alpha-\beta=-\beta+\alpha$ d'après la définition même de l'addition de deux quantités, définition dans laquelle l'ordre n'intervient pas. Enfin, la formule (4) se démontre en observant que $-\alpha-\beta$ est égal à $-(\alpha+\beta)$ et qu'ajouter $-(\alpha+\beta)$ à une quantité positive plus grande N, c'est en retrancher $\alpha+\beta$, ce qui donne

$$N-\alpha-\beta.$$

Remarque. — Il est indispensable de bien observer que les lemmes précédents, évidents si a, b étaient des *nombres*, ne le sont plus si a, b sont des *quantités algébriques*. En ce moment, nous ne prenons pas dans son acception ordinaire le mot *ajouter*; d'ailleurs, il s'applique à autre chose qu'à des nombres, de sorte qu'une démonstration est nécessaire pour établir des faits qui seraient de toute évidence si a, b étaient des *nombres* et si nous avions conservé au mot *ajouter* son sens vulgaire.

Théorème I. — *Une somme ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses parties.*

Considérons, en effet, la somme $a+b+c+d$. Soit N un nombre positif assez grand pour que N surpasse les sommes que l'on peut faire avec a, b, c, d en les prenant 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3 et 4 à 4, dans un ordre quelconque; nous aurons, en vertu de notre lemme II,

$$\begin{aligned} N+(a+b+c+d) &= N+(a+b+c)+d \\ &= N+(a+b)+c+d \\ &= N+a+b+c+d; \end{aligned}$$

mais il est clair que, quels que soient les signes de $a, b, c,$ on a, par exemple,

$$N + a + b + c + d = N + b + d + c + a$$

(chacune des opérations indiquées étant arithmétiqu ment possible et l'addition d'une quantité négative rev nant toujours ici à une soustraction); donc aussi

$$N + (a + b + c + d) = N + (b + d + c + a),$$

et, en vertu du lemme I,

$$a + b + c + d = b + d + c + a.$$

Le théorème est donc démontré.

Théorème II. — *Pour ajouter une somme à une quan tité, il suffit de lui ajouter successivement chacune de se parties.*

En effet, proposons-nous d'ajouter $a + b + c$ à P, l résultat sera

$$P + (a + b + c) \quad \text{ou} \quad (a + b + c) + P.$$

Mais on peut supprimer la parenthèse dans cette dernièr formule, car elle exprime qu'au résultat obtenu en ajou tant b à a et c à la somme ainsi obtenue il faut encor ajouter P, ce qu'exprime également le symbole

$$a + b + c + P,$$

que l'on peut aussi écrire

$$P + a + b + c,$$

en vertu du principe précédent; donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Une somme algébrique peut s'obtenir en ajoutant séparément les quantités de même signe, en*

faisant la différence des résultats obtenus et en donnant à cette différence le signe du plus grand.

En effet,

$$a + b - c + d - f = a + b + d - c - f,$$

et, en vertu du principe précédent,

$$a + b - c + d - f = (a + b + d) + (-c - f)$$
$$= (a + b + d) - (c + f),$$

ce qui démontre le principe en question.

Théorème IV. — *Pour changer le signe d'une somme algébrique, il suffit de changer le signe de chacune de ses parties.*

En effet, pour faire la somme de plusieurs quantités, on ajoute les quantités de même signe, on fait la différence des résultats A et B, on donne à cette différence le signe du plus grand de ces deux résultats. Or, en changeant les signes de tous les termes de la somme, on change les signes de A et de B, et par suite le signe que l'on doit donner à leur différence, qui est la somme algébrique en question.

IV. — SOUSTRACTION.

La *soustraction* algébrique est une opération qui a pour but, étant donnée une somme et l'une de ses parties, de trouver l'autre, que l'on appelle *reste* ou *différence*.

Théorème. — *Pour soustraire une quantité algébrique d'une autre, il suffit de l'ajouter à celle-ci en changeant son signe.*

En effet, soit à soustraire $-\beta$ de α, par exemple; je dis que le résultat sera $\alpha + \beta$ (les signes de α et β sont censés

en évidence). D'abord il est facile de vérifier que $\alpha +$ est tel, que si l'on y ajoute $-\beta$ on retrouve α; en eff $\alpha + \beta - \beta$ est égal à $\beta - \beta + \alpha$, c'est-à-dire à $0 + \alpha$ ou à La même vérification se ferait pour d'autres combinaiso de signes.

Il reste à prouver qu'il n'existe pas d'autre nombre q $\alpha + \beta = \gamma$ tel que si l'on y ajoute $-\beta$ on retrouve α; ce f est facile à établir. En effet, supposant par exemple γ p sitif, il n'est pas possible qu'un autre nombre positif donne $\delta - \beta = \gamma - \beta$, car les différences des valeurs a solues de δ et β, de γ et β ne peuvent être les mêmes δ et γ sont tous deux plus grands ou tous deux plus peti que β; s'ils sont l'un plus petit, l'autre plus grand que ce seront les signes des résultats qui seront différents.

On voit de même que $\alpha + \beta$ ne saurait être négatif égal à $-\delta$, car $-\delta - \beta$ serait plus grand en valeur absol que $\gamma - \beta$.

V. — MULTIPLICATION ET DIVISION.

Multiplication. — Multiplier algébriquement une qua tité par une autre, c'est faire le produit de leurs valeu absolues et donner au résultat le signe + si elles ont même signe et le signe — si elles sont de signes contraire Les dénominations de *multiplicande, multiplicateur, fa teurs, produit* s'appliquent à la multiplication algébriq comme à la multiplication arithmétique.

On donne quelquefois la définition de la multiplicatio sous forme de règle, en disant d'une manière abrégée qu

+	multiplié par	+	donne	+,
+	»	—	»	—,
—	»	+	»	—,
—	»	—	»	+.

C'est en cela que consiste ce que l'on appelle souvent la *règle des signes;* d'après cette règle, on voit, par exemple, que — 7 multiplié par + 4 donne — 28, que — 5 multiplié par — 6 donne + 30, etc. Lorsqu'une seule lettre désigne une quantité avec son signe, on exprime que plusieurs quantités doivent être multipliées entre elles en les séparant par le signe ×, par un point, ou encore en les écrivant sans aucun signe les unes à la suite des autres; ainsi

$$a \times b \times c, \quad a.b.c, \quad abc$$

sont trois notations qui indiquent que l'on doit multiplier la quantité a par b et le résultat par c. Quand un des facteurs est un nombre positif et l'autre une lettre, on ne met ordinairement pas de signe entre le multiplicande et le multiplicateur. On conçoit que cette convention ne saurait s'appliquer à plusieurs facteurs numériques d'un même produit; en effet, 23, par exemple, offrirait un sens ambigu et représenterait également les deux nombres 6 et $(20+3)$.

Division. — La *division algébrique* est une opération qui a pour but, étant donné un produit de deux facteurs appelé *dividende* et l'un de ses facteurs appelé *diviseur*, de trouver l'autre appelé *quotient*.

Le quotient de deux quantités algébriques est égal au quotient de leurs valeurs absolues précédé du signe + si elles ont le même signe et du signe — si elles sont de signes contraires.

Le quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur, il donne le dividende; donc sa valeur absolue multipliée par la valeur absolue du diviseur doit donner la valeur absolue du dividende, donc la valeur absolue du quotient doit être le quotient des valeurs absolues du dividende et du diviseur.

Si le dividende et le diviseur sont de mêmes signes quotient doit avoir le signe +, car, s'il avait le signe — diviseur multiplié par le quotient donnerait un produit a le signe — si le diviseur était positif et avec le signe + le diviseur était négatif, c'est-à-dire en tout cas de si contraire au dividende; le signe + est au contraire par tement admissible.

On verrait d'une façon analogue que, le dividende e diviseur étant de signes contraires, le quotient doit por le signe —.

Le quotient de a par b se représente, comme en Ari métique, par l'une des notations

$$a : b, \quad \frac{a}{b}.$$

Théorème I. — *Un produit ne change pas de val quand on intervertit l'ordre de ses facteurs.*

En effet, ainsi sa valeur absolue ne change pas, car e est égale au produit des valeurs absolues des facteurs; qu au signe, il est en tout cas + si les facteurs négatifs s en nombre pair et — dans le cas contraire. En effet, le sig des produits partiels successifs change chaque fois q l'on rencontre un facteur négatif.

Théorème II. — *Pour multiplier une quantité alg brique par un produit, il suffit de la multiplier succ sivement par chaque facteur du produit.* (Même dém stration qu'en Arithmétique.)

Corollaire. — Le produit $abcdef$ peut s'écrire à v lonté

$$ab(cde)f, \quad (ab)c(def), \quad ac(bdef), \quad \ldots.$$

Théorème III. — *Lorsque l'on multiplie le dividen*

d'une division par une certaine quantité, le quotient est multiplié par cette quantité.

En effet, soient D le dividende, d le diviseur et q le quotient, on a

$$D = dq;$$

en multipliant par m les deux membres de cette égalité, on trouve

$$Dm = dqm.$$

Cette égalité montre que d multiplié par qm reproduit Dm; donc qm est le quotient de Dm par d; donc, etc.

C. Q. F. D.

THÉORÈME IV. — *Lorsque l'on multiplie le diviseur par un certain nombre, le quotient est divisé par ce nombre.*

En effet, en conservant la même notation que tout à l'heure, l'égalité

$$D = dq$$

peut s'écrire

$$D = dm \times \frac{q}{m}.$$

En effet, $\frac{q}{m}$ est une quantité qui multipliée par m reproduit q; donc, multipliée par dm, elle reproduira dq; donc enfin D est le produit de deux facteurs dm et $\frac{q}{m}$, ce qui revient à dire que $\frac{q}{m}$ est le quotient de D divisé par dm.

THÉORÈME V. — *Lorsque l'on multiplie le dividende et le diviseur par une même quantité, le quotient ne change pas.*

En effet, en conservant toujours les mêmes notations,

on a

$$D = dq \quad \text{et} \quad Dm = dmq,$$

ce qui démontre que q est aussi bien le quotient de D
visé par d que le quotient de Dm divisé par dm.

C. Q. F. D.

THÉORÈME VI. — *Pour diviser un produit par l'un
ses facteurs, il suffit de supprimer ce facteur.*

En effet, le résultat ainsi obtenu est tel, que, multip
par le facteur en question, il redevient égal au prod
proposé.

THÉORÈME VII. — 1° *Quand on divise le dividende p
une certaine quantité, le quotient est divisé par cette qua
tité; 2° quand on divise le diviseur par une certaine qua
tité, le quotient est multiplié par cette quantité; 3° enfi
quand on divise le dividende et le diviseur par une mê
quantité, le quotient ne change pas.*

Ces principes deviennent évidents si l'on observe q
diviser par m une quantité, c'est la multiplier par $\frac{1}{m}$. E
effet, en désignant par A une quantité quelconque, si l'o
multiplie le produit $A \times \frac{1}{m}$ par m, on a

$$A \times \frac{1}{m} \times m = \frac{1}{m} \times m \times A.$$

Or $\frac{1}{m} \times m$ est évidemment égal à 1, car, par définitio
même, $\frac{1}{m}$ est un nombre qui multiplié par m donne 1 ; o
a donc

$$A \times \frac{1}{m} \times m = A$$

Ainsi le produit de A par $\frac{1}{m}$, multiplié par m, donne A; donc $A \times \frac{1}{m}$ est le quotient de A divisé par m.

C. Q. F. D.

Théorème VIII. — *Pour diviser une quantité par un produit, il suffit de la diviser successivement par chacun des facteurs du produit.*

En effet, proposons-nous de diviser A par $abcd$. Divisons A par a, soit q le quotient; divisons q par b, soit q' le quotient; divisons q' par c, soit q'' le nouveau quotient; enfin soit q''' le quotient de la division de q'' par d, on aura

$$A = aq, \quad q = bq', \quad q' = cq'', \quad q'' = dq'''.$$

En multipliant membre à membre ces égalités, on a

$$Aqq'q'' = abcdqq'q''q''';$$

et, en divisant par q, par q' et par q'' les deux membres de cette égalité, on a

$$A = abcdq''',$$

ce qui prouve que q''' est le quotient de la division de A par $abcd$.

EXERCICES ET NOTES.

Nous ne proposerons pas d'Exercices sur le Chapitre que l'on vient de lire; nous nous bornerons à donner ici, *sous toutes réserves*, quelques notions historiques sur les commencements de l'Algèbre.

L'histoire de la partie élémentaire des Mathématiques est très-difficile à faire, à cause de la rareté des vieux livres, de la difficulté que présente leur lecture et du temps qu'exige cette lecture; peu d'érudits se sont livrés à cette branche ardue des connaissances humaines; aussi

est-ce *sous toutes réserves* que nous allons donner les documents : vants, en nous appuyant de l'autorité d'un homme très-érudi considéré comme compétent.

D'après Olry Terquem (*Bulletin des Sciences mathématiques*) :

La première apparition des signes + et — a lieu dans un Ouvr intitulé : *Die cosz Christorfs Rudolfs, mit schönen Exempeln der durch Michael Stieffel, gebessert und sehr gemehrt* 1571. — Le si $\sqrt{\ }$ est employé dans cet Ouvrage.

Les signes +, — sont dus à Rudolf (1524).

Le signe = est dû à Robert Recorde (1557) (Descartes se servait signe ∞ et Rudolph du point).

Les lettres pour représenter les nombres ont été imaginées Viète (1540 à 1603), mais Viète n'employait que les majuscules; minuscules sont de Thomas Harriot. Harriot a aussi imaginé signes $>$, $<$.

Les parenthèses et les crochets sont dus à Albert Girard.

Le point comme signe de multiplication est de Leibnitz, ainsi que signe :.

La barre de fraction se trouve dans Léonard de Pise, Fibonac elle est probablement due aux Hindous.

Le signe $\times$ est de Oughtred (*Clavis mathematica*, 1631). Mic Stieffel n'emploie aucun signe; pour lui, ab équivaut à $a \times b$ (154

La règle des signes est indiquée dans Diophante, qui emploie qu quefois le Ψ renversé comme signe d'addition.

CHAPITRE II.

DES POLYNOMES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

On appelle *monôme* ou *terme* une quantité prise isolément, ou un ensemble de quantités qui, dans une formule, ne sont liées entre elles par aucun des signes + ou —; ainsi $2\frac{ab}{c}$ est un monôme.

On appelle *polynôme* une quantité composée de plusieurs termes séparés par les signes + ou —; ainsi $ab - c + de$ est un polynôme. Les polynômes se divisent en *binômes, trinômes*, ..., selon qu'ils ont deux, trois, ... termes.

On a déjà défini en Arithmétique ce que l'on appelait puissance d'un nombre; en Algèbre on appelle, comme en Arithmétique, *puissance* $n^{\text{ième}}$ d'une quantité le produit de n quantités égales à celle-ci; la deuxième puissance d'une quantité s'appelle aussi *carré* de cette quantité, la troisième *cube*.

Pour indiquer d'une manière abrégée la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quantité a, on écrit le nombre n au-dessus de a, ainsi : a^n; le nombre n ainsi placé porte le nom d'*exposant* (*). On convient en outre de regarder a^0 comme égal à 1, en sorte que la puissance 0 d'une quantité quelconque

(*) Les exposants ont été imaginés par Étienne de la Roche en 1520.

est égale à 1. Cette convention peut paraître inutile, n on verra plus loin qu'elle permet souvent de simpli le langage; elle est d'ailleurs logique, a^0 indiquant a a été pris zéro fois comme facteur, c'est-à-dire n'er pas comme facteur dans le produit où il est écrit; a^0 c donc être considéré comme équivalant à *un*.

On appelle *coefficient* d'une quantité dans un ter l'ensemble des facteurs de ce terme qui n'entrent pas d la quantité en question; ainsi, dans le terme $3ab$, $3a$ le coefficient de b, 3 est le coefficient de ab. Dans 2 2 est le coefficient de $\frac{b}{a}$, $\frac{2}{a}$ est le coefficient de b, ...

On appelle *termes semblables* ceux qui ne diffèrent c par leurs coefficients. On voit par là que la similitude deux termes est une chose tout à fait relative et dépe des quantités que l'on considère comme coefficients; ai $2ab$ et $3ab$ sont termes semblables si l'on considère 2 e comme coefficients. $2a^2b$ et $4ab$ ne sont plus semblab si l'on ne considère comme coefficients que les facte numériques; mais ils le sont encore si l'on considère 2 comme coefficient du premier terme et $4a$ comme coef cient du second.

Nous verrons plus loin que la considération des term semblables permet de simplifier considérablement le calc algébrique.

II. — ADDITION ET SOUSTRACTION DES POLYNOMES.

Proposons-nous d'additionner les deux polynômes

$$P = a + b - c + d$$

et

$$Q = g - h + k - i;$$

le résultat cherché est

$$a + b - c + d + Q.$$

Mais, pour ajouter la somme Q à $a + b - c + d$, il suffit d'ajouter à cette quantité successivement chacune des parties de Q (p. 8); on a donc

$$P + Q = a + b - c + d + g - h + k - i.$$

C. Q. F. D.

D'où l'on voit que, *pour ajouter ensemble deux polynômes, il suffit de les écrire l'un à la suite de l'autre sans changer les signes de leurs termes.*

Cette règle s'applique évidemment à plus de deux polynômes.

Proposons-nous maintenant de retrancher le polynôme Q du polynôme P.

Retrancher Q de P revient à ajouter à P le polynôme Q changé de signe; la question est donc ramenée à celle-ci : *changer le signe du polynôme* Q. Pour y parvenir, je dis qu'il suffit de changer les signes de chacun de ses termes. En effet, pour trouver la valeur d'un polynôme, il faut ajouter les termes de même signe, retrancher la plus petite des sommes ainsi obtenues de la plus grande, et donner au résultat le signe de la plus grande. Si l'on change alors les signes des termes du polynôme, les sommes qu'il faut retrancher l'une de l'autre pour obtenir la valeur du polynôme changent de signe; la plus grande de ces deux sommes en particulier change de signe, et par suite le polynôme lui-même, qui est de même signe que cette dernière somme.

Ceci posé, on voit que, *pour retrancher* Q *de* P, *il suffira d'ajouter à* P *le polynôme* Q, *dans lequel on aura eu soin de changer les signes de tous les termes;* ou, ce qui revient au même :

Pour retrancher un polynôme d'un autre, il suffit

d'écrire à la suite de celui-ci chacun des termes polynôme à soustraire changé de signe.

Il est inutile d'ajouter que ces règles bien simples s'a pliquent encore au cas où l'un des polynômes considérés réduirait à un monôme.

III. — MULTIPLICATION DES POLYNOMES.

Proposons-nous d'abord de multiplier un polynôme

$$P = a - b + c - d$$

par un monôme m.

1° Supposons d'abord P et m positifs, a, b, c, d et commensurables; m sera une fraction que nous pouvoı supposer égale à $\frac{3}{4}$; alors la question est ramenée à prend les $\frac{3}{4}$ de P. Or, si l'on ajoute quatre polynômes égaux a suivant

$$Q = \frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{c}{4} - \frac{d}{4},$$

on retrouve P, en vertu des règles de l'addition des pol nômes; donc le polynôme Q est égal à $\frac{P}{4}$. Ajoutons main tenant trois polynômes égaux à Q, le résultat sera égal trois fois $\frac{P}{4}$, et l'on aura, en vertu des règles de l'addition

$$\frac{3P}{4} = \frac{3a}{4} - \frac{3b}{4} + \frac{3c}{4} - \frac{3d}{4},$$

ou bien

$$mP = ma - mb + mc - md;$$

d'où l'on voit que, pour multiplier P par m, il suffit de multiplier par m chacun de ses termes.

2° Supposons actuellement que, P et m restant toujours positifs, a, b, c, d, m puissent prendre des valeurs incommensurables. Désignons par a', b', c', d', m' les nombres commensurables supérieurs à a, b, c, d, m ayant ces nombres pour limites, et par a'', b'', c'', d'', m'' les nombres commensurables inférieurs à a, b, c, d, m ayant ces quantités pour limites. (Si quelqu'un des nombres a, b, c, d, m était commensurable, a par exemple, il faudrait remplacer dans la démonstration a' et a'' par a.) On a évidemment

$$m'(a' - b'' + c' - d'') > m\text{P} > m''(a'' - b' + c'' - d'),$$

ou, en vertu de la règle trouvée tout à l'heure,

$$\begin{aligned} &m'a' - m'b'' + m'c' - m'd'' \\ &\quad > m\text{P} > m''a'' - m''b' + m''c'' - m''d', \end{aligned}$$

et, *a fortiori*,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &m'a' - m''b'' + m'c' - m''d'' \\ &\quad > m\text{P} > m''a'' - m'b' + m''c'' - m'd'. \end{aligned} \right.$$

Or les membres extrêmes de cette inégalité diffèrent tous deux de $ma - mb + mc - md$ d'aussi peu que l'on veut. En effet, posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{A} = m'a' - m''b'' + m'c' - m''d'', \\ &\text{B} = m''a'' - m'b' + m''c'' - m'd', \\ &\text{C} = ma - mb + mc - md, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$\begin{aligned} \text{A} - \text{C} = {} &(m'a' - ma) + (mb - m''b'') \\ &+ (m'c' - mc) + (m''d'' - md). \end{aligned}$$

Mais $m'a'$ a pour limite ma, $m''b''$ a pour limite mb, etc.; donc les différences entre parenthèses peuvent être rendues aussi petites que l'on veut, et la différence A — C par suite aussi. On verrait de même que C — B peut être pris

moindre que toute quantité donnée; mais, en vertu de formule (1), mP reste compris entre A et B, qui diffère de C d'aussi peu que l'on veut; donc, *a fortiori*, les quan tités fixes mP et C diffèrent l'une de l'autre d'aussi p que l'on veut. Elles sont donc rigoureusement égales, l'on a

$$mP = C,$$

ou bien, d'après la formule (2),

$$mP = ma - mb + mc - md.$$

3° Supposons maintenant P négatif et m positif; si no changeons le signe de P, nous changerons évidemment signe du produit sans changer sa valeur absolue. Or c change le signe de P en changeant les signes de chacun d ses termes, et l'on a

$$-P = -a + b - c + d;$$

$-P$ étant positif, on aura, d'après ce qui vient d'être d montré,

$$m(-P) \quad \text{ou} \quad -mP = -ma + mb - mc + md;$$

et, par conséquent, nous trouvons, comme dans le cas où est positif, en changeant les signes des deux membres,

$$mP = ma - mb + mc - md.$$

Il resterait à examiner le cas où P serait positif et m né gatif, et celui où m et P seraient négatifs tous deux; l lecteur complétera facilement lui-même la démonstratio que nous venons de commencer.

En résumé, *pour multiplier un polynôme par un mo nôme, il suffit de multiplier chaque terme du polynôm par le monôme, en considérant chaque terme du poly nôme comme affecté du signe qui le précède, et en ayan soin d'appliquer la règle des signes.*

Proposons-nous maintenant de faire le produit des deux polynômes

$$P = a - b - c + d,$$
$$Q = m + n - p,$$

le résultat cherché sera

$$aQ - bQ - cQ + dQ;$$

ou, en remplaçant aQ, bQ, cQ, ... par leurs valeurs obtenues en appliquant la règle donnée précédemment,

$$am + an - ap - (bm + bn - bp) - (cm + cn - cp) + (dm + dn - dp).$$

Lorsque l'on aura effectué les additions et soustractions indiquées, on voit que le produit se composera : 1° du produit de chacun des termes de Q par le premier terme de P; 2° du produit changé de signe de chacun des termes de Q par le second terme de P, abstraction faite de son signe, ou, ce qui revient au même, du produit de chacun des termes de Q par le second terme de P, en tenant compte de la règle des signes; 3° etc.

Ainsi donc, *pour multiplier entre eux deux polynômes, il suffit de multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en tenant compte de la règle des signes, et d'ajouter les résultats ainsi obtenus.*

Considérons maintenant plusieurs polynômes P, Q, R, S, ... ; si nous voulons en faire le produit, il faudra d'abord multiplier P par Q, le résultat par R, et ainsi de suite. Or PQ est la somme algébrique des termes obtenus en prenant un terme dans P et dans Q de toutes les manières possibles, et en faisant leur produit; PQR sera la somme des termes obtenus en multipliant de toutes les manières possibles un terme de PQ par un terme de R, ou, ce qui revient au même, PQR sera la somme des produits

obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacu des polynômes PQR de toutes les manières possibles. E continuant ce raisonnement sur un plus grand nombre d polynômes, on arrive à cette conclusion, qui nous ser très-utile :

Le produit de plusieurs polynômes est la somme de produits obtenus en prenant de toutes les manières pos sibles pour facteurs un terme de chacun des polynôme en question.

IV. — SUR QUELQUES SIMPLIFICATIONS QUI SE PRÉSENTENT DANS LE CALCUL ALGÉBRIQUE.

Il peut arriver, en faisant une addition, une soustraction ou une multiplication, que certains termes du résulta soient semblables ; dans ce cas, le résultat se simplifie. En effet, considérons des termes tels que

$$2a^3b, \quad -3a^3b, \quad +5a^3b;$$

si ces termes entrent dans un même polynôme, on peut les écrire l'un à côté de l'autre, et l'on aura évidemment

$$2a^3b - 3a^3b + 5a^3b = (2 - 3 + 5)a^3b.$$

Car, en vertu de la règle donnée pour la multiplication des polynômes, le second membre de l'égalité précédente est égal au premier ; en sorte que les trois termes considérés se réduisent simplement à $4a^3b$. On conclut de là que :

Règle. — *Pour réduire des termes semblables en un seul, il suffit d'ajouter leurs coefficients en tenant compte des signes, le terme réduit demeurant semblable à ceux dont il dérive.*

Lorsque l'on multiplie entre eux deux monômes, il peut

arriver que ces monômes renferment une même lettre; dans ce cas, le résultat se simplifie. En effet, considérons le produit

$$2a^4bc^2 \times 4a^2b^3c^3d;$$

si l'on observe que, pour multiplier une quantité par un produit, il suffit de la multiplier successivement par chacun des facteurs de ce produit, le résultat cherché devient

$$2a^4 \times b \times c^2 \times 4 \times a^2 \times b^3 \times c^3 \times d,$$

ou, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$2 \times 4 \times a^4a^2bb^3c^2c^3d.$$

Mais ce produit ne changera pas si l'on remplace quelques facteurs par leur produit; si l'on remplace, par exemple, les coefficients 2 et 4 par leur produit 8; si l'on remplace enfin les facteurs, tels que a^4, a^2, par leur produit a^{4+2} ou a^6, qui indique que la lettre a a été prise quatre fois plus deux fois comme facteur; en sorte que le résultat final sera

$$8a^6b^4c^5d.$$

De là on déduit cette règle, appelée *règle de la multiplication des monômes :*

Règle. — *Lorsque deux monômes renferment certaines lettres en commun, pour les multiplier entre eux il suffit de faire le produit de leurs coefficients et d'écrire à la suite de ce produit les lettres communes affectées chacune d'un exposant égal à la somme des exposants dont cette lettre est affectée dans les deux facteurs, et les lettres non communes.*

Il va sans dire qu'une lettre qui n'a pas d'exposant est censée porter l'exposant 1, car l'exposant est le nombre qui indique combien de fois cette lettre est prise comme

facteur. On pourrait même ajouter qu'une lettre porta l'exposant zéro est égale à 1, car l'exposant zéro indiq que cette lettre n'entre pas comme facteur; en sorte qu' crire a^0 à la suite d'un produit, c'est n'y ajouter auc facteur ou le facteur 1, ainsi qu'on l'a fait observer (p. 17

En s'appuyant sur les règles que nous venons de démo trer, on arrive facilement aux formules suivantes :

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

ou

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

L'usage des parenthèses et des exposants placés en ha de ces parenthèses a déjà été enseigné en Arithmétique; est donc inutile de l'expliquer ici. Les formules que no venons d'écrire correspondent à des théorèmes qu'il fa se rappeler, et qui sont d'un usage continuel en analyse

Le carré de la somme ou de la différence de deux qua tités est égal à la somme des carrés de ces quantités, pl ou moins leur double produit.

Le produit d'une somme par une différence de deu termes est égal à la différence des carrés de ces terme

Voici encore quelques formules à retenir :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b^2 + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

et que l'on vérifiera sans peine.

V. — DIVISION ET FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

La plupart du temps, en Algèbre, la division ne pe que s'indiquer; ainsi il n'existe pas toujours un polynôm

quotient de deux autres dans lesquels les lettres conservent des valeurs indéterminées. Nous verrons plus loin à quels symptômes on reconnaît l'existence d'un polynôme quotient.

Quoi qu'il en soit, une division n'étant qu'indiquée, on pourra simplifier les écritures en supprimant des facteurs communs au dividende et au diviseur lorsqu'il y en aura (p. 14).

On appelle *fraction algébrique* le quotient non effectué de deux quantités algébriques; le dividende porte alors le nom de *numérateur*, le diviseur le nom de *dénominateur* de la fraction.

Théorème I. — *Étant données plusieurs fractions, on peut toujours les réduire au même dénominateur, c'est-à-dire trouver des fractions égales aux fractions données et ayant toutes le même dénominateur.*

En effet, il suffit pour cela de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres. Quelquefois l'opération est moins compliquée; ainsi les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{bd}$, $\frac{f}{dh}$ se réduisent au même dénominateur en multipliant les deux termes de la première par dh, ceux de la deuxième par h, ceux de la troisième par b.

Théorème II. — *Pour ajouter ou retrancher des fractions, il suffit de les réduire au même dénominateur et d'effectuer, comme en Arithmétique, les opérations sur les numérateurs.*

Considérons les fractions $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, ..., ayant toutes le dénominateur m; nous avons déjà vu que $\frac{a}{m}$ était égal à $a\times\frac{1}{m}$. On le vérifie du reste aisément en remarquant

que $\frac{a}{m}$ et $a \times \frac{1}{m}$ multipliés par m donnent tous deux a; o a donc

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \cdots = a \times \frac{1}{m} + b \times \frac{1}{m} - c \times \frac{1}{m} + \cdots,$$

ou bien, en considérant a, b, c, ... comme coefficients d termes semblables relativement au terme $\frac{1}{m}$,

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \cdots = (a + b - c + \ldots) \times \frac{1}{m} = \frac{a + b - c + \ldots}{m}$$

Cette égalité renferme le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Théorème III. — *Le produit de deux fractions est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs des fractions proposées.*

En effet, soit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$; une fraction ou quotient, comme on a vu (p. 13), est multiplié par un nombre quand on multiplie le dividende par ce nombre, de sorte que l'on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times \frac{c}{d}}{b},$$

et, pour la même raison,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{ac}{d}\right)}{b};$$

mais, pour diviser la fraction $\frac{ac}{d}$ par b, il suffit de multi-

plier par b son dénominateur; de sorte qu'on a finalement (p. 13)

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — S'il s'agissait de plusieurs facteurs, on aurait

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ace}{bdf}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh},$$

ce qui généralise le théorème.

Théorème IV. — *Le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

En effet, soit à diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, le quotient est évidemment

$$\frac{ad}{bc};$$

car, si l'on multiplie cette fraction par $\frac{c}{d}$, on a

$$\frac{adc}{bcd},$$

qui se réduit à $\frac{a}{b}$, en divisant ses deux termes par c et par d.

C. Q. F. D.

On donne quelquefois aux fractions le nom de *rapports* et à l'égalité de fractions le nom de *proportion;* les numérateurs portent alors le nom d'*antécédents;* les dénominateurs sont les *conséquents* de la proportion; enfin le premier numérateur et le dernier dénominateur portent le nom d'*extrêmes,* les deux autres termes portent le nom de *moyens.*

On appelle *quatrième proportionnelle* à trois quan-

tités a, b, c une quantité d qui fasse avec celles-ci l
proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

On appelle *moyenne proportionnelle* entre deux quantités a et b (ou encore *moyenne géométrique*) une quantité c telle, que l'on ait

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b};$$

en multipliant par b et par c les deux membres de cette égalité, on trouve

$$ab=c^2.$$

On a généralisé la définition précédente et l'on a appelé *moyenne géométrique* entre a, b, c, d, ... une quantité x telle, que

$$x^n=abcd\ldots,$$

n étant le nombre des facteurs a, b, c, ..., et l'on a réservé le nom de *moyenne arithmétique* à la quantité définie par l'égalité

$$nx=a+b+c+\ldots.$$

Lorsque l'on a

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b},$$

on dit quelquefois que b est une *troisième proportionnelle* à a et c.

THÉORÈME I. — *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; en d'autres termes, de l'égalité*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

on tire

$$ad = bc.$$

Pour cela, il suffit de multiplier par b et d les deux membres de l'égalité donnée.

THÉORÈME II. — *L'égalité*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

entraîne les suivantes :

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

En effet, la première se déduit de la proposée en divisant l'unité par les deux membres de la proposée; la seconde s'obtient en multipliant les deux membres de la proposée par b et en les divisant par c; enfin, la dernière s'obtient en multipliant les deux termes de la proposée par d et en les divisant par a.

Ces résultats peuvent s'énoncer ainsi : *Dans toute proportion,* 1° *on peut remplacer les antécédents par les conséquents, et* vice versâ; 2° *on peut alterner les moyens;* 3° *on peut alterner les extrêmes.*

THÉORÈME III. — *Les égalités*

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

entraînent la suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{ap + a'p' + a''p'' \ldots}{bp + b'p' + b''p'' \ldots},$$

$p, p', p'', \ldots$ *désignant des quantités quelconques.*

En effet, les égalités (1) peuvent s'écrire

$$\frac{ap}{bp} = \frac{a'p'}{b'p'} = \frac{a''p''}{b''p''} = \ldots;$$

en désignant par q la valeur commune de toutes ces fra tions égales, on a

$$ap = bp \times q, \quad a'p' = b'p' \times q, \quad a''p'' = b''p'' \times q, \quad \ldots;$$

d'où l'on déduit, en ajoutant membre à membre ces ég lités,

$$ap + a'p' + a''p'' + \ldots = (bp + b'p' + b''p'' + \ldots)q,$$

et, en divisant par $bp + b'p' + \ldots$ les deux membres (cette dernière formule,

q, c'est-à-dire $$\frac{a}{b} = \frac{ap + a'p' + a''p'' + \ldots}{bp + b'p' + b''p'' + \ldots}.$$ C. Q. F. D.

Corollaire. — De l'égalité

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

on déduit en particulier

$$\frac{a}{b} = \frac{a \pm a'}{b \pm b'} \quad \text{ou} \quad \frac{a \pm a'}{a} = \frac{b \pm b'}{b};$$

on en déduit aussi, en alternant d'abord les moyens,

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{a' \pm b'}{a'}, \quad \text{puis} \quad \frac{a \pm b}{a \mp b} = \frac{a' \pm b'}{a' \mp b'}, \quad \ldots.$$

Ces formules sont très-utiles et permettent souvent d simplifier considérablement les calculs.

NOTES ET EXERCICES.

1. Démontrer que l'on a

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2.$$

(LÉONARD DE PISE.)

2. Démontrer que l'on a

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) &= (aa' + bb' + cc' + dd')^2 \\ &+ (ab' - ba' - cd' + dc')^2 \\ &+ (ac' - ca' + bd' - db')^2 \\ &+ (ad' - da' - bc' + cb')^2.\end{aligned}$$

(EULER.)

3. On a

$$\begin{aligned}&(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ab' - ba')^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.\end{aligned}$$

4. On a plus généralement

$$\begin{aligned}&(cb' - bc')(cb'' - bc'') + (ac' - ca')(ac'' - ca'') \\ &\quad + (ba' - ab')(ba'' - ab'') \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'a'' + b'b'' + c'c'') \\ &\quad - (aa' + bb' + cc')(aa'' + bb'' + cc'').\end{aligned}$$

5. On a encore

$$\begin{aligned}&(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')^2 \\ &\quad + (da' - ad')^2 + (db' - bd')^2 + (dc' - cd')^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ &\quad - (aa' + bb' + cc' + dd')^2.\end{aligned}$$

6. **Les formules** précédentes sont d'un usage fréquent. En voici de [illegible] utiles :

$$\begin{aligned}&(1 + a + b + a^2 + ab + b^2)^2 \\ &= (1 + a)^2(a + b)^2 + (1 + b)^2(a + b)^2 + (1 + a + b - ab)^2.\end{aligned}$$

(CATALAN.)

On a aussi

$$(1+a+b+a^2+ab+b^2)^2$$
$$= a^2(a+b+1)^2 + b^2(a+b+1)^2 + (a+b+1)^2 + (a+b+ab)$$

(NEUBERG.)

7. *Note sur les inégalités.* — On peut toujours ajouter ou retrancher aux deux membres d'une inégalité une même quantité, mais on n'a pas toujours le droit de multiplier les deux membres par une même quantité; en effet, si cette quantité est négative, il est clair que l'on renverse le sens de l'inégalité.

On peut toujours ajouter des inégalités de même sens membre à membre, mais on ne peut pas les retrancher l'une de l'autre en général. Ces préceptes sont des affaires de bon sens, et il suffit de les énoncer.

8. Prouver que $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ac$,

$$abc \geqq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

9. On appelle *moyenne arithmétique* des n quantités $a, b, c, \ldots, l$ la quantité

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{n};$$

la quantité $\sqrt[n]{a+b+c+\ldots+l}$ est leur *moyenne géométrique*, la quantité $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{l}\right)$ est leur *moyenne harmonique*.

Cela posé, montrer que la *moyenne arithmétique*, la *moyenne géométrique* et la *moyenne harmonique* de plusieurs quantités sont comprises entre la plus grande et la plus petite d'entre elles.

10. En général, on appelle *moyenne* de plusieurs quantités une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite d'entre elles.

Ceci posé, prouver que, si $b, b', b'', \ldots$ sont des quantités positives

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots},$$

est une moyenne entre $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$

11. On a

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

12. On a

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=0.$$

13. On a

$$\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{b}{(c-a)(a-b)}+\frac{c}{(a-b)(b-c)}$$
$$=-\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right).$$

14. Prouver que x, y, z étant positifs

$$n(x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2)>(x+y+z+\ldots+t)^2,$$

n désignant le nombre des quantités $x, y, z, \ldots, t$. On a aussi

$$n^2(x^3+y^3+z^3+\ldots+t^3)>(x+y+z+\ldots+t)^3.$$

(Généraliser).

15. x, y, z étant plus grands que zéro, prouver que

$$(x+y+z)^3>3(y+z)(z+x)(x+y).$$

CHAPITRE III.

DES POLYNOMES ENTIERS.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *polynôme entier* en x un polynôme dont les différents termes sont les produits de quantités indépendantes de x par les puissances 0, 1, 2, ... de x :

$$1 + x - 3x^2 + 7x^5$$

est un polynôme entier en x.

Un polynôme peut être entier par rapport à plusieurs lettres a, b, c, x, ... Ces lettres sont alors les *variables* du polynôme.

Un polynôme entier s'appelle aussi une *fonction entière* de ses variables.

On dit qu'un polynôme est *ordonné* par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre lorsque les exposants de cette lettre y vont en croissant ou en décroissant depuis le premier terme jusqu'au dernier.

On appelle *degré* d'un terme par rapport à des lettres déterminées la somme des exposants dont ces lettres sont affectées dans ce terme; ainsi $3a^2b$ est du troisième degré par rapport à a et b, du deuxième degré par rapport à a seul, et du premier par rapport à b seul.

On appelle *degré* d'un polynôme le degré de celui de ses termes dans lequel la somme des exposants des lettres

par rapport auxquelles on compte le degré est la plus grande.

Un polynôme est dit *homogène* par rapport à plusieurs lettres lorsque tous ses termes sont de même degré.

Il est clair que la somme et la différence de deux polynômes homogènes de même degré sont des polynômes homogènes.

Le produit de deux polynômes homogènes est encore un polynôme homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des facteurs.

Cette remarque est d'une grande utilité dans le calcul et permet de vérifier à chaque instant les fautes que l'on peut faire en omettant des lettres ou des exposants : on a très-souvent l'occasion de calculer sur des polynômes homogènes ; il faut profiter de cette circonstance toutes les fois qu'on le peut et vérifier que les formules que l'on obtient par multiplication de polynômes homogènes restent homogènes.

Un polynôme du premier degré s'appelle aussi *fonction linéaire*.

II. — MULTIPLICATION DES POLYNOMES ENTIERS.

Toutes les fois que l'on peut ordonner un polynôme, il faut le faire ; la symétrie qui en résulte guide beaucoup dans les calculs, et surtout lorsqu'il s'agit de faire le produit de deux polynômes.

Considérons, par exemple, les deux polynômes ordonnés

$$P = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4,$$
$$Q = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3,$$

et cherchons leur produit ; nous suivrons la règle générale, mais nous écrirons sur une première ligne horizon-

tale le produit du polynôme P par le premier terme 2 de Q; nous obtiendrons ainsi un premier produit partiel ordonné; multiplions ensuite le polynôme P par le second terme $-3x$ de Q, nous obtiendrons un second produit partiel ordonné; nous l'écrirons au-dessous du premier, de telle sorte que les termes de même degré se correspondent dans une même colonne verticale, et ainsi de suite : la réduction des termes semblables porte alors sur les termes inscrits dans une même colonne verticale.

On dispose le calcul ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{l} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\ \quad\; 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 \end{array}$$

	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
2	+4	+6	+8	+10			
	−3	−6	−9	−12	−15		
		+4	+8	+12	+16	+20	
			−5	−10	−15	−20	−25

$$2 + x + 4x^2 + 2x^3 - 14x^5 - 25x^7,$$

en évitant de répéter la partie commune aux divers termes semblables.

La disposition de calcul que nous avons adoptée est surtout avantageuse lorsque les coefficients de la lettre ordonnatrice sont eux-mêmes des polynômes.

Remarque. — *Lorsque le multiplicande, le multiplicateur et le produit sont ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre, le premier et le dernier terme du produit sont égaux respectivement aux produits des premiers et des derniers termes des polynômes facteurs.*

En effet, supposons les polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x; les premiers termes des facteurs sont les termes de degré le plus élevé, leur produit est un terme du produit total, et il est bien

évident qu'il est de degré plus élevé que tout autre terme du produit total : par conséquent, il ne se réduira avec aucun d'eux et sera le premier terme du produit total. On verrait de même que le produit des derniers termes des facteurs est le dernier terme du produit total.

III. — PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES ENTIERS.

Deux polynômes entiers en x sont dits *identiques* quand ils sont égaux, quelle que soit la valeur attribuée à x. Si deux polynômes contiennent plusieurs variables, ils peuvent être identiques par rapport à certaines variables et ne pas l'être relativement à d'autres : ainsi deux polynômes en x et a peuvent être égaux pour $a = 1$ et $a = 2$, quel que soit x : ils sont alors dits *identiques par rapport à x quand $a = 1$ et quand $a = 2$.*

D'après la méthode que nous avons exposée au paragraphe précédent pour faire le produit de deux polynômes, on voit que ce produit est *identiquement* égal au multiplicande multiplié par le multiplicateur, c'est-à-dire *quel que soit x.*

Dorénavant nous dirons qu'un polynôme entier en x est la somme, la différence, le produit, le quotient de deux autres quand il sera effectivement la somme, la différence, le produit ou le quotient de ces deux polynômes *identiquement*, c'est-à-dire quelle que soit la valeur attribuée à x.

Ainsi on a, quel que soit x,

$$x - 1 \quad x - 1 = x^2 - 1;$$

alors $x^2 - 1$ est le produit de $x - 1$ par $x - 1$, $x - 1$ est le quotient de $x^2 - 1$ par $x - 1$, etc.

Mais $x^2 - 2x - 1$ n'est pas le produit de $x - 1$ par $x - 1$,

bien que pour $x = 0$, par exemple, on ait

$$(x+1)(x-1) = x^2 + 2x - 1,$$

parce que cette égalité n'a pas lieu quel que soit x : elle n'a pas lieu, en effet, pour $x = 1$.

Un polynôme A entier en x est *divisible* par un autre B quand ils ont un quotient entier en x. En d'autres termes :

Un polynôme entier A en x est divisible par un autre B quand il existe un polynôme Q tel, que l'on ait *identiquement*, c'est-à-dire quel que soit x,

$$A = BQ.$$

THÉORÈME I. — *$x^m - a^m$ est divisible par $x - a$.*

En effet, il est facile de constater que l'on a identiquement

$$(1)\quad x^m - a^m = (x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \ldots + a^{m-1})(x$$

Pour le vérifier, il suffit d'effectuer la multiplication indiquée dans le second membre de cette formule; les produits de $x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1}$ par x et par $-a$ sont

$$x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots + a^{m-1}x$$

et

$$-ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - \ldots - a^{m-1}x - a^m;$$

en les ajoutant et en observant que tous les termes se dé truisent deux à deux, à l'exception des termes extrêmes, on trouve bien $x^m - a^m$.

Cette proposition, à la forme de son énoncé près, était connue d'Archimède, c'est-à-dire bien longtemps avant l'invention de l'Algèbre; elle a des applications nombreuses, et la formule (1) est à retenir.

THÉORÈME II. — *Si un polynôme* P *entier en x en divise*

d'autres A, B, C, ..., *et si les quotients de* A, B, C,... *par* P *sont* A', B', C', ..., P *divisera aussi*

$$aA + bB + cC + \ldots,$$

a, b, c,... désignant des polynômes entiers en x ou des quantités indépendantes de x. Le quotient sera

$$aA' + bB' + cC' + \ldots.$$

C'est ce que l'on vérifie en multipliant ce dernier polynôme par P; on obtient en effet ainsi, quel que soit x,

$$aA'P + bB'P + cC'P + \ldots,$$

en observant que, A', B', C', ... étant les quotients de A, B, C,... par P, on a $A'P = A$, $B'P = B$,.... Cette expression devient précisément

$$aA + bB + cC + \ldots;$$

donc $aA' + bB' + \ldots$ est bien le quotient de $aA + bB + \ldots$ par P.

Théorème III. — *Si le polynôme* P *entier en x s'annule pour $x = a$, il est divisible par $x - a$, et, si m est le degré de* P, *on pourra toujours effectuer le quotient de* P *par $x - a$, de telle sorte que ce quotient soit de degré $m - 1$.*

En effet, soit

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$

A_0, A_1, ..., A_m désignant des quantités indépendantes de x. Puisque P est nul pour $x = a$, on aura

$$0 = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots + A_m a^m;$$

retranchant cette égalité de la précédente, on a

$$P = A_1(x - a) + A_2(x^2 - a^2) + \ldots + A_m(x^m - a^m);$$

$x-a$, x^2-a^2, ... sont divisibles par $x-a$ (théorème I) et les quotients sont 1, $x+a$, x^2+ax+a^2, ... Donc en vertu du théorème précédent, P sera divisible par $x-a$ et le quotient *pourra* se mettre sous la forme

$$A_1+A_2(x+a)+A_3(x^2+ax+a^2)+\ldots \\ +A_m(x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-1})$$

ou encore

$$\begin{aligned} & A_1+A_2a+A_3a^2+\ldots+A_ma^{m-1} \\ +&(A_2+A_3a+A_4a^2+\ldots+A_ma^{m-2})x \\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +&A_mx^{m-1}. \end{aligned}$$

Le quotient *pourra* donc bien se mettre, quel que soit x, sous la forme d'un polynôme de degré $m-1$. C. Q. F. D.

La démonstration précédente est de Lagrange (*Traité des équations numériques*, Note II).

THÉORÈME IV. — *Un polynôme en x du degré m ne peut s'annuler pour plus de m valeurs de x, à moins d'être identiquement nul.*

En effet, soit P un polynôme en x du degré m. Si ce polynôme s'annule pour $x=a_1$, nous venons de voir qu'il était divisible par $x-a_1$, et que l'on pouvait poser

$$P=Q_1(x-a_1),$$

Q_1 désignant ici un polynôme du degré $m-1$. Si l'on suppose alors que P s'annule encore pour $x=a_2$, il en sera de même de son égal $Q_1(x-a_1)$; mais, si a_2 est différent de a_1, $x-a_1$ ne sera pas nul pour $x=a_2$, et le produit $Q_1(x-a_1)$ ne pourra s'annuler que si $Q_1=0$. Q_1, s'annulant pour $x=a_2$, sera divisible par $x-a_2$, et l'on pourra poser

$$Q_1=Q_2(x-a_2),$$

Q_2 désignant ici un polynôme de degré $m - 2$. Supposons que P s'annule encore pour $x = a_3$, on démontrera, comme tout à l'heure, que Q_1 s'annule aussi pour $x = a_3$ et, en vertu de l'égalité précédente, que Q_2 s'annule également pour $x = a_3$. On pourra donc poser

$$Q_2 = Q_3(x - a_3),$$

Q_3 désignant un polynôme de degré $m - 3$. En continuant ainsi, on finira par obtenir une formule telle que

$$Q_{m-1} = Q_m(x - a_m),$$

dans laquelle Q_m désigne une quantité indépendante de x, ou, comme on dit quelquefois, du *degré zéro*.

Si l'on multiplie membre à membre toutes les égalites que nous venons d'écrire, on trouve

$$PQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{m-1} = Q_1Q_2\ldots Q_m(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m),$$

ou bien, en supprimant le facteur $Q_1Q_2\ldots Q_{m-1}$ aux deux membres de cette égalité,

$$P = Q_m(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m);$$

et il est bien clair que le polynôme P ne peut plus s'annuler pour aucune valeur de x différente de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, à moins que Q_m ne soit nul, auquel cas P serait constamment nul, quelle que soit la valeur attribuée à x, ce que l'on exprime en disant que P *est identiquement nul.*

Cette démonstration repose, comme on voit, sur ce que la quantité Q_m ne contient pas x, et, par conséquent, ne peut devenir nulle pour aucune valeur de x, à moins d'être toujours nulle.

THÉORÈME V. — *Un polynôme identiquement nul, ou, d'après le théorème précédent, un polynôme qui s'annule*

pour un nombre de valeurs de sa variable supérieur son degré, a ses coefficients nuls.

En effet, soit

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

le polynôme en question; ce polynôme, étant nul quel q soit x, sera nul pour $x = 0$. Or, si l'on y fait $x = 0$, polynôme se réduit à A_0; donc A_0 est nul. On a donc sin plement

$$P = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m.$$

Mais, P étant nul quel que soit x,

$$\frac{P}{x} = A_1 + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^{m-1}$$

sera encore nul pour toutes les valeurs de x, excep peut-être pour $x = 0$. Mais il est nul pour un nombre valeurs de x supérieur à son degré, qui est $m - 1$; do il est certainement nul pour $x = 0$. On en conclut q $A_1 = 0$, et ainsi de suite; donc enfin le polynôme P a to ses coefficients égaux à zéro. C. Q. F. D.

Théorème V. — *Lorsque deux polynômes* P, Q *entie en x sont égaux pour plus de m valeurs de x, m dés gnant le degré de celui de ces polynômes qui a le deg le plus élevé, ces polynômes sont identiquement égau c'est-à-dire qu'ils sont toujours égaux et que les coef cients des mêmes puissances de x sont égaux.*

En effet, soient

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$
$$Q = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n$$

les deux polynômes en question; le polynôme

$$P - Q = (A_0 - B_0) + (A_1 - B_1) x + (A_2 - B_2) x^2 + \ldots$$

est du degré m au plus. Or, P étant égal à Q pour plus de m valeurs de x, leur différence $P - Q$ s'annule pour plus de m valeurs de x, et l'on a

$$A_0 - B_0 = 0, \quad \ldots, \quad A_n - B_n = 0, \quad A_{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad A_m = 0,$$

ou

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \ldots, \quad A_n = B_n, \quad A_{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad A_m = 0,$$

ce qui revient à dire que les polynômes sont identiques et de même degré.

Remarque I. — Si les polynômes P et Q étaient égaux pour m valeurs de x et si l'on avait $A_m = B_m$, la différence $P - Q$ serait de degré $m - 1$, et l'on aurait encore $P - Q$ nul pour plus de $m - 1$ valeurs de x; donc

$$A_0 = B_0, \quad \ldots, \quad A_{m-1} = B_{m-1}.$$

IV. — COROLLAIRES.

Les corollaires que nous allons énoncer sont tellement importants, que nous avons voulu éveiller l'attention du lecteur en les plaçant dans un paragraphe spécial.

Corollaire I. — *L'addition, la soustraction, la multiplication et la division des polynômes (quand elle est possible) ne peuvent se faire que d'une seule manière, quand on veut le résultat sous forme de polynôme entier.*

Ainsi, par exemple, le produit de deux polynômes ne pourra pas se faire de deux manières différentes, car les résultats, devant être égaux quel que soit x, devront avoir leurs coefficients égaux.

Corollaire II. — *Deux polynômes entiers en $x, y, z, \ldots,$*

égaux entre eux quels que soient x, y, z, ..., ont tou leurs coefficients égaux.

En effet, ces deux polynômes peuvent s'écrire sous le formes

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$
$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_m x^m,$$

A_0, B_0, A_1, B_1,... désignant des polynômes en y, z,... Si nous donnons à y, z,... des valeurs fixes quelconques les deux polynômes devant être égaux quel que soit x, on aura

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \ldots, \quad A_m = B_m;$$

mais $A_i = B_i$ quels que soient y, z, ..., puisque les valeurs attribuées à y, z, ... sont quelconques. Si donc les polynômes donnés ne contiennent que x et y, A_i et B_i ne contiennent que la variable y, leurs coefficients sont égaux; ce qui veut dire que, dans les polynômes primitifs, les coefficients de $x^i y^j$ sont égaux quels que soient i et j.

Si les polynômes donnés contenaient encore z, on raisonnerait sur A_i et sur B_i comme on a raisonné sur les polynômes donnés, et l'on verrait que dans A_i et B_i les coefficients de $y^i z^k$ sont égaux; il en résulte que, dans les polynômes donnés, les coefficients de $x^i y^j z^k$ sont égaux, et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Corollaire III. — *Pour que le quotient de deux polynômes* $\frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0}$ *soit un nombre indépendant de x, il faut et il suffit que l'on ait $m = n$ et* $\frac{a_m}{b_m} = \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} = \ldots = \frac{a_0}{b_0}$.

En effet, en appelant q le quotient indépendant de x, on

doit avoir, quel que soit x,

$$\begin{aligned} a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 \\ = q(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0) \\ = b_n q x^n + b_{n-1} q x^{n-1} + \ldots + b_0 q; \end{aligned}$$

pour que cette formule ait lieu quel que soit x, il faut et il suffit que $a_0 = q b_0$, $a_1 = q b_1 = \ldots$; donc

$$q = \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \cdots \qquad \text{c. q. f. d.}$$

V. — DIVISION DES POLYNOMES ENTIERS.

Diviser un polynôme par un autre, c'est chercher un polynôme qui, multiplié par le second, reproduit identiquement le premier. La division n'est pas toujours possible, mais nous allons voir comment on peut l'effectuer quand elle est possible.

Proposons-nous tout d'abord de diviser deux monômes l'un par l'autre.

Si deux monômes renferment les mêmes lettres, leur quotient se simplifie en supprimant des facteurs communs au dividende et au diviseur; ainsi, par exemple, proposons-nous de diviser $8a^5b^4c^2d$ par $-3a^4b^3c^5d^2$; le quotient

$$-\frac{8a^5b^4c^2df^2}{3a^4b^3c^5d^2f^2}$$

peut s'écrire, en supprimant au dividende et au diviseur quatre fois le facteur a, trois fois le facteur b, deux fois le facteur c, une fois le facteur d, etc.,

$$-\frac{8ab}{3c^3d}.$$

D'une manière générale, *pour diviser un monôme par*

un monôme, il faut indiquer la division et supprim tous les facteurs communs apparents; si, par exempl une même lettre entre au dividende et au diviseur, el doit disparaître dans celui de ces deux termes où el entre avec le moindre exposant, et dans l'autre terme sc exposant doit diminuer d'autant d'unités qu'il y en ava dans l'exposant correspondant au premier terme.

Ceci posé, proposons-nous de diviser le polynôme

$$P = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - a^5$$

par le polynôme

$$Q = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Ces deux polynômes sont entiers en x; nous supposerons divisible par Q, nous appellerons V le quotient, et nou supposerons ce quotient entier et ordonné comme P et Q P sera le produit de V par Q; donc, en vertu d'une re marque faite (p. 38), le premier terme de P sera le produi du premier terme de V par le premier terme de Q, don le premier terme de V sera le quotient du premier term de P par le premier de Q ou $x^5 : x^3$, c'est-à-dire x^2 :

$$\begin{array}{l|l}
P = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = Q \\
\quad - x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 & x^2 - 2x + 1 \qquad = V \\
\hline
\qquad - 2x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 5x - 1 & \\
\qquad + 2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x & \\
\hline
\qquad\qquad + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & \\
\qquad\qquad - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Si alors du polynôme P on retranche le produit $x^2 \times$ Q (que nous avons écrit changé de signe immédiatemen au-dessous du polynôme P), le reste (qui se trouve inscri au-dessous du produit x^2Q changé de signe) ne contien-

dra plus que le produit des termes du premier degré et du terme indépendant de x dans V par le diviseur Q; en raisonnant sur ce reste comme sur le polynôme P, on est conduit à diviser son premier terme par x^3, et ainsi de suite. On déduit de là cette règle :

Règle. — *Pour diviser deux polynômes entiers et ordonnés de la même manière l'un par l'autre : 1° diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; le quotient ainsi trouvé est le premier terme du quotient total; 2° du dividende total retrancher le produit du diviseur par le premier terme du quotient; on obtient ainsi un premier reste sur lequel on opère comme sur le dividende total; on obtient alors le deuxième terme du quotient, et ainsi de suite.*

On abrége quelquefois les calculs. D'abord on peut remarquer qu'il est inutile d'écrire complétement les restes partiels; on peut se contenter d'abaisser le seul terme dont on va avoir besoin; enfin on peut éviter aussi d'écrire les produits du diviseur par chaque terme du quotient, et faire les soustractions de tête ainsi qu'il suit.

Je reprends l'exemple précédent; j'ai trouvé x^2 pour premier terme du quotient, je multiplie alors le diviseur par x^2, et je m'exprime ainsi : $+x^2$ par $+x^3$ donne $+x^5$, et, pour retrancher, $-x^5$; ce terme détruit le terme x^5 du dividende; $+x^2$ par $-3x^2$ donne $-3x^4$, et, pour retrancher, $+3x^4$; ce terme se réduit avec le terme $-5x^4$ du dividende et donne $-2x^4$, et ainsi de suite.

Nous avons supposé que le quotient était un polynôme entier en x; s'il n'en était pas ainsi, en suivant le procédé que nous venons d'indiquer, l'opération ne se terminerait pas; c'est-à-dire qu'en retranchant du dernier reste le produit du diviseur par le terme du quotient indépendant de x, au lieu de trouver zéro, on trouverait un polynôme

de degré inférieur au diviseur. En désignant par R polynôme, on aurait évidemment

$$P = VQ + R.$$

car P se compose identiquement de la somme des produi de chacun des termes de V par Q, augmentée de R.

De là on conclut évidemment que, si le polynôme n'est pas divisible par Q, la suite des calculs le montrer puisque l'on devra être conduit à l'opération qui co sisterait à diviser un terme du polynôme R par un tern de degré plus élevé que lui : le polynôme R auquel c est ainsi ramené porte le nom de *reste de la division* c P *par* Q.

Cette remarque nous permet de généraliser la définitio de la division des polynômes, et nous dirons que :

Diviser un polynôme P *par un polynôme* Q, *c'est de composer le polynôme dividende* P *en deux parties, dor l'une* VQ *soit le produit du diviseur* Q *par un poly nôme* V *appelé quotient, et dont l'autre partie soit u polynôme* R *de degré inférieur au diviseur.*

Il est facile de démontrer que la division ne peut s faire que d'une seule manière, et qu'il n'est pas possibl de trouver pour V et R des valeurs différentes de celle que l'on a trouvées par la méthode précédente. Supposons en effet, que l'on puisse trouver par des procédés diffé rents, R et R′ étant de degrés inférieurs à Q,

$$P = VQ + R \quad \text{et} \quad P = V'Q + R';$$

on en conclurait

$$VQ + R = V'Q + R'$$

ou

$$(V - V')Q = R' - R,$$

identité impossible, puisque $(V - V')Q$ est au moins de même degré que Q, tandis que $R' - R$ est de degré inférieur à Q, à moins que l'on n'ait $V - V' = 0$, et par suite $R = R'$.

Théorème. — *Le reste de la division d'un polynôme par $x - a$ est égal au résultat obtenu en remplaçant dans ce polynôme x par a.*

En effet, soit P un polynôme entier en x, divisons-le par $x - a$, soit Q le quotient, R le reste; on aura

$$P = Q(x - a) + R.$$

Cette formule ayant lieu quel que soit x, on peut y faire $x = a$; on a alors, en observant que $x - a$ est nul,

$$P = R.$$

Or, le reste R est de degré inférieur à $x - a$; il ne contient donc pas x, et, par suite, il est égal à P quand $x = a$; en d'autres termes, R est égal à la valeur que prend P pour $x = a$. C. Q. F. D.

Corollaire I. — Le reste de la division de $x^m - a^m$ par $x - a$ est $a^m - a^m$ ou zéro; $x^m - a^m$ est donc divisible par $x - a$, ce que l'on savait.

Corollaire II. — $x^m + a^m$ est divisible par $x + a$ quand m est impair, ce dont on s'assure en changeant a en $-a$.

Corollaire III. — $x^m - a^m$ est divisible par $x + a$ quand m est pair.

Corollaire IV. — Le reste de la division d'un polynôme par $x^2 + 1$ s'obtient en remplaçant x^2 par -1 dans ce polynôme, etc.

VI. — REMARQUES RELATIVES A LA THÉORIE DE LA DIVISION.

Première remarque. — Nous avons montré comment on pouvait trouver le quotient de deux polynômes, en l'ordonnant suivant les puissances décroissantes de la variable; mais il est clair qu'on aurait pu l'ordonner par rapport aux puissances croissantes. Ainsi, le terme de degré le moins élevé du quotient est égal au quotient du terme de degré le moins élevé du dividende par le terme du degré le moins élevé du diviseur, car le produit du diviseur par le quotient doit donner le dividende, et, d'après le théorème énoncé p. 38, le produit des termes du degré le moins élevé dans le quotient et le diviseur doit donner le terme de degré le moins élevé dans le dividende.

Supposons le premier terme du quotient trouvé. Si du dividende on retranche le produit du premier terme du quotient par le diviseur, le reste ne contiendra plus que le produit des autres termes du quotient par le diviseur; on trouvera alors le second terme du quotient comme on a trouvé le premier, en considérant le reste comme un nouveau dividende, et ainsi de suite.

Pour donner un exemple de cette manière de procéder, divisons $1 - x - 2x^2$ par $1 + x$:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\; x & -\; 2x^2 & 1 + x \\ \cline{4-4} & -\; 2x & -\; 2x^2 & 1 - 2x \\ & 0 & 0 & \end{array}.$$

Nous raisonnerons comme il suit : 1 divisé par 1 donne 1 au quotient; en multipliant le diviseur $1 + x$ par 1 et en le retranchant du dividende, on trouve $-2x - 2x^2$ qui, divisé par $1 + x$, donne le second terme du quotient $-2x$. Le quotient est donc $1 - 2x$.

Deuxième remarque. — Je suppose que l'on donne deux

polynômes U et V entiers en x, que nous appellerons *dividende* et *diviseur,* ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x; divisons le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; soit a le premier terme du quotient, qui pourra être de la forme $\frac{K}{x^\mu}$ ou Kx^μ, suivant que le degré m de U sera plus petit ou plus grand que le degré n de V; de U retranchons le produit aV, nous aurons un reste U′; divisons le premier terme de U′ par le premier terme de V; soit b le quotient; de U′ retranchons bV, soit U″ le reste, et ainsi de suite; nous aurons identiquement

$$U = aV + U', \quad U' = bV + U'', \quad \dots, \quad U^{\nu-1} = lV + U^{(\nu)},$$

et par suite

$$U = (a + b + \dots + l)V + U^{(\nu)}. \tag{1}$$

Maintenant, si l'on considère un polynôme contenant, outre des termes de la forme Kx^μ, où K est indépendant de x, des termes de la forme $\frac{K}{x^\mu}$, on pourra dire qu'un polynôme est de degré $-m$ s'il ne contient que des termes de la forme $\frac{K}{x^\mu}$ et si la moins forte puissance de $\frac{1}{x}$ est m.

Ceci posé, a est de degré $m-n$, b est de degré $m-n-1$, c de degré $m-n-2$, ... ; U′ est de degré $n-1$ au plus, U″ de degré $n-2$ au plus, ... Donc la formule (1) montre que, étant donnés deux polynômes U et V de degrés m et n, *il est toujours possible de décomposer* U *en deux parties dont l'une soit le produit de* V *par un certain polynôme* Q *de degré* $m-n$ *ayant* ν *termes de la forme* Kx^μ *ou* $\frac{K}{x^\mu}$, *et dont l'autre soit un polynôme de degré* $n-\nu$ *au plus.*

Troisième remarque. — Si l'on ordonne les polynômes U et V suivant les puissances croissantes de x, on pourra de U retrancher le produit de V par le quotient α du premier terme de U par le premier terme de V, ..., comme si l'on voulait diviser U par V, et continuer ainsi l'opération indéfiniment. On voit que l'on aura ainsi

$$U = QV + U_\nu.$$

Si, pour fixer les idées, nous supposons le premier terme de U de degré p, le premier terme de V de degré q, Q sera composé de ν termes et son dernier terme sera de degré $p + \nu$ au moins.

Exemples. — En divisant 1 par $1 - x$, on trouve

$$1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n) + x^{n+1}$$

si l'on ordonne le quotient par rapport aux puissances croissantes de x. Dans le cas contraire, on a

$$1 = (x - 1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n}\right) + \frac{1}{x^n}.$$

On conclut de ces deux formules

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ldots - \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^n(1 - x)}.$$

Ces formules sont souvent utiles.

VII. — MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

Dans un grand nombre de questions d'Algèbre, on a à chercher un polynôme de forme donnée, mais dans lequel certains coefficients sont inconnus; la connaissance des

propriétés du polynôme en question peuvent alors servir à déterminer ces coefficients. La méthode qui a pour but de trouver ainsi les coefficients d'un polynôme dont les propriétés sont connues porte le nom de *méthode des coefficients indéterminés* (il serait mieux de dire *à déterminer*). Cette méthode est une des plus fécondes que l'on connaisse; elle est d'ailleurs susceptible d'une grande extension; nous la devons à Descartes.

Pour faire connaître l'esprit de la méthode, nous l'appliquerons ici à un seul exemple, parce que nous aurons souvent l'occasion de l'employer dans la suite de cet Ouvrage. Proposons-nous de diviser x^4-8x^2+7x-1 par x^2-3x+1. Le quotient est un polynôme inconnu du second degré, le reste est du premier degré. On peut donc représenter le quotient par ax^2+bx+c et le reste par $px+q$; a, b, c, p, q sont alors des coefficients à déterminer ou *indéterminés*. Mais on sait que le dividende d'une division est égal au produit du diviseur par le quotient augmenté du reste; donc on doit avoir

$$x^4-8x^2+7x-1=(ax^2+bx+c)(x^2-3x+1)+px+q$$

identiquement; le second membre effectué donne

$$ax^4+(b-3a)x^3+(a-3b+c)x^2+(b-3c+p)x+c+q.$$

Comme il doit être identique au premier, les coefficients des mêmes puissances de x doivent être égaux; on doit donc avoir

$$1=a,\ 0=b-3a,\ -8=a-3b+c,\ 7=b-3c+p,\ -1=c+q.$$

De la première de ces formules on tire

$$a=1,$$

de la deuxième

$$0=b-3 \quad \text{ou} \quad b=3,$$

de la troisième

$$-8 = 1 - 9 + c \quad \text{ou} \quad c = 0,$$

de la quatrième

$$7 = 3 + p \quad \text{ou} \quad p = 4,$$

de la cinquième

$$-1 = q \quad \text{ou} \quad q = -1.$$

Le quotient cherché est donc

$$x^2 + 3x,$$

et le reste

$$4x - 1,$$

et il est clair que l'on pourrait employer la même méthode pour faire une division quelconque.

EXERCICES ET NOTES.

1. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ est divisible par $a + b + c$; former le quotient.

2. $a^m + b^m + c^m - (a + b + c)^m$ est divisible par

$$(a + b)(b + c)(a + c)$$

quand m est impair; former le quotient.

3. A quelle condition $x^m - 1$ est-il divisible par $x^n - 1$ (m doit être multiple de n)?

4. Tout polynôme entier en x et y qui change de signe sans changer de valeur absolue quand on change x en y et y en x est divisible par $x - y$.

5. Un polynôme entier en x et y qui ne change pas de valeur quand on change x en y et y en x et qui est divisible par $x - y$ l'est aussi par $x + y$.

6. Prouver que $x^m \sin\varphi - r^{m-1}x \sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi$ est divisible par $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$. (En partant de là, Gauss prouve que tout polynôme est décomposable en facteurs simples du premier et du second degré.)

Voici quelques exercices sur la méthode des coefficients indéterminés.

7. Démontrer la formule

$$\begin{aligned}(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots(1+a^nx)\\ = 1 + \frac{a^n-1}{a-1}ax + \frac{(a^{n-1}-1)(a^n-1)}{(a^2-1)(a-1)}a^{1+2}x^2 + \ldots\\ + \frac{(a^{n-i}-1)\ldots(a^{n-2}-1)(a^{n-1}-1)(a^n-1)}{(a^{i+1}-1)\ldots(a^3-1)(a^2-1)(a-1)}a^{1+2+\cdots+(i+1)}x^{i+1} + \ldots\\ + a^{1+2+3+\cdots+n}x^n.\end{aligned}$$

Pour faire la démonstration, on posera

$$(1+ax)(1+a^2x)\ldots(1+a^nx) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n = P_x;$$

on observera ensuite que $P_{ax} = P_x \dfrac{1+a^{n+1}x}{1+ax}$.

8. Conclure de là que $(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-i+1}-1)$ est divisible par $(x-1)(x^2-1)\ldots(x^i-1)$.

9. Développer, à l'aide d'un artifice analogue à celui de l'exercice 7, le produit

$$(1+ax)(1+a^3x)(1+a^5x)\ldots(1+a^{2n+1}x).$$

10. On a

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\left(1+x^{2^n}\right) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2^{n+1}-1}$$

11 Pour que

$$\frac{A + Bx + Cy + Dz}{A' + B'x + C'y + D'z}$$

conserve la même valeur quels que soient x, y, z, il faut et il suffit que

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}.$$

12. En général, pour que le rapport de deux polynômes entiers en

$x, y, z, \ldots$ ne dépende pas de $x, y, z, \ldots$, il faut et il suffit que ces polynômes aient leurs coefficients proportionnels.

13. On a

$$\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots$$
$$+(n-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+n=\frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^2.$$

14. Prouver que

$$(\cos\alpha+x\sin\alpha)^m-\cos m\alpha-x\sin m\alpha$$

est divisible par $1+x^2$. (Il est bien entendu que les exercices que nous proposons doivent être résolus avec le seul secours des matières exposées précédemment, et non à l'aide de celles qui sont exposées dans la suite.)

15. $(x+y)^m-x^m-y^m$ est divisible par x^2+xy+y^2 quand m est impair et ne contient pas 3 en facteur. (Cauchy.)

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES RADICAUX ARITHMÉTIQUES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *puissance* $n^{\text{ième}}$ de A, comme on sait, le produit de n facteurs égaux à A.

On appelle *racine* $n^{\text{ième}}$ de A un nombre qui, élevé à la puissance n, reproduit A; cette racine se désigne par le symbole suivant, appelé *radical*,

$$\sqrt[n]{A},$$

où n désigne ce que l'on appelle l'*indice* du radical.

Si le nombre A est positif et s'il n'existe pas de nombre entier ou fractionnaire dont la puissance $n^{\text{ième}}$ soit A; on appellera *racine* $n^{\text{ième}}$ *de* A la limite vers laquelle tendent les fractions croissantes dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est inférieure à A, ou décroissantes dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est supérieure à A.

D'après ces conventions, tout nombre positif aura une racine $n^{\text{ième}}$ positive, et une seule; de plus, il aura une racine négative égale et de signe contraire à sa racine positive si n est pair.

Les racines d'ordre pair des nombres négatifs n'existent pas; enfin les nombres négatifs ont une racine d'ordre impair négative.

Ces théorèmes sont trop faciles à démontrer pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter plus longtemps.

On effectue sur les radicaux des opérations qui ont beaucoup d'analogie avec celles que l'on effectue sur les fractions; nous allons les passer successivement en revue. Nous supposerons toujours les quantités placées sous les radicaux positives; enfin nous ne considérerons que la valeur positive des radicaux, en un mot leur *valeur arithmétique*.

II. — RÉDUCTION DES RADICAUX AU MÊME INDICE.

Théorème I. — *Lorsque l'on multiplie par un certain nombre l'indice d'un radical, on en extrait la racine dont l'indice est égal à ce nombre.*

Considérons le radical

$$\sqrt[m]{a}.$$

Multiplions son indice par n, il devient

$$\sqrt[mn]{a}.$$

Or, le produit de mn facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$ est égal à a; donc le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$ donne un nombre qui, pris m fois comme facteur, reproduit a : ce nombre est donc $\sqrt[m]{a}$. On a donc

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Théorème II. — *Lorsque l'on divise l'indice d'un radical par un de ses sous-multiples, il se trouve élevé à une puissance dont l'exposant est égal à ce sous-multiple.*

Théorème III. — *Lorsque l'on élève la quantité placée sous un radical à une certaine puissance, le radical se trouve élevé à cette puissance.*

En effet, considérons le radical

$$\sqrt[m]{a^n}.$$

Si l'on élève ce radical à la puissance m, on trouve a^n; tandis que $\sqrt[m]{a}$ élevé à la puissance m ne donne que a. Mais le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[m]{a}$ élevé à la puissance m donnera a; ainsi donc $(\sqrt[m]{a})^n$ et $\sqrt[m]{a^n}$ sont deux nombres (positifs par hypothèse) qui, élevés à la puissance m, deviennent égaux. Ce sont donc les racines $m^{\text{ièmes}}$ d'un même nombre; ce sont donc deux quantités égales; donc enfin

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE. — Il est bien entendu, comme nous l'avons dit en commençant cette théorie, qu'il ne s'agit ici que de nombres positifs; ainsi, il est bien clair que l'on n'a pas

$$\sqrt[2]{1^2} = (\sqrt[2]{1})^2$$

si l'on prend les radicaux négativement.

THÉORÈME IV. — *Lorsque l'on multiplie l'indice d'un radical par un certain nombre et que l'on élève la quantité placée sous le radical à une puissance dont l'exposant est marqué par ce nombre, le radical ne change pas de valeur.*

De là un moyen de comparer deux radicaux. Pour y parvenir, on les réduit au même indice en multipliant l'indice de chacun d'eux par l'indice de l'autre et en élevant la quantité placée sous chaque radical à une puissance dont l'exposant est égal à l'indice de l'autre radical.

S'agit-il, par exemple, de trouver le plus grand des deux nombres

$$\sqrt[5]{4}, \quad \sqrt[7]{6},$$

on réduira les radicaux au même indice, et l'on aura

$$\sqrt[35]{4^7},\quad \sqrt[35]{6^5}.$$

III. — MULTIPLICATION ET DIVISION DES RADICAUX.

Théorème I. — *On a*

$$\sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A.B}.$$

En effet, élevons le premier membre de cette égalité à la puissance m, il faudra faire le produit de m facteurs égaux à $\sqrt[m]{A}$ et de m facteurs égaux à $\sqrt[m]{B}$, on obtiendra ainsi AB; donc le premier membre de l'égalité est bien égal à la racine $m^{\text{ième}}$ de AB, c'est-à-dire au second.

Cette démonstration s'applique évidemment à un nombre quelconque de facteurs, et l'on en déduit, ce que nous savions déjà,

$$(\sqrt[m]{A})^n=\sqrt[m]{A^n}.$$

Théorème II. — *On a*

$$\sqrt[m]{A}:\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A:B}.$$

En effet, en multipliant $\sqrt[m]{A:B}$ par $\sqrt[m]{B}$, on trouve $\sqrt[m]{A}$.

Lorsque l'on veut faire le produit ou le quotient de deux radicaux qui n'ont pas le même indice, on commence par les réduire au même indice, après quoi l'opération n'offre plus la moindre difficulté.

Théorème III. — *Si l'on a une suite de rapports égaux*

$$(1)\qquad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots,$$

on a encore

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[n]{a^n+a'^n+a''^n+\ldots}}{\sqrt[n]{b^n+b'^n+b''^n+\ldots}}.$$

En effet, des formules (1) on tire

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a'^n}{b'^n} = \frac{a''^n}{b''^n} = \ldots,$$

et par suite (p. 32)

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}{b^n + b'^n + b''^n + \ldots},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}}{\sqrt[n]{b^n + b'^n + b''^n + \ldots}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV. — FORMULE DU BINOME.

La formule du binôme a pour but de faire connaître le développement de $(x+a)^n$ en polynôme ordonné suivant les puissances de x. Il est bien évident que $(x+a)^n$ est un polynôme en x du degré n; on peut donc poser

$$(1) \quad (x+a)^n = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_0,$$

A_n, $A_{n-1}, \ldots$, A_0 étant des coefficients indéterminés. Si dans cette formule on change x en z, il vient

$$(z+a)^n = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_0.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre ces deux égalités, on trouve

$$(x+a)^n - (z+a)^n$$
$$= A_n (x^n - z^n) + A_{n-1}(x^{n-1} - z^{n-1}) + \ldots + A_1 (x - z).$$

Or on a

$$(x+a) - (z+a) = x - z.$$

Divisant membre à membre ces deux égalités, on trouve (p. 40)

$$\begin{aligned}(x+a)^{n-1}&+(z+a)(x+a)^{n-2}+\ldots+(z+a)^{n-1}\\ &=A_n(x^{n-1}+zx^{n-2}+\ldots+z^{n-1})\\ &\quad+A_{n-1}(x^{n-2}+zx^{n-3}+\ldots+z^{n-2})+\ldots+A_1.\end{aligned}$$

Cette égalité a lieu en laissant x fixe pour toutes les valeurs possibles de z, excepté peut-être pour $z=x$, car nos calculs n'offrent aucun sens dans ce cas. Néanmoins comme les deux membres sont deux polynômes entiers en z, égaux pour plus de valeurs de z qu'il n'y a d'unités dans leurs degrés, ils sont égaux quel que soit z, et en particulier pour $z=x$. Si l'on fait alors $z=x$, on trouve

$$n(x+a)^{n-1}=nA_nx^{n-1}+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+\ldots+A_1.$$

Multiplions les deux membres de cette formule par $x+a$, nous trouvons

$$n(x+a)^n=nA_nx^n+[(n-1)A_{n-1}+naA_n]x^{n-1}+\ldots+A_1a$$

Or, en multipliant par n les deux membres de (1), on trouve

$$n(x+a)^n=nA_nx^n+nA_{n-1}x^{n-1}+\ldots+nA_0.$$

Or les deux développements que nous trouvons pour $n(x+a)^n$ doivent être identiques; on a donc (p. 44)

$$nA_n=nA_n,\quad nA_{n-1}=(n-1)A_{n-1}+naA_n,\quad \ldots,$$

ou

$$A_n=A_n,\quad A_{n-1}=\frac{n}{1}aA_n,\quad A_{n-2}=\frac{n-1}{2}aA_{n-1},\quad \ldots.$$

La loi suivant laquelle procèdent ces égalités est évidente, et, quand on connaîtra A_n, on calculera successive

t A_{n-1}, A_{n-2}, ..., et l'on aura

$$A_{n-1} = \frac{n}{1} a A_n, \quad A_{n-2} = \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 A_n,$$

$$A_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 A_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{n-\alpha} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha A_n.$$

i l'on substitue ces valeurs dans la formule (1), il vient

$$^{n} = A_n \Big[x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha} + \ldots + a^n \Big]$$

te formule devant avoir lieu quel que soit x, on peut poser $x = 0$: il vient alors

$$a^n = A_n a^n,$$

t-à-dire $A_n = 1$; d'où l'on conclut finalement

$$^{n} = x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha} + \ldots + a^n$$

le est la formule que nous voulions établir.

V. — PUISSANCE $n^{\text{ième}}$ D'UN POLYNOME.

Lorsque, dans un polynôme, tous les termes se forment près une même loi, c'est-à-dire en attribuant dans un ème terme et à une même lettre les valeurs entières ccessives m, $m+1$, $m+2$, ..., m', on le représente à ide d'une notation abrégée qui consiste à placer le

terme qui sert à former tous les autres après la lettre grecque $\sum$, au-dessus et au-dessous de laquelle on écrit m et m'; ainsi

$$\sum_{n=m}^{n=m'} a_n$$

représentera la quantité

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m'},$$

et on lira *somme* ou *sigma de* $n = m$ *jusqu'à* $n = m'$ *de* a_n. La formule du binôme, en faisant usage de la notation en question, pourra s'écrire

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

On se sert aussi de la notation abrégée

$$\prod_{n=m}^{n=m'} a_n$$

pour désigner le produit $a_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m'}$; de sorte que la formule du binôme peut encore s'écrire

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=\alpha} \frac{n-\mu+1}{\mu} a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

Proposons-nous actuellement de trouver le développement de $(a+b+c+\ldots)^n$; dans la formule du binôme, le terme général

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha}$$

peut s'écrire, en multipliant et en divisant par $1.2.3\ldots(n-\alpha)$,

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)}a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

Si alors nous changeons x en $x+b$, ce terme deviendra

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)}a^\alpha(x+b)^{n-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=n}\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)}$$
$$\times\frac{1.2.3\ldots(n-\alpha)}{1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots(n-\alpha-\beta)}a^\alpha b^\beta x^{n-\alpha-\beta}.$$

En convenant de remplacer $1.2.3\ldots\beta$ par 1 quand on fait $\beta=0$, cette formule peut encore s'écrire

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=n}\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots(n-\alpha-\beta)}a^\alpha b^\beta x^{n-\alpha-\beta},$$

et la quantité écrite sous le signe $\sum$ représente le terme général du développement de $(a+b+x)^n$; si nous changeons alors x en $x+c$, et ainsi de suite, il est facile de voir que l'on arrive à la formule générale

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&(a+b+c+\ldots+l)^n\\&=\sum\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots\gamma\ldots1.2.3\ldots\lambda}a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots l^\lambda,\end{aligned}\right.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de α, β, γ, ..., λ, telles que $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=n$, en convenant toujours de remplacer $1.2.3\ldots m$ par 1 toutes les fois que l'on a $m=0$.

VI. — RACINES DES POLYNOMES.

On dit qu'un polynôme entier par rapport à x

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

est *une puissance* $m^{\text{ième}}$ *parfaite*, lorsqu'il existe un polynôme

$$Q = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \ldots + b_0$$

entier qui, élevé à la puissance m, reproduit P, quel que soit x.

Proposons-nous de reconnaître si un polynôme est une puissance $m^{\text{ième}}$ parfaite, et dans ce cas cherchons sa racine. Considérons le polynôme

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0;$$

si sa racine $m^{\text{ième}}$ existe, désignons-la par

$$Q = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \ldots + b_0.$$

Appliquons au polynôme Q la formule que nous avons démontrée au paragraphe précédent, nous aurons

$$Q^m = b_i^m x^{mi} + \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1)} b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} + \ldots$$

ou bien

$$Q^m = b_i^m x^{mi} + m b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} + \ldots .$$

En identifiant les polynômes P et Q^m, on trouve

$$b_i^m x^{mi} = a_n x^n,$$

$$m b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} = a_{n-1} x^{n-1}.$$

De la première de ces formules on conclut que :

1° $mi = n$ ou $i = \frac{n}{m}$: donc n doit être divisible par m; supposons qu'il en soit ainsi;

2° b_i est la racine $m^{\text{ième}}$ de a_n.

De la seconde formule on tire

$$b_{i-1} = \frac{1}{m}\frac{a_{n-1}}{b_i^{m-1}} = \frac{1}{m}\frac{a_{n-1}}{b_i^m} b_i$$

ou

$$b_{i-1} = \frac{1}{m}\frac{a_{n-1}}{a_n} b_i.$$

Supposons que l'on ait calculé b_i et b_{i-1}; du polynôme P on retranchera $(b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1})^m$; le reste sera composé comme il suit :

$$m(b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1})^{m-1}(b_{i-2} x^{i-2} + \ldots + b_0) + \ldots.$$

Or, dans cette expression, le terme du degré le plus élevé est

$$m b_i^m b_{i-2} x^{mi-2};$$

en l'égalant au terme du degré le plus élevé dans le résultat trouvé directement et que nous désignerons par c, on trouve

$$b_{i-2} = \frac{c}{m b_i^m b_{i-2}}.$$

Connaissant b_{i-2}, on retranchera du polynôme P la quantité

$$(b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + b_{i-2} x^{i-2})^m,$$

et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on tombe sur un reste nul ou sur une soustraction impossible à effectuer.

VII. — CAS DE LA RACINE CARRÉE.

Le cas de la racine carrée étant le plus simple, nous nous y arrêterons un instant, et d'abord nous ferons obser-

ver que l'on a

$$(a+b+c+\ldots+l)^2$$
$$= a^2+2ab+2ac+\ldots+b^2+2bc+\ldots+c^2+\ldots+l^2.$$

Cette formule s'obtient en faisant $n=2$ dans la formule (1) (p. 67) ou bien encore directement, en observant que

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b+c)^2 = a^2+2(b+c)a+(b+c)^2$$
$$= a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le carré d'un polynôme se compose donc, comme on voit, de la somme des carrés de ses termes et de leurs doubles produits.

Ceci posé, proposons-nous d'extraire la racine carrée du polynôme

$$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0.$$

Si nous désignons par

$$Q = b_i x^i + b_{i-1}x^{i-1}+\ldots+b_0$$

la racine, nous trouverons, comme tout à l'heure,

$$b_i = \sqrt{a_n},\quad b_{i-1} = \frac{1}{2}\,\frac{a_{n-1}}{b_i}.$$

Nous retrancherons de P la quantité $(b_i x^i + b_{i-1}x^{i-1})^2$; nous obtiendrons enfin b_{i-2} comme tout à l'heure; mais, au lieu de retrancher de P le carré de

$$b_i x^i + b_{i-1}x^{i-1} + b_{i-2}x^{i-2},$$

nous nous contenterons de retrancher du premier reste que nous avons obtenu la quantité

$$2b_{i-2}x^{i-2}(b_i x^i + b_{i-1}x^{i-1}) + b_{i-2}^2(x^{i-2})^2,$$

et ainsi de suite. Une simplification analogue pourrait sans doute être apportée dans le calcul de la racine $m^{\text{ième}}$, mais les calculs exigeraient une grande attention de la part de celui qui se livrerait à ce genre de spéculations.

VIII. — REMARQUES.

Nous avons supposé que les polynômes dont nous cherchions les racines étaient ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre; l'hypothèse contraire aurait pu être adoptée; elle conduit à cette conclusion :

L'exposant du terme du degré le moins élevé d'une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte doit être zéro, n ou un multiple de n.

Il est souvent avantageux de modifier la marche que nous avons suivie ainsi qu'il suit :

On développe l'expression Q^n par la formule de la page 67; on identifie ensuite le polynôme P avec le développement de Q^n. On a ainsi des égalités qui permettent, à l'aide de procédés que nous étudierons plus loin, de déterminer $b_0, b_1, \ldots, b_i$.

Application. — *Trouver la condition pour que*

$$ax^2 + bx + c = P$$

soit un carré parfait.

L'expression précédente ne peut être que le carré d'un polynôme du premier degré. Posons alors

$$ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$$

ou bien

$$ax^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mnx + n^2;$$

on en déduit

$$a = m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2.$$

De ces formules on tire sans difficulté

$$b^2 = 4ac.$$

Cette relation est donc nécessaire pour que le polynôme P soit un carré parfait : elle est suffisante. En effet, alors on a

$$P = ax^2 + 2\sqrt{ac}\,x + c$$

ou

$$P = (\sqrt{a})^2 x^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{c}\,x + (\sqrt{c})^2$$

ou

$$P = (\sqrt{a}\,x + \sqrt{c})^2.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Si l'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots,$$

chacun de ces rapports sera égal à l'un quelconque des suivants

$$\frac{\sqrt[n]{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}}{\sqrt[n]{b^n + b'^n + b''^n + \ldots}}, \quad \frac{\sqrt{aa'}}{\sqrt{bb'}}, \quad \frac{\sqrt[3]{aa'a''}}{\sqrt[3]{bb'b''}}, \quad \ldots.$$

2. Si l'on a

$$\frac{b_1}{B_1} = \frac{b_2}{B_2} = \frac{b_3}{B_3} = \ldots,$$

on aura

$$\sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \sqrt{B_3 b_3} + \ldots$$
$$= \sqrt{(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots)(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)}.$$

Déduire de là la mesure du tronc de pyramide en le décomposant en troncs triangulaires.

3. Désignons par $2a_{ij} = 2a_{ji}$ le coefficient de $x_i x_j$ dans un polynôme du second degré P; ce polynôme pourra s'écrire

$$P = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

insi. pour le cas de deux variables,

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2).$$

démontrer que, pour que le polynôme P soit un carré parfait, il faut que, quels que soient i et j, on ait

$$a_{ij}^2 = a_{ii} a_{jj}.$$

Mais cette condition n'est pas suffisante, il faut y adjoindre certaines inégalités ; ainsi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy$$

n'est pas un carré.

4. Prouver que l'on a

$$\begin{aligned} -(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy) \\ = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ \times (\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}). \end{aligned}$$

5. Trouver la condition pour que $x^3 + px^2 + qx + r$ soit un cube parfait.

6. Prouver que l'on a

$$\begin{aligned} &(a + b + c + \ldots + l)^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + \ldots + l^3 + 3(a^2 b + a^2 c + \ldots + b^2 a + b^2 c + \ldots + k^2 l) \\ &+ 6(abc + abd + bdc + \ldots). \end{aligned}$$

7. Appliquer la méthode des coefficients indéterminés à l'extraction de la racine carrée d'un polynôme, par exemple

$$x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64.$$

8. Démontrer que tout polynôme P de degré pair $2m$ est de la forme

$$P = H^2 + K,$$

H désignant un polynôme de degré m et K un polynôme de degré $m - 1$ au plus. (Généraliser.)

9. Trouver la condition pour que $x^3 + px^2 + qx + r$ soit divisible par un carré.

10. Trouver la condition qui doit exister entre les coefficients p, q, r pour que $x^6+px^4+qx^2+r$ soit un carré parfait.

11. Montrer comment, en suivant un procédé analogue à celui que l'on suit pour extraire la racine carrée d'un nombre, on pourrait extraire la racine cinquième d'un nombre donné.

12. Trouver les relations qui doivent exister entre p, q, r, s pour que

$$x^4+4px^3+6qx^2+4px+s$$

soit un carré parfait. (On traitera cette question soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit en exprimant que le reste provenant de l'extraction de la racine carrée est nul.)

13. Soient a, b, c, ..., A, B, C, ..., A′, B′, C′, ..., P, Q, ... des nombres rationnels, et $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, ... des irrationnelles ; prouver que la fraction

$$\frac{A+B\sqrt{a}+C\sqrt{b}+\ldots}{A'+B'\sqrt{a}+C'\sqrt{b}+\ldots}$$

peut se ramener à la forme

$$P+Q\sqrt{a}+R\sqrt{b}+\ldots,$$

quand $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, ... sont rationnels.

14. Prouver que, si α est moindre $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, on a

$$\sqrt{1+\alpha}=1+\frac{\alpha}{2}\pm x,$$

x désignant une quantité moindre que $\frac{\alpha^2}{4}$. Si α est positif, on aura $x<\frac{\alpha^2}{8}$.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

I. — PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Lorsque, dans une égalité, les deux membres sont égaux, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, cette égalité porte le nom d'*identité;* telles sont, par exemple, les égalités

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$
$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

Lorsque, au contraire, l'égalité n'a lieu que pour certaines valeurs des lettres qu'il s'agit de déterminer, elle porte le nom d'*équation;* les valeurs positives ou négatives des lettres qui rendent les deux membres réellement égaux portent le nom de *racines* de l'équation. Quoi qu'il en soit, on confond souvent dans le langage les mots *égalité, équation;* au fond, cela n'a pas grand inconvénient.

Théorème I. — *On ne change pas les racines d'une équation en ajoutant une même quantité aux deux membres.*

En effet, considérons l'équation

$$(1) \qquad A = B.$$

Soient $x, y, z, \ldots$ les inconnues, ou, si l'on veut, les lettres dont on doit déterminer les valeurs pour rendre A réellement égal à B; il est bien évident que les systèmes

de valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent A égal à B, rendront encore $A + m$ égal à $B + m$; que réciproquement les systèmes de valeurs qui rendent $A + m$ égal à $B + m$; rendront encore A égal à B : en d'autres termes, l'équation considérée a mêmes racines que

$$(2) \qquad A + m = B + m.$$

Cette règle comporte une exception : si la quantité m cessait d'être définie algébriquement pour des valeurs de x, $y, z, \ldots$ qui rendent A égal à B, l'équation (2) pourrait ne plus admettre les racines de l'équation (1).

Corollaire. — Le signe de m ayant été supposé quelconque, on peut dire que l'on ne change pas les racines d'une équation en retranchant une même quantité aux deux membres.

Théorème II. — *On n'altère pas les racines d'une équation en multipliant ses deux membres par une même quantité ne contenant pas les inconnues.*

En effet, considérons l'équation

$$A = B;$$

si l'on multiplie par m les deux membres de cette équation, il est bien clair que, si pour un système quelconque de valeurs des inconnues on a $A = B$, on aura encore $Am = Bm$; et réciproquement, si l'on a $Am = Bm$, on aura pour les mêmes valeurs des inconnues $A = B$. Il y a cependant un cas d'exception : si, en effet, A était différent de B, on pourrait avoir Am égal à Bm si m pouvait passer par zéro; or il n'y aura rien à craindre à cet égard si m ne contient pas les inconnues et si l'on ne choisit pas le facteur m égal à zéro, ce qui n'aurait aucun but raisonnable.

Nous allons montrer sur un exemple que, en multipliant par un même facteur les deux membres d'une équation, on peut introduire de nouvelles racines. L'équation

$$x = 1$$

admet évidemment la racine 1 et la racine 1 seulement. En multipliant par $x - 2$ les deux membres, on a

$$(x-2)x = x-2,$$

et il est facile de voir que la nouvelle équation admet la racine $x = 2$; cela tient à ce que le facteur $x - 2$ passe par zéro pour $x = 2$. En général, *quand on multiplie par m les deux membres d'une équation, on introduit dans cette équation les solutions de l'équation $m = 0$.*

En effet, les systèmes de valeurs des inconnues x, y, z, ..., qui rendent Am égal à Bm, rendront A égal à B ou m égal à zéro; donc ils appartiennent à l'une des deux équations

$$A = B, \quad m = 0.$$

Si cependant, en supposant $m = 0$, A et B cessaient d'être algébriquement définis, il est clair que $Am = Bm$ n'entraînerait pas $m = 0$, car on ne pourrait pas dire que Am et Bm sont nuls si A et B n'existaient pas. Pour me faire comprendre, je choisis un exemple : l'équation

$$\frac{1}{x} = 1$$

admet la racine $x = 1$ et n'admet évidemment que celle-là, puisque pour $x \gtrless 1$ on a $\frac{1}{x} \lessgtr 1$. Multiplions par x les deux membres de cette équation, nous n'introduisons pas pour cela la racine $x = 0$, parce que $\frac{1}{x}$ n'existe plus, en un mot n'est plus défini en supposant le diviseur x égal à

zéro, et effectivement l'équation en question devient

$$1 = x$$

quand on multiplie par x ses deux membres.

De même l'équation $A = B$ pourrait être satisfaite pour certaines valeurs de $x, y, z, \ldots$, sans que

$$Am = Bm$$

le fût pour les mêmes valeurs de $x, y, \ldots$, car m pourrait n'être plus défini pour les valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent A égal à B.

En résumé, quand on multiplie les deux membres d'une équation par une même quantité, on ne change pas les racines si cette quantité est indépendante des inconnues; si, au contraire, le multiplicateur en question contient les inconnues, il peut se faire que l'on change les racines, que l'on en introduise de nouvelles, ou enfin que l'on en supprime.

Théorème III. — *On peut diviser par une même quantité les deux membres d'une équation sans changer les racines, pourvu que cette quantité ne contienne pas les inconnues.*

Ce théorème, au fond, revient au précédent et donne lieu aux mêmes remarques, si l'on observe que multiplier par $\frac{1}{m}$ et diviser par m sont deux opérations équivalentes.

Théorème IV. — *Lorsque deux équations admettent les mêmes racines, l'équation que l'on obtient en les ajoutant ou en les retranchant membre à membre peut remplacer l'une quelconque d'entre elles.*

En effet, considérons les deux équations en $x, y, z, \ldots$

$$(1) \qquad A = B,$$
$$(2) \qquad C = D;$$

les systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent à la fois A égal à B et C égal à D, rendent A + C égal à B + D, et réciproquement les systèmes qui satisfont à l'équation

$$(3) \qquad A + C = B + D$$

et à l'une quelconque des équations (1) ou (2) satisfont à l'autre.

Remarques. — On peut évidemment aussi remplacer un système de n équations par $n - 1$ d'entre elles, et celle que l'on obtient par l'addition des autres effectuée membre à membre; il est bien évident aussi que la différence effectuée membre à membre de deux équations peut remplacer l'une quelconque d'entre elles, etc.

Les transformations que nous venons d'indiquer suffisent à l'objet que nous avons présentement en vue; l'usage en fera connaître d'autres, soumises, en général, aux mêmes restrictions que celles dont nous venons de parler.

II — USAGE DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS.

Résoudre une équation ou un système d'équations, c'est chercher leurs racines.

Lorsqu'une équation est de la forme

$$P = Q,$$

P et Q désignant des polynômes entiers de degré m par rapport aux inconnues, on dit qu'elle est *du degré m*. Lorsque l'un des polynômes P, Q est de degré inférieur à m, l'autre restant du degré m, on dit encore que l'équation est du degré m.

Pour résoudre une équation ou un système d'équations,

on commence, en général, par effectuer les opérations indiquées : on ramène de cette façon les deux membres à être aussi simples que possible; on chasse ensuite les dénominateurs, ce qui se fait en multipliant les deux membres de chaque équation par le produit des dénominateurs qui entrent dans ses deux membres.

Il peut se faire ainsi que l'on altère les racines : il faudra discuter les résultats, afin d'étudier l'effet produit sur le système que l'on cherche à résoudre. On fait ensuite passer les termes qui contiennent les inconnues dans un même membre et les termes indépendants des inconnues dans l'autre; on fait passer un terme d'un membre d'une opération dans un autre en changeant son signe. Cette opération revient, en effet, à retrancher aux deux membres de l'équation une même quantité égale au terme en question; enfin, s'il y a lieu, on réduit les termes semblables.

La règle que nous venons de donner est une règle générale et qui, bien entendu, n'a rien d'absolu. Nous avons dit que pour chasser les dénominateurs d'une équation il fallait multiplier les deux membres par le produit des dénominateurs; il suffit d'en multiplier les deux membres par le plus petit multiple des dénominateurs, dans lesquels chaque lettre sera considérée comme représentant un facteur premier.

Quelquefois on conserve à dessein dans une équation certains dénominateurs, mais on peut en faire disparaître d'autres. Pour faire disparaître un dénominateur, il suffit évidemment de multiplier les deux membres de l'équation par ce dénominateur, ce qui se fait en multipliant par le dénominateur en question tous les termes qui ne le contiennent pas et en l'effaçant dans les termes qui le contiennent.

Pour donner une application des principes précédents,

nous nous proposerons de résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1} + 3x = 4(x-1) - \frac{6x-7}{6}.$$

Chassons les dénominateurs en multipliant par 6 et par $x+1$, il vient

$$6x + 18x(x+1) = 24(x-1)(x+1) - (6x-7)(x+1).$$

En multipliant par $x+1$, nous avons pu introduire la solution $x=-1$ de l'équation

$$x+1=0.$$

Mais pour $x=-1$ le premier membre de l'équation proposée n'est plus défini, car il contient le terme $\frac{x}{x+1}$ ou $\frac{-1}{0}$; en sorte qu'il peut se faire que nous n'ayons pas introduit de nouvelle solution : la suite nous l'apprendra.

Si nous effectuons les produits indiqués, il vient

$$6x - 18x^2 + 18x = 24x^2 - 24 - 6x^2 + x + 7;$$

réduisons les termes semblables, nous aurons

$$18x^2 + 24x = 18x^2 + x - 17.$$

Si nous faisons passer dans le premier membre les termes qui contiennent l'inconnue, il vient

$$23x = -17,$$

et en divisant par 23 les deux membres, on a

$$x = -\frac{17}{23};$$

nous ne retrouvons pas la solution $x = -1$; on en conclut que $x = -\frac{17}{23}$ satisfait seul à l'équation proposée, ce que l'on peut du reste vérifier directement.

Nous allons voir maintenant comment on simplifie, à l'aide d'artifices de calcul, la règle générale que nous avons donnée. Proposons-nous de résoudre l'équation

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+7}{x+3}.$$

S'il y a égalité entre les deux membres de cette équation pour une certaine valeur de x, nous pourrons de chaque numérateur retrancher son dénominateur, diviser les numérateurs par les résultats, et il y aura encore égalité pour la même valeur de x (*voir* p. 32). Il vient ainsi

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+7}{4};$$

et, en multipliant par 4 les deux membres de cette égalité,

$$2x + 2 = x + 7.$$

Faisons passer les termes en x dans le premier membre, les termes connus dans le second, il vient

$$2x - x = 7 - 2 \quad \text{ou} \quad x = 5,$$

ce qu'il est facile de vérifier.

III. — DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Toute équation du premier degré à une inconnue peut être ramenée à la forme

$$(1) \qquad Ax = B,$$

A et B étant deux quantités indépendantes de x; pour cela il suffit de faire passer dans le premier membre les termes qui contiennent l'inconnue, et dans le second ceux qui ne la contiennent pas.

On résout immédiatement l'équation (1) en divisant les deux membres par A, ce qui donne

$$x = \frac{B}{A},$$

et l'équation (1) n'a pas d'autre solution.

On peut donc dire que *toute équation du premier degré à une inconnue a toujours une solution et une seule.*

Si B était égal à zéro, il est clair que l'on aurait $x = 0$. Quelques auteurs examinent le cas où $A = 0$, mais alors, dans l'équation, x n'existe plus, l'équation n'est plus du premier degré; elle se réduit à une égalité absurde $0 = B$, ou à une identité si l'on a $B = 0$. On peut être conduit à de semblables résultats en cherchant à résoudre certaines équations absurdes ou certaines identités que l'on pose comme équations.

Par exemple, quel que soit x, nous avons vu que l'on avait

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

si l'on regarde actuellement cette identité comme une équation, on trouve

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

ou, faisant passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second,

$$0 \times x^2 + 0 \times x = 0,$$

ce qui est une identité. Cela tient à ce que l'on est parti

d'une identité, ou, si l'on veut, d'une équation satisfaite quel que soit x; si, au contraire, on avait posé

$$(2) \qquad (x+1)^2 = x^2 + 2x,$$

on aurait trouvé

$$0 \times x^2 + 0 \times x = -1,$$

résultat absurde et qui prouve que l'équation (2) n'a pas de racines. Et, en effet, comme $(x+1)^2$ est égal à x^2+2x+1, il est impossible qu'il soit égal à x^2+2x, c'est-à-dire au même nombre diminué de 1.

Si l'on écarte donc le cas où $A=0$, c'est-à-dire où la formule (1) n'est pas une équation, on peut dire que *toute équation du premier degré à une inconnue admet une racine et une seule* (¹).

IV. — DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

Une seule équation à plusieurs inconnues suffit très rarement à la détermination de ces inconnues. En effet, si l'on donne à toutes les inconnues, sauf une, des valeurs arbitraires, on peut en général résoudre, par rapport à l'inconnue restante, l'équation en question, ce qui montre que l'on peut ainsi trouver autant de solutions que l'on veut.

Bien qu'il n'en soit pas toujours ainsi, nous verrons qu'un système de n équations du premier degré à n inconnues admet ordinairement une solution et une seule.

(¹) Pour donner un sens à cette discussion il faut considérer A comme la limite d'un coefficient variable qui tend vers 0, et l'on voit alors, en se reportant à la formule $x = \frac{B}{A}$, que les valeurs de x deviennent de plus en plus grandes au fur et à mesure que A devient plus petit; de sorte qu'à la limite, quand A devient nul, x a pris une valeur limite dépassant tout nombre donné; elle est devenue *infinie*. Avec cette convention l'énoncé ne comportera pas de restriction.

Toutes les fois qu'il n'en admet pas, on dit que le système est *incompatible ;* toutes les fois qu'il en admet plus d'une, on dit qu'il est *indéterminé.*

Puisqu'un système de n équations à n inconnues admet ordinairement une solution, un système de $n-1$ équations, ou moins, à n inconnues, doit être insuffisant, puisque l'on peut choisir au moins une inconnue arbitrairement, et qu'il reste alors assez d'équations pour trouver les valeurs des inconnues restantes.

De même, un système de $n+1$ équations, ou plus, à n inconnues, ne peut pas en général être résolu, car, n quelconques d'entre elles admettant une solution et une seule, cette solution ne conviendra pas toujours à un autre système formé de n des équations données.

Lorsqu'un système d'équations du premier degré admet deux solutions, il en admet un nombre illimité, et c'est ce qui fait dire qu'il est indéterminé.

En effet, considérons le système

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1z + \ldots = k_1, \\ &a_2x + b_2y + c_2z + \ldots = k_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_nx + b_ny + c_nz + \ldots = k_n, \end{aligned}$$

où $x, y, z, \ldots$ sont n inconnues et où les autres lettres désignent des quantités connues. Soient

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad \ldots$$

un premier système de solutions,

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad \ldots$$

un second système de solutions ; on aura

$$\begin{aligned} &a_1\alpha + b_1\beta + \ldots = k_1, \\ &a_1\alpha' + b_1\beta' + \ldots = k_1 ; \end{aligned}$$

soient μ et μ' deux nombres tels, que $\mu + \mu' = 1$; multiplions la première de ces formules par μ, la seconde par μ', et ajoutons; nous aurons

$$a_1(\alpha\mu + \alpha'\mu') + b_1(\beta\mu + \beta'\mu') + \ldots = k_1(\mu + \mu') = k_1$$

On voit que

$$\alpha\mu + \alpha'\mu', \quad \beta\mu + \beta'\mu', \quad \ldots$$

constituera une nouvelle solution, et, comme μ est arbitraire, on voit que le nombre des solutions du système est illimité.

Éliminer une inconnue entre plusieurs équations, c'est remplacer ces équations par d'autres qui ne contiennent plus cette inconnue, et qui cependant admettent les mêmes solutions pour les inconnues restantes. Nous allons exposer diverses méthodes d'élimination.

1° *Élimination par substitution.* — L'élimination par substitution consiste à résoudre l'une des équations par rapport à l'une des inconnues et à porter la valeur trouvée dans les autres équations, qui alors ne contiennent plus cette inconnue. Voici un exemple de cette méthode. Considérons les équations

$$(1) \qquad 3x + 8y = 25,$$

$$(2) \qquad 12x - 7y = 22$$

Tirons de (1) la valeur de x, en supposant y connu; il vient

$$(3) \qquad x = \frac{25 - 8y}{3},$$

et l'équation (3), en vertu des principes exposés (p. 75), peut remplacer l'équation (1). Si alors on remplace x par $\frac{25 - 8y}{3}$ dans l'équation (2), on trouve une équation qui

ne contient plus y et qui peut remplacer l'équation (2) ou l'équation (3), c'est-à-dire l'équation (1). En effet, remplacer x dans l'équation (2) par sa valeur tirée de l'équation (3) revient à écrire l'équation (3) d'abord sous la forme

$$x - \frac{25 - 8y}{3} = 0,$$

puis à multiplier par 12 ses deux membres et à la retrancher de l'équation (2). La méthode de substitution n'altère donc pas les racines et peut être employée dans tous les cas; le calcul s'achève facilement et l'équation (2) devient, après la *substitution* de la valeur de x tirée de l'équation (3),

$$(4) \qquad 12\frac{25 - 8y}{3} - 7y = 22;$$

d'où l'on tire, en résolvant cette équation à une inconnue par rapport à y,

$$(5) \qquad y = 2.$$

L'équation (5), qui admet les mêmes racines que l'équation (4), peut remplacer les équations (1) ou (2); si alors on porte la valeur obtenue pour y dans l'une de ces équations, on élimine y et l'on trouve une équation à une inconnue en x qui permet de calculer la valeur de cette inconnue. Si l'on fait $y = 2$ dans l'équation (1), on trouve

$$3x + 16 = 25, \quad x = 3.$$

Remarque. — La méthode que nous venons d'employer s'applique à un nombre quelconque d'équations et réduit le système total des équations à un nombre moindre d'une unité et ayant une inconnue de moins. On peut alors procéder sur le nouveau système comme sur le premier et faire

disparaître une inconnue et une équation; on arrive alors finalement à une seule équation contenant une seule inconnue, si le nombre des équations est égal à celui des inconnues, et l'on peut en tirer la valeur de cette inconnue. Si le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, on a plusieurs équations contenant une même inconnue; ces équations ne fournissent pas en général la même valeur pour cette inconnue, et l'on conçoit que le système d'équations est surabondant. Si au contraire le nombre des inconnues est supérieur à celui des équations, on tombe sur une équation à plusieurs inconnues, et l'on voit que l'on peut choisir arbitrairement l'une d'elles : le système a une infinité de solutions.

Ce raisonnement est très-vague, en ce sens qu'il suppose que les équations à une inconnue que l'on est censé résoudre ont une solution bien déterminée; aussi verrons-nous les conclusions précédentes, qui tendent à établir qu'un système de n équations doit contenir n inconnues, tomber en défaut.

2° *Élimination par addition.* — Cette méthode consiste à multiplier par des facteurs convenables deux des équations à résoudre, de telle sorte que les coefficients de la même inconnue soient égaux. S'ils sont de même signe, on retranche les équations membre à membre; s'ils sont de signes contraires, on ajoute ces équations, et l'on fait ainsi évidemment disparaître une inconnue. L'équation à laquelle on arrive peut, en vertu des principes démontrés plus haut (p. 75), remplacer l'une quelconque des équations qui lui ont donné naissance.

Reprenons les équations considérées tout à l'heure

$$(1) \qquad 3x + 8y = 25,$$

$$(2) \qquad 12x - 7y = 22.$$

Pour donner des valeurs égales aux coefficients de x, on

peut multiplier la première équation par le coefficient de x dans la seconde, et *vice versa;* mais il est plus simple de multiplier par 4 les deux membres de l'équation (1); en retranchant alors membre à membre, on trouve

$$39y = 78, \quad y = 2.$$

3° *Élimination par comparaison.* — Cette méthode, peu usitée, revient au fond à la précédente; elle consiste à égaler les valeurs d'une même inconnue tirée de deux équations différentes.

4° *Élimination par la méthode des multiplicateurs.* — Cette méthode, attribuée à Bezout, consiste à multiplier les équations par des facteurs tels, qu'en les ajoutant toutes les inconnues disparaissent à l'exception d'une seule.

Considérons d'abord les équations

$$(1) \qquad ax + by = c,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y = c'.$$

Multiplions la seconde équation par λ, ajoutons avec la première, il vient

$$(a + a'\lambda)x + (b + b'\lambda)y = c + c'\lambda.$$

Déterminons maintenant λ par la condition

$$a + a'\lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{a}{a'},$$

l'équation (3) devient

$$\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)y = c - \frac{ac'}{a'};$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{a'c - c'a}{a'b - b'a}.$$

En posant dans l'équation (3)

$$b + b'\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{b}{b'},$$

on aurait trouvé

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Considérons en second lieu les équations

$$(1) \qquad ax + by + cz = d,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$

$$(3) \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Multiplions la seconde par le facteur indéterminé λ, la troisième par λ', et ajoutons; il vient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a + a'\lambda + a''\lambda')x + (b + b'\lambda + b''\lambda')y \\ &\qquad + (c + c'\lambda + c''\lambda') = d + d'\lambda + d''\lambda'. \end{aligned} \right.$$

Profitons de l'indétermination de λ et λ' et posons

$$(5) \qquad b + b'\lambda + b''\lambda' = 0,$$

$$(6) \qquad c + c'\lambda + c''\lambda' = 0.$$

Multiplions l'équation (6) par μ et ajoutons avec l'équation (5); il vient

$$(7) \qquad b + c\mu + (b' + c'\mu)\lambda + (b'' + c''\mu)\lambda' = 0.$$

Posons enfin

$$b' + c'\mu = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = -\frac{b'}{c'};$$

l'équation (7) donne

$$b - \frac{b'}{c'}c + \left(b'' - \frac{b'}{c'}c''\right)\lambda' = 0,$$

d'où

$$\lambda' = \frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''}.$$

Si l'on se reporte aux équations (5) et (6), on voit que, pour en déduire λ quand on connaît λ', il suffit de changer, dans la formule qui donne λ', b' en b'', b'' en b', c' en c'' et c'' en c', car, quand on opère ce changement dans les équations (5) et (6), il est bien clair que la valeur de λ' qui satisfait est l'ancienne valeur de λ, et *vice versâ*. On a donc

$$\lambda = \frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'}.$$

Si l'on porte alors dans l'équation (4) les valeurs que nous venons de trouver pour λ et λ', il vient, en vertu des équations (4) et (5),

$$\left(a + a'\frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'} + a''\frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''}\right)x$$
$$= d + d'\frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'} + d''\frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''},$$

d'où l'on tire, en ordonnant par rapport aux accents,

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + cb'd'' - bc'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + cb'a'' - bc'a''}.$$

Pour déduire de cette formule la valeur de y, il suffit de changer a en b, b en c et c en a. En effet, par ce changement, les équations (1), (2), (3) fourniront pour y la valeur qu'elles fournissaient avant pour x, et pour z la valeur qu'elles fournissaient pour y. Enfin on pourrait aussi se contenter de changer a en b et b en a.

Ce qui est remarquable, c'est que par ces changements le dénominateur de la valeur de x ne change pas, en sorte que les trois inconnues ont le même dénominateur. Le numérateur d'une inconnue ne diffère du dénominateur que par le changement en d de la lettre qui sert de coefficient à cette inconnue dans les équations (1), (2), (3); nous généraliserons plus loin ces résultats.

V. — DISCUSSION DES CAS QUI PEUVENT SE PRÉSENTER DANS LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

Reprenons les équations dont il a déjà été question,

$$(1)\qquad ax + by = c,$$

$$(2)\qquad a'x + b'y = c'.$$

Ces équations renferment toutes les équations numériques à deux inconnues et du premier degré que l'on pourrait se proposer de résoudre; il suffit pour cela d'attribuer à a, b, a', b', c et c' des valeurs convenables, nulles au besoin.

Multiplions par b' la première équation et par b la seconde; en retranchant alors membre à membre, il vient

$$(3)\qquad (ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

Jusqu'ici nous avons implicitement supposé que b et b' n'étaient pas nuls à la fois; sans quoi nous aurions fait une opération illusoire conduisant à l'identité

$$0 = 0.$$

Nous allons supposer $ab' - ba'$ différent de zéro, et alors l'équation (3) donnera

$$(4)\qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

On trouverait de même, en supposant que a et a' ne sont pas nuls à la fois,

$$(5)\qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Ces formules montrent que, si $ab' - ba'$ est différent de

zéro, le système des équations (1) et (2) admet toujours une solution et une seule ; car les hypothèses que nous avons faites, que a et a' ne sont pas nuls à la fois ou que b et b' ne sont pas nuls à la fois, rentrent dans celle-ci

$$ab' - ba' \gtrless 0.$$

Supposons actuellement

(6) $$ab' - ba' = 0,$$

et toutes les quantités a, a', b, b', c, c' différentes de zéro ; alors les valeurs de x et de y se présentent en général sous la forme

$$\frac{m}{0}.$$

Si l'on remonte à l'équation (3), qui a fourni cette valeur de x, on voit que cette équation se réduit à une absurdité, puisque son premier membre est nul et que le second ne l'est pas en général. Les équations (1) et (2), conduisant par des calculs légitimes à une absurdité, sont incompatibles ; c'est du reste ce qu'il est facile d'établir directement.

1° Nous supposerons le numérateur de la valeur de x, c'est-à-dire le second membre de la formule (3), différent de zéro ; nous aurons alors

(7) $$cb' - bc' \gtrless 0.$$

Mais de la formule (6) on tire

(8) $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

et de la formule (7)

(9) $$\frac{b}{b'} \gtrless \frac{c}{c'},$$

et, par conséquent, de ces deux dernières formules,

(10) $$\frac{a}{a'} \gtrless \frac{c}{c'}$$

ou

$$ac' - ca' \gtrless 0.$$

Cette quantité est précisément le numérateur de la valeur de y, qui va se présenter aussi sous la forme $\frac{m}{0}$. Si l'on désigne alors par p la valeur commune des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, on tirera de la formule (8)

$$a = pa', \quad b = pb',$$

et de la formule (9)

$$c \lessgtr pc'.$$

En portant dans l'équation (1) les valeurs que nous venons de trouver pour a et b, on trouve

$$pa'x + pb'y = c \lessgtr pc'.$$

Mais l'équation (2) multipliée par p donne

$$pa'x + pb'y = pc'.$$

On voit donc que les équations (1) et (2) impliquent des conditions contradictoires, puisqu'elles exigent que la même quantité soit à la fois égale et inégale à pc'.

2° Il pourrait arriver que le numérateur de la valeur de x fût égal à zéro; l'équation (3) ne présenterait plus rien d'absurde; au contraire, elle se réduirait à l'identité

$$0 = 0.$$

La valeur de x prend la forme $\frac{0}{0}$; il est facile de voir que dans ce cas les équations (1) et (2) rentrent l'une dans

l'autre et que les valeurs de x et de y sont indéterminées; nous supposerons toujours les coefficients a, b, c, a', b', c' différents de zéro, et la relation

(6) $$ab' - ba' = 0$$

fournira comme plus haut

(8) $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Si nous supposons actuellement le numérateur de la valeur de x nul, ou

(11) $$cb' - bc' = 0,$$

il vient

(12) $$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'};$$

et, en vertu de l'équation (8),

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

ou bien

$$ac' - ca' = 0,$$

et l'on voit que le numérateur de la valeur de y est également nul. Si l'on désigne par p la valeur commune des rapports $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$, les équations (11) et (12) donnent

$$a = pa', \quad b = pb', \quad c = pc'.$$

Si l'on porte ces valeurs de a, b, c dans l'équation (1), on trouve

$$pa'x + pb'y = pc',$$

équation que l'on déduit en multipliant par p l'équation (2). On voit qu'en réalité on n'a qu'une seule équa-

tion entre x et y, ce qui est insuffisant pour déterminer ces inconnues, puisque alors on peut choisir l'une d'elles arbitrairement.

Il reste maintenant à examiner les cas où quelques coefficients des équations (1) et (2) seraient nuls; mais, auparavant, observons que les formules (4) et (5), qui font connaître x et y, satisfont aux équations (1) et (2) toutes les fois que $ab' - ba'$ n'est pas nul. Nous supposerons donc

$$(6) \qquad ab' - ba' = 0.$$

1° Si aucun des coefficients a, b, a', b' n'est nul, on tire de cette équation, comme nous avons vu plus haut,

$$a = pa', \quad b = pb',$$

et, si c seul est nul, on voit que les équations (1) et (2) sont incompatibles, et les inconnues se présentent sous la forme $\frac{m}{0}$. Si c et c' sont nuls tous deux, les équations (1) et (2) rentrent l'une dans l'autre, et les inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

2° Supposons $a = 0$; alors l'équation (6) montre que a' ou b doit être nul; si a' est nul, on n'a plus, à proprement parler, deux inconnues dans les équations (1) et (2), qui ne peuvent déterminer x et qui sont surabondantes pour déterminer y, à moins que ces deux équations ne soient une conséquence l'une de l'autre. Dans ce cas, les formules (4) et (5) donnent des résultats de la forme

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Dans le cas où $cb' - bc' = 0$, x se présente aussi sous la forme $\frac{0}{0}$. Cependant, dans ce cas, la valeur de y est par-

faitement déterminée, puisque $\frac{c}{c'}$ est égal à $\frac{b}{b'}$: les équations (1) et (2) rentrent l'une dans l'autre et sont à une seule inconnue. La formule illusoire

$$y = \frac{0}{0},$$

à laquelle on arrive, tient à ce que l'équation (5) a été obtenue en multipliant par a' et a les équations (1) et (2). Or a et a' sont nuls; on a donc fait des calculs illusoires.

Si l'on supposait $b = 0$ avec $a = 0$, l'équation (1) se réduirait à l'absurdité $c = 0$, à moins que c ne fût naturellement nul. Lorsque c est différent de zéro, les équations (4) et (5) donnent

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{m}{0};$$

lorsque c est nul, on a au contraire

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

3° Supposons $a = 0$ avec $a' = 0$ et $b' = 0$. Dans ce cas, les équations (1) et (2) se réduisent à une absurdité, à moins que $c' = 0$, et à une équation à une inconnue

$$by = c.$$

Les formules (4) et (5) donnent, dans ce cas,

$$x = \begin{cases} \frac{m}{0} \text{ pour } c' \gtrless 0,\ c \gtrless 0, \\ \frac{0}{0} \text{ pour } c' = 0 \text{ ou } c = 0, \end{cases}$$

$$y = \frac{0}{0}.$$

4° Si l'on a $a=0$, $a'=0$, $b=0$, $b'=0$, les équations (1) et (2) sont absurdes ou illusoires et les formules (4) et (5) donnent

$$x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}.$$

De cette discussion résulte que, si l'on a réellement deux équations à deux inconnues ne présentant rien de contradictoire et ne rentrant pas l'une dans l'autre, les formules (4) et (5) pourront servir à résoudre le système (1) et (2). Nous avons, en effet, examiné tous les cas possibles, à savoir :

I. $ab'-ba' \lessgtr 0$.

II. $ab'-ba'=0$.

1° Aucun des coefficients a, b, a', b' n'est nul.

2° Un coefficient d'inconnue nul comprenant l'un des deux suivants :

a. Deux coefficients appartenant à la même inconnue nuls.

b. Deux coefficients n'appartenant pas à la même inconnue nuls.

3° Trois coefficients nuls.

4° Quatre coefficients nuls.

Dans chacun de ces cas, nous avons supposé c et c' nuls ou différents de zéro, et toujours la condition $ab'-ba'=0$ nous a conduit à affirmer que les équations (1) et (2) étaient incompatibles ou insuffisantes.

VII. — DES PROBLÈMES D'ALGÈBRE QUI CONDUISENT A DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Pour résoudre un problème dans lequel le résultat cherché est un nombre ou même se compose de plusieurs nombres, on désigne les inconnues, c'est-à-dire les quantités à déterminer, par des lettres ; puis on suppose les

résultats connus et l'on indique, à l'aide des signes algébriques, les calculs qu'il faudrait effectuer sur les lettres qui désignent les inconnues pour vérifier qu'elles sont bien les solutions du problème : on arrive ainsi à des équations que l'on essaye de résoudre. Lorsque ces équations peuvent être résolues, les solutions que l'on en déduit sont ordinairement celles du problème que l'on a mis en équation : je dis *ordinairement*, parce qu'il arrive quelquefois que les équations auxquelles on est conduit fournissent non-seulement la solution cherchée, mais encore des solutions étrangères à la question que l'on traite. Nous ne pouvons pas à présent donner la raison de cette anomalie, sur laquelle nous aurons bien souvent l'occasion de revenir. Donnons quelques exemples.

Problème I. — *La somme de deux nombres est* 18, *leur différence est* 6 : *trouver ces deux nombres.*

Soit x le plus petit des deux nombres ; le plus grand sera $x + 6$, puisque leur différence est 6, et, comme leur somme fait 18, on doit avoir

$$x + x + 6 = 18,$$

d'où l'on tire

$$x = 6.$$

Ainsi le plus petit des deux nombres est 6, le plus grand est donc 12.

Problème II. — *Dans quel système de numération le nombre* 15 *est-il représenté par* 23 ?

Ici l'inconnue est la base ; désignons-la par x. Le nombre total des unités contenues dans 23 est de deux fois la base augmentée de 3. On a donc

$$2x + 3 = 15,$$

d'où l'on tire

$$x = 6.$$

Ainsi la base du système cherché est 6.

Problème III. — *Un marchand vend en deux jours* 600 *oranges et reçoit en tout* 40 *francs, à savoir* 20 *francs par jour; mais le second jour il vend ses oranges deux fois meilleur marché que le premier : on demande à quel prix il a vendu ses oranges et combien il en a vendu chaque jour.*

Soit x le nombre des oranges vendues le premier jour; le prix de ces x oranges est de 20 francs; donc le prix d'une orange est $\frac{20}{x}$ pour le premier jour.

Le second jour, il vend le reste de ses oranges, c'est-à-dire $600 - x$ pour 20 francs; donc le prix d'une orange est alors $\frac{20}{600 - x}$; mais, comme elles sont deux fois meilleur marché que le premier jour, on doit avoir

$$\frac{20}{x} = 2 \times \frac{20}{600 - x}.$$

En multipliant par $\frac{x(600 - x)}{20}$ les deux membres de cette équation, on risque d'y introduire les solutions $x = 0$ ou $x = 600$; mais il n'en est rien. En effet on trouve

$$600 - x = 2x$$

ou

$$x = 200.$$

Ainsi, le premier jour, il a été vendu 200 oranges; par conséquent, on en a vendu 400 le second jour. Le premier jour, le prix d'une orange était $0^{fr},10$; le second jour, il était $0^{fr},05$.

PROBLÈME IV. — *Deux joueurs ont gagné 6000 francs à eux deux en deux parties; après la première partie, le gain du premier joueur est triple de celui du second; le premier donne alors 1000 francs au second; après la seconde partie, le premier joueur a gagné deux fois plus que le second, mais il lui donne encore la moitié de son gain, après quoi ils se trouvent chacun en possession de 3000 francs : on demande quel a été le gain de chaque joueur à la fin de chaque partie.*

Soit x le gain du second joueur après la première partie, le gain du premier sera $3x$; soit y le gain du second joueur à la fin de la seconde partie, le gain du premier sera $2y$. Or le gain total des joueurs fait 6000 francs; on a donc

$$(1) \qquad x + 3x + y + 2y = 6000.$$

Mais à la fin de la première partie le second joueur possède $x + 1000$, puisqu'il a reçu 1000 francs; à la fin de la seconde partie, il possède d'abord $x + 1000$, plus son gain y, plus la moitié y du gain du premier; il a donc en tout

$$(2) \qquad x + 1000 + y + y = 3000.$$

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$4x + 3y = 6000,$$
$$x + 2y = 2000;$$

on tire de ces équations

$$y = 400, \quad x = 1200.$$

Ainsi le gain du premier joueur est de $3x$ ou 3600 francs après la première partie, et de $2y$ ou 800 francs après la

on en tire

$$x = 150,$$

et cependant le problème n'a pas de solution, car si l'on veut vérifier la solution trouvée, on est conduit à ôter 200 noix d'un sac qui en contient 150, ce qui est absurde.

Mais nous nous attacherons surtout à la discussion des solutions négatives, parce qu'elles donnent lieu à une théorie qui exerce une influence capitale sur toutes les branches des Mathématiques.

Commençons par essayer de résoudre le problème suivant :

Un père a 68 *ans, son fils en a* 40 : *on demande au bout de combien de temps l'âge du père sera le double de celui du fils.*

Désignons par x ce temps ; au bout du temps x, le père aura $68 + x$ années, le fils $40 + x$, et l'on doit avoir

$$68 + x = 2(40 + x); \tag{1}$$

en résolvant cette équation, on trouve

$$x = -12. \tag{2}$$

Ce résultat prouve que l'équation (1), qui est la traduction du problème en langage algébrique, n'admet pas de solution positive ; en d'autres termes, le problème n'admet pas de solution. Et en effet, l'âge du père n'étant pas le double de l'âge du fils, il ne le deviendra jamais, et le rapport des deux âges se rapproche toujours de 1.

La solution négative $x = -12$ n'est cependant pas aussi absurde que l'on pourrait croire au premier abord. En effet, changeons x en $-x'$; x' sera égal à 12, et l'équation (1) deviendra

$$68 - x' = 2(40 - x'), \tag{3}$$

et cette dernière équation admet évidemment pour solution $x' = 12$. L'équation (3) est la traduction algébrique du problème suivant :

Un père a 68 ans, son fils en a 40 : à quelle époque l'âge du père a-t-il été le double de celui du fils?

Nous trouvons alors pour réponse : il y a 12 ans.

En général, toutes les fois que l'on trouve une solution négative à un problème, il faut changer le signe de la lettre qui représente l'inconnue dans l'équation à laquelle conduit le problème ; la solution négative devient alors positive, et, est le plus souvent la réponse d'un problème analogue à celui qui a été posé, et dont l'équation modifiée est la traduction algébrique.

Observons qu'à l'aide d'une simple convention deux problèmes peuvent être compris sous le même énoncé. Reprenons le problème de tout à l'heure ; posons-le en ces termes :

Un père a 68 ans, son fils en a 40 : quand l'âge du père sera-t-il ou a-t-il été le double de celui du fils?

Ainsi posé, le problème est en quelque sorte double ; mais si nous convenons de regarder comme positif le temps à venir, comme négatif le temps passé, si nous convenons, en un mot, que les locutions *dans* — N *années* et *il y a* N *années* soient équivalentes, nous raisonnerons ainsi qu'il suit : soit x le temps positif ou négatif au bout duquel l'âge du père sera le double de celui du fils.

Au bout du temps x, le père aura $68 + x$ années ; ceci est évident si l'âge du père devient dans l'avenir double de celui du fils. Dans le cas où l'âge du père a été le double de celui du fils, $68 + x$ représente encore l'âge du père

lorsqu'il est le double de celui du fils, car, x' désignant la valeur absolue de x, cet âge est $68 - x'$, c'est-à-dire $68 + x$. De même, à l'époque cherchée, l'âge du fils est $40 + x$; or on doit avoir

$$68 + x = (40 + x) \times 2.$$

Comme on trouve $x = -12$, on en conclut que l'âge du père *a été*, il y a douze ans, double de celui du fils.

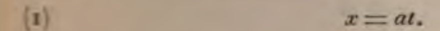
En Algèbre, lorsqu'une quantité variable peut être comptée dans deux sens opposés, comme le temps dans le présent ou dans l'avenir; les longueurs sur une même ligne à partir d'un point fixe; la fortune d'un négociant qui peut être active ou passive, etc., on convient de regarder comme positives les grandeurs comptées dans un sens et comme négatives les grandeurs comptées dans l'autre; l'avantage que l'on retire de cette convention est de comprendre sous un seul énoncé plusieurs questions du même genre.

Problème des courriers. — *Deux mobiles* A *et* B *partent simultanément de deux points* P *et* Q *et cheminent sur la droite* PQ, *le premier parcourant a mètres par seconde, le second b mètres par seconde; la distance* PQ *est de l mètres : on demande à quelle époque leur rencontre a lieu.*

Convenons de regarder comme positives les distances parcourues dans le sens PQ et comme négatives les distances parcourues dans le sens QP; convenons de regarder les temps passés comme négatifs, les temps à venir comme positifs.

Soit x la distance à laquelle la rencontre a lieu, comptée à partir du point P, le sens positif étant toujours PQ ; nous désignerons par R le point de rencontre ; la distance PR est égale en valeur absolue au temps employé à la par-

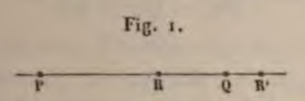
courir, que nous désignerons par t multiplié par a, en sorte qu'en valeur absolue on a



$$x = at. \tag{1}$$

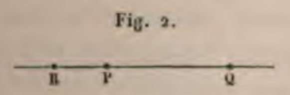
Voyons si cette égalité a encore lieu quand on a égard aux signes. 1° Supposons a et t positifs. Si a est positif, le point A se meut de P vers Q; si t est positif, la rencontre *aura lieu*. Donc le point R est placé du côté de Q par rapport au point P, comme dans la *fig.* 1; par conséquent x est positif, et par conséquent la formule (1) est

Fig. 1.



exacte. 2° Si a est positif, mais t négatif, le point A se meut dans le sens PQ, mais la rencontre *a eu lieu*. Le point R, cette fois, se trouve du côté opposé à Q par rapport à P, comme dans la *fig.* 2; alors x est négatif, at est négatif aussi; donc la formule (1) convient encore à ce cas. 3° Si a est négatif et t positif, la rencontre *aura lieu*, mais le point A se meut dans le sens QP, en sorte que R se trouve encore placé comme dans la *fig.* 2, et x est négatif ainsi que at. La formule (1) convient encore à ce

Fig. 2.



cas. 4° Si a et t sont négatifs tous deux, la rencontre *a eu lieu*, et, comme le point A se meut dans le sens QP, le point R se trouve placé comme dans la *fig.* 1; x est donc positif comme at, et la formule (1) est encore exacte dans ce cas.

Si nous désignons par y la distance parcourue par le

point B entre Q et R, une discussion analogue à la précédente fournit l'équation

$$(2) \qquad y = bt.$$

Cela posé, je dis que l'on a

$$(3) \qquad x - y = l.$$

Cette équation est évidente si x et y sont positifs tous deux, car alors le point de rencontre se trouve placé comme le point R' de la *fig.* 1, et l'on a

$$PR' - QR' = PQ$$

ou

$$x - y = l.$$

Mais, si la rencontre a lieu entre P et Q au point R de la *fig.* 1, on a

$$PR + RQ = PQ.$$

Mais $PR = x$, $RQ = -y$, puisque y est négatif, et $PQ = l$: on a donc

$$x - y = l.$$

Enfin, si le point de rencontre se trouve placé comme le point R de la *fig.* 2, on a

$$QR - PR = PQ.$$

Ici on a

$$QR = -y, \quad PR = -x, \quad \text{et} \quad PQ = l;$$

donc

$$x - y = l;$$

la formule (3) peut donc être considérée comme parfaitement établie. Pour résoudre le système des équations (1), (2), (3), il suffit de retrancher l'équation (2) de l'équation (1); il vient alors

$$x - y = (a - b)t,$$

et, en comparant avec l'équation (3),

$$l = (a - b)t,$$

d'où

$$(4) \qquad t = \frac{l}{a - b}.$$

Les équations (1) et (2) donnent alors

$$x = \frac{al}{a - b}, \quad y = \frac{bl}{a - b}.$$

Proposons-nous de résoudre la question suivante :

Deux mobiles partent simultanément de deux points P *et* Q; *ils marchent à la rencontre l'un de l'autre. Le premier parcourt* 10 *mètres par seconde, le second* 40 *mètres; la distance* PQ *est de* 1250 *mètres : au bout de combien de temps se rencontreront-ils?*

Pour trouver ce temps, il suffit de faire dans la formule (4) l égal à 1250, a égal à 10 et b égal à -40; on trouve ainsi

$$t = \frac{1250}{10 + 40} = 25.$$

Bien que le problème des courriers soit éminemment propre à mettre en évidence les avantages que l'on tire de l'interprétation des quantités négatives, nous allons encore traiter une question d'Arithmétique d'une grande importance et qui se trouve considérablement simplifiée par les théories précédemment exposées : je veux parler de l'étude des erreurs relatives.

IX. — THÉORIE DES ERREURS RELATIVES.

Lorsque l'on ne peut pas calculer exactement un nombre,

on cherche à en approcher; la différence entre le nombre exact et le nombre approché porte le nom d'*erreur absolue*. Cette erreur peut être par *excès* ou par *défaut*, selon que le nombre approché est plus grand ou plus petit que le nombre exact. Nous regarderons comme positives les erreurs par excès et comme négatives les erreurs par défaut, en sorte que, A étant le nombre exact, a le nombre approché, l'erreur sera toujours en grandeur et en signe $a - A$.

On appelle *erreur relative* l'erreur absolue divisée par le nombre exact.

Théorème I. — *L'erreur relative d'un produit de deux facteurs est égale à la somme des erreurs relatives de ses facteurs augmentée du produit des mêmes erreurs.*

En effet, soient A et B les facteurs exacts du produit, α et β les erreurs absolues de ces mêmes facteurs; les nombres approchés a et b seront donnés par les formules

$$a = A + \alpha,$$
$$b = B + \beta.$$

Quels que soient les signes de α et β, on déduit des égalités précédentes

$$ab = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

En retranchant AB aux deux membres de cette équation et en divisant par AB, on a

$$\frac{ab - AB}{AB} = \frac{\beta}{B} + \frac{\alpha}{A} + \frac{\alpha\beta}{AB}.$$

Si l'on observe que $ab - AB$ est en grandeur et en signe l'erreur absolue du produit, $\frac{ab - AB}{AB}$ désignera son erreur

relative, $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$ seront les erreurs relatives de ses facteurs, et l'égalité précédente démontre le théorème énoncé.

On voit encore dans cet exemple combien l'usage des quantités négatives simplifie l'énoncé des théorèmes et leur démonstration.

Théorème II. — *L'erreur relative d'un quotient est sensiblement égale à la différence des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

Soient D le dividende exact, d l'erreur; Δ le diviseur exact, δ l'erreur; Q le quotient exact, q l'erreur : on a

$$(1) \qquad Q = \frac{D}{\Delta},$$

le quotient approché est

$$\frac{D + d}{\Delta + \delta};$$

on a donc

$$q = \frac{D + d}{\Delta + \delta} - \frac{D}{\Delta},$$

ou bien

$$(2) \qquad q = \frac{d\Delta - \delta D}{\Delta(\Delta + \delta)}.$$

Si nous divisons les équations (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{q}{Q} = \frac{\frac{d}{D} - \frac{\delta}{\Delta}}{\left(1 + \frac{\delta}{\Delta}\right)}.$$

Le premier membre de cette équation est l'erreur relative du quotient, le second membre doit donc être une autre

expression de cette erreur. Il est sensiblement égal à

$$\frac{d}{D} - \frac{\delta}{D},$$

si l'on observe que $\frac{\delta}{D}$ est en général très-petit, ce qui démontre le théorème en question.

X. — DES SOLUTIONS DE LA FORME $\frac{m}{0}$.

Rappelons que l'on appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont cette quantité variable peut s'approcher indéfiniment, c'est-à-dire de telle sorte que la différence entre ces deux quantités puisse être prise moindre en valeur absolue que toute quantité donnée.

On dit qu'une quantité variable est *infinie* quand on a l'intention de la faire croître indéfiniment; ainsi il est absurde de dire qu'une quantité qui ne varie pas est *infinie*, et zéro peut être une valeur particulière d'une quantité infinie. On voit quelle différence il existe entre l'infini métaphysique, qui est une chose complétement vague et incompréhensible, et l'infini mathématique, qui se définit d'une manière très-précise.

On dit qu'une quantité est *infiniment petite* quand elle a zéro pour limite.

Le symbole $\frac{m}{0}$ peut se présenter comme solution d'un problème et représente alors l'*infini;* mais cette locution ne présente aucun sens si on la prend à la lettre, et la solution $\frac{m}{0}$ ne sera censée représenter l'infini que si au zéro on substitue mentalement une quantité variable et infiniment petite. Essayons de nous faire comprendre par un exemple :

Concevons un courrier A *marchant avec une vitesse de a mètres par seconde dans le même sens qu'un courrier* B *parcourant b mètres par seconde : on demande à quelle époque ils se rencontreront, la distance à laquelle ils se trouvent l'un de l'autre étant l au moment du départ.*

Nous avons déjà résolu ce problème, et, en désignant par t le temps qui s'écoule depuis le moment du départ jusqu'au moment de la rencontre, on a

$$t = \frac{l}{a-b}.$$

Si dans cette formule on fait $a=b$, on trouve

$$t = \frac{l}{0};$$

on peut alors dire que les courriers se rencontrent à l'infini; mais voici ce qu'il faut entendre par cette locution. A proprement parler, ils ne se rencontrent pas du tout quand $a=b$, c'est-à-dire quand ils marchent tous deux avec la même vitesse; mais, si au lieu de faire brusquement $a=b$ on suppose a fixe et b variable, $a-b$ prendra diverses valeurs, et l'on voit que t deviendra d'autant plus grand que $a-b$ sera plus petit, car une fraction est d'autant plus grande que son dénominateur est plus petit, et croît au delà de toute limite quand son dénominateur tend vers zéro, c'est-à-dire devient *infiniment petit*. Ainsi, dire pour $a=b$, t est infini, c'est énoncer d'une manière abrégée la proposition suivante :

Le temps au bout duquel la rencontre des courriers a lieu croît au delà de toute limite à mesure que la différence des espaces a et b parcourus dans une seconde tend vers zéro.

XI. — THÉORÈMES SUR LES LIMITES.

Théorème I. — *Si deux quantités sont constamment égales, si l'une d'elles admet une limite, l'autre en admet une aussi, et ces deux limites sont égales.*

En effet, soient a et b les quantités variables et A la limite de a; $A - a$ peut devenir moindre en valeur absolue que toute quantité donnée. Il en sera de même de $A - b$, qui lui est égal; donc, par définition, A est la limite de b.

Théorème II. — *La limite d'une somme algébrique est égale à la somme algébrique des limites de ses parties.*

Soient, en effet, x, y, z, ... des quantités variables, a, b, c, ... leurs limites respectives; soient enfin α la différence $a - x$, β la différence $b - y$, ..., on aura

$$a = x + \alpha, \qquad b = y + \beta, \qquad \ldots,$$

d'où

$$a + b + \ldots = x + y + \ldots + \alpha + \beta + \ldots;$$

mais α, β, ... peuvent être pris chacun moindres que toute quantité donnée, puisque ces quantités représentent les différences entre les variables et leurs limites; si donc les quantités x, y, z, ... sont en nombre limité, α, β, ... seront en nombre limité, et leur somme pourra être rendue moindre que toute quantité donnée, ce qui revient à dire que $a + b + \ldots$ et $x + y + \ldots$ peuvent différer l'un de l'autre d'aussi peu que l'on veut; en d'autres termes, on a

$$a + b + \ldots = \lim(x + y + \ldots).$$

Il est essentiel de remarquer que nous avons supposé le nombre des parties de la somme variable limité; s'il n'en était plus ainsi, le théorème précédent pourrait tomber en

défaut : c'est ce que nous établirons nettement un peu plus tard.

Théorème III. — *La limite d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des limites de ces facteurs.*

Pour le démontrer, désignons par $x, y, z, \ldots$ les facteurs variables, par $a, b, c, \ldots$ leurs limites respectives; posons

$$x - a = \alpha, \quad y - b = \beta, \quad z - c = \gamma, \quad \ldots;$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pourront être pris aussi petits que l'on voudra, et l'on aura

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma, \quad \ldots,$$

ou bien

$$xyz\ldots = (a + \alpha)(b + \beta)(c + \gamma)\ldots.$$

Si l'on effectue les multiplications indiquées, on trouve

$$xyz\ldots = abc\ldots + \omega,$$

ω désignant un ensemble de termes dans chacun desquels entre comme facteur l'une des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; chacun de ces termes peut donc être pris aussi petit que l'on veut, et leur somme ω par conséquent aussi; donc la différence ω entre $xyz\ldots$ et $abc\ldots$ peut être prise aussi petite que l'on veut; en d'autres termes, $xyz\ldots$ a pour limite $abc\ldots$. C. Q. F. D.

Il faut observer que, en supposant que nous pouvions prendre ω moindre que toute quantité donnée, nous avons implicitement admis que le nombre des termes contenus dans ω était limité, ce qui suppose enfin le nombre des facteurs $x, y, z, \ldots$ limité.

Théorème IV. — *La limite d'un quotient est égale au quotient des limites du dividende et du diviseur.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur, q le quotient; on a

$$D = dq,$$

$$\lim D = \lim dq = \lim d \lim q,$$

d'où

$$\lim q = \frac{\lim D}{\lim d}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

XII. — SUR LES SOLUTIONS DE LA FORME $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ...

En résolvant l'équation d'un problème, on peut trouver une solution de la forme $\frac{0}{0}$; en général, ce symbole indique une indétermination dans les équations du problème, et par suite dans le problème lui-même. Toutefois, la solution que l'on trouve ainsi peut provenir d'une solution plus générale dans laquelle on a donné des valeurs particulières à certaines lettres qui entraient comme données dans le problème; il peut arriver alors que le problème ne soit pas réellement indéterminé : c'est ce que nous allons constater sur un exemple.

Problème. — *Du sommet d'un angle droit* DOA *comme centre on décrit un cercle* (*fig.* 3); *par deux points* M *et* N *de ce cercle on fait passer une droite* MN; *les distances* MP *et* NQ *des points* M *et* N *à la droite* OD *sont respectivement* δ *et* δ', *le rayon du cercle est* a : *on demande de calculer la ligne* AO.

Désignons AO par x. Les triangles ABM, MCN, semblables, donnent

$$\frac{AB}{BM} = \frac{MC}{CN}$$

ou

$$\frac{x-\delta}{\sqrt{a^2-\delta^2}}=\frac{\delta-\delta'}{\sqrt{a^2-\delta'^2}-\sqrt{a^2-\delta^2}}.$$

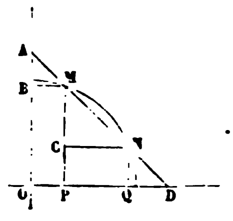
Cette équation donne

$$(1)\qquad x=\delta+\frac{(\delta-\delta')\sqrt{a^2-\delta^2}}{\sqrt{a^2-\delta'^2}-\sqrt{a^2-\delta^2}}.$$

Si l'on fait $\delta=\delta'$, on trouve

$$x=\delta+\frac{0}{0}.$$

Fig. 3.



La ligne AO, dans le cas que nous considérons, est réellement indéterminée, puisque toute droite passant en M passe aussi en N lorsque δ est devenu égal à δ'; cependant le point A tend vers une position *limite* à mesure que le point N s'approche de N; cette position *limite* est l'endroit où la tangente au cercle en M vient rencontrer OA : la quantité x a donc une valeur limite que l'on peut se proposer de déterminer à l'aide de la formule (1). Pour y arriver, il suffit de multiplier par $\sqrt{a^2-\delta'^2}+\sqrt{a^2-\delta^2}$ les deux termes de la fraction qui entre dans la formule (1); on trouve ainsi

$$x=\delta+\frac{(\delta-\delta')\sqrt{a^2-\delta^2}\left(\sqrt{a^2-\delta'^2}+\sqrt{a^2-\delta^2}\right)}{\delta^2-\delta'^2},$$

ou bien

$$x = \delta + \frac{\sqrt{a^2 - \delta^2}\left[\sqrt{a^2 - \delta'^2} + \sqrt{a^2 - \delta^2}\right]}{\delta + \delta'}.$$

Les deux membres de cette formule sont constamment égaux : donc leurs limites sont égales; or la limite de la fraction qui entre dans la formule précédente est égale au quotient des limites de ses deux termes (th. III, p. 116); la limite de $\sqrt{a^2 - \delta'^2}$, quand δ' tend vers δ, est $\sqrt{a^2 - \delta^2}$, comme il est facile de le prouver par un raisonnement très-simple; donc enfin

$$\lim x = \delta + \frac{\sqrt{a^2 - \delta^2} \times 2\sqrt{a^2 - \delta^2}}{2\delta} = \delta + \frac{a^2 - \delta^2}{\delta},$$

ou

$$\lim x = \frac{a^2}{\delta},$$

résultat exact, ainsi qu'il est facile de le constater directement.

Il serait difficile de donner des règles précises pour lever l'indétermination apparente que l'on rencontre dans la résolution des problèmes. Le plus souvent les quantités limites qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ ou même $\frac{\infty}{\infty}$ prennent des valeurs déterminées après la suppression d'un facteur commun aux deux termes de la fraction, qui devient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Ainsi, par exemple, l'expression $\frac{a^2 - b^2}{a - b}\,\frac{h}{2}$, qui représente l'aire d'un trapèze dont la hauteur est h et dont les bases sont a et b, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand on y fait $a = b$, c'est-à-dire quand le trapèze devient un paral-

lélogramme : cette indétermination apparente, ou plutôt cette absurdité apparente, disparaît lorsqu'on a supprimé aux deux termes de la fraction $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ le facteur $a-b$. L'aire du trapèze prend alors la valeur

$$(a+b)\frac{h}{2}.$$

Cette dernière expression est toujours égale à la précédente ; leurs limites sont donc égales lorsque l'on fait tendre b vers a, et l'on trouve, dans ce cas,

$$\frac{2ah}{2} = ah ;$$

c'est l'expression connue de l'aire du parallélogramme.

Proposons-nous de trouver la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{n+1}{n-1}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, cette expression est une de celles qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On a

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} ;$$

donc

$$\lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\lim\frac{1}{n}}{1-\lim\frac{1}{n}} = 1.$$

EXERCICES.

1. Diophante passa dans sa jeunesse le $\frac{1}{6}$ de l'âge qu'il vécut, $\frac{1}{12}$ dans l'adolescence ; ensuite il se maria et passa dans cette union le $\frac{1}{7}$ de sa vie augmenté de 5 ans avant d'avoir un fils, auquel il survécut de 4 ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge où son père est parvenu. Quel âge avait Diophante lorsqu'il mourut? (Traduction d'un passage grec trouvé dans un Recueil d'épigrammes.)

2. a bœufs en m jours ont mangé α mètres carrés d'herbe ; b bœufs en n jours ont mangé β mètres carrés d'herbe : combien c bœufs en p jours mangeront-ils d'herbe, en admettant que l'herbe croisse pendant qu'ils mangent ? (Posé en d'autres termes dans l'*Arithmétique universelle* de Newton.)

3. A quelles heures ont lieu les rencontres des aiguilles d'une montre ?

L'aiguille des heures, celle des minutes et celle des secondes peuvent-elles se rencontrer ailleurs que sur midi ?

4. Un homme entre dans une église avec une somme composée de pièces de 2^{fr} ; il donne aux pauvres autant de sous qu'il a de pièces de 2^{fr} ; Dieu change les pièces de 2^{fr} qui lui restent en pièces de 5^{fr} ; l'homme rentre chez lui avec le double de ce qu'il avait en entrant dans l'église, après avoir dépensé 7 pièces de 5^{fr} : quelle somme avait-il d'abord ?

Les quatre problèmes suivants sont extraits de l'Algèbre d'Euler, où le lecteur pourra trouver des énoncés très-originaux.

5. Quelqu'un a deux gobelets d'argent avec un seul couvercle pour tous les deux ; le premier pèse 12 onces, et si l'on y met le couvercle il pèse deux fois plus que l'autre gobelet ; mais, si l'on couvre l'autre gobelet, celui-ci pèse trois fois plus que le premier : trouver le poids du second gobelet et celui du couvercle.

6. Un père laisse à sa mort quelques enfants avec un bien qu'ils partagent comme il suit

Le premier reçoit 100 écus, plus la dixième partie du reste,
Le deuxième » 200 » »
Le troisième » 300 » »

et ainsi de suite; le bien se trouve ainsi également partagé entre tous les enfants; trouver leur nombre et la part de chacun d'eux.

7. Un capitaine a trois compagnies, l'une de Suisses, l'autre de Souabes, la troisième de Saxons; il veut donner un assaut avec ces troupes et il promet une récompense de [illegible, probably 500] écus à distribuer comme il suit :

Chaque soldat de la compagnie marchant la première à l'assaut recevra un écu, et le reste sera distribué également aux autres compagnies.

Si les Suisses donnent les premiers, chaque soldat des autres compagnies reçoit $\frac{1}{2}$ écu ; si les Souabes donnent les premiers, chaque soldat des autres compagnies reçoit $\frac{1}{3}$ d'écu ; enfin si les Saxons donnent les premiers, chacun des soldats des autres compagnies reçoit $\frac{1}{4}$ d'écu : de combien d'hommes se compose chaque compagnie ?

8. Une femme porte des œufs au marché ; elle en vend à une première personne la moitié plus la moitié d'un œuf ; à une seconde personne la moitié de ce qui lui reste plus la moitié d'un œuf ; à une troisième personne la moitié de ce qui reste plus la moitié d'un œuf ; il se trouve alors qu'elle a tout vendu : combien avait-elle d'œufs en arrivant au marché ?

9. Calculer la hauteur d'un triangle connaissant sa base et la longueur de la parallèle menée à la distance d de cette base et terminée aux deux autres côtés du triangle. Discuter la solution.

10. [illegible] triangle.

[illegible]

s'il n'est pas incompatible, on doit avoir identiquement

$$aA + bB + cC = 0.$$

12. Des formules

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 1, \\ a'x + b'y + c'z &= 1, \\ ax' + by' + cz' &= 1, \\ a'x' + b'y' + c'z' &= 1, \end{aligned}$$

on tire

$$\frac{x - x'}{bc' - cb'} = \frac{y - y'}{ca' - ac'} = \frac{z - z'}{ab' - ba'} = \frac{a - a'}{yz' - zy'} = \frac{b - b'}{zx' - xz'} = \frac{c - c'}{xy' - yx'}.$$

(Plucker).

Le lecteur fera bien de résoudre par l'Algèbre les règles d'intérêt, de partages proportionnels et d'alliage ou de mélange; ces dernières surtout se résolvent ainsi avec une extrême facilité. Voici du reste quelques problèmes que l'on trouve proposés dans les cours d'Arithmétique, mais dont la solution dépend facilement des équations du premier degré.

13. Une fontaine coulant seule remplit un bassin en a heures; une seconde fontaine coulant seule le remplirait en b heures : combien leur faudrait-il de temps pour le remplir si elles coulaient simultanément ?

14. On a deux billets, l'un de 1000^{fr} payable dans 3 mois escompte 3 pour 100, l'autre de 2500^{fr} payable dans deux mois; on propose d'acheter ces deux billets moyennant une somme de 3409^{fr} payable dans 15 jours : à quel taux se trouverait ainsi escompté le second billet ?

15. Un individu achète une montre et sa chaîne; il dépense ainsi la moitié de la somme qu'il possède dans son porte-monnaie; réfléchissant qu'il a fait une mauvaise affaire, il revend sa montre aux trois quarts du prix où il l'a achetée, et sa chaîne au double du prix qu'il l'a payée; il se trouve alors en possession de 200^{fr}; s'il avait revendu sa montre 10^{fr} de plus et sa chaîne 100^{fr}, il serait rentré dans ses fonds : quelle somme possédait-il, et combien a-t-il acheté la chaîne et la montre ?

16. Trouver une fraction qui augmente de $\frac{1}{18}$ quand on ajoute 3 à ses deux termes et qui diminue de $\frac{1}{12}$ quand on retranche 2 de ses deux termes.

17. Un enfant a des billes dans chacune de ses mains; s'il en retire 4 de la main gauche pour les mettre dans la main droite, il aura deux fois plus de billes dans la main droite que dans la main gauche; si au contraire il retire deux billes de la main droite, il aura quatre fois plus de billes dans la main gauche que dans la main droite : combien a-t-il de billes dans chaque main ?

18. On appelle *carré magique* une sorte d'échiquier contenant n^2 cases; dans chaque case on écrit un nombre, de telle sorte que la somme des nombres inscrits dans une même ligne horizontale ou verticale soit la même quelle que soit la ligne considérée. Voici un exemple de carré magique :

6	1	8
7	5	3
2	9	4

On voit que la somme des nombres placés dans une même rangée horizontale ou verticale donne 15; la somme des nombres placés dans une diagonale donne 15 aussi. La formation d'un carré magique dépend de la résolution de plusieurs équations du premier degré; ces équations sont en nombre inférieur à celui des inconnues, mais les solutions doivent être entières.

19. AB désignant la distance de deux points comptée de A vers B sur un axe fixe, AB aura un signe et l'on aura AB = — BA; cela posé, prouver que, si l'on a trois points en ligne droite A, B, C, on a toujours

$$AB + BC = AC;$$

si l'on a quatre points en ligne droite A, B, C, D, on a

$$AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0;$$

si P et Q sont les points où les bissectrices de l'angle A d'un triangle rencontrent la base BC, on a

$$PB.RC + PC.QB = 0.$$

20. Trouver des valeurs de x et y satisfaisant aux inégalités

$$ax + by > c, \quad a'x + b'y > c.$$

21. Trouver la limite des quantités suivantes :

$$\lim \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad \text{pour} \quad x = 1,$$

$$\lim \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \quad \text{pour} \quad a = b,$$

$$\lim \frac{x^3 + x}{x^3 - 1} \quad \text{pour} \quad x = \infty,$$

$$\lim \frac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a} \quad \text{pour} \quad x = a.$$

22. Si l'on joint les milieux A', B', C' des côtés d'un triangle ABC, on obtient un nouveau triangle A'B'C'; si l'on joint les milieux A", B", C" des côtés de A'B'C', on obtient un nouveau triangle A"B"C", et ainsi de suite : prouver que les points A^n, B^n, C^n ont pour limite pour $n = \infty$ le centre de gravité du triangle

23. Soit x un nombre quelconque; posons

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right), \quad x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right), \cdots ;$$

prouver que x_n a pour limite 1 quand $n = \infty$.

24. Inscrire dans un triangle donné un rectangle de périmètre donné. (On calculera la base et la hauteur du rectangle en fonction de la base et de la hauteur du triangle.)

25. Trouver les rayons de deux cercles, connaissant leurs centres et les points de concours de leurs tangentes communes intérieures et extérieures.

26. Calculer les côtés d'un triangle, connaissant trois des rayons des cercles qui touchent ses côtés.

27. Étant données les bases et la hauteur d'un trapèze, calculer la longueur de la ligne parallèle aux bases qui partage ce trapèze en deux parties équivalentes.

28. Dans quel rapport une droite de longueur donnée, parallèle aux bases d'un trapèze, partage-t-elle les côtés non parallèles de ce trapèze ?

29. Par un point donné, on demande de faire passer une droite qui intercepte sur les côtés d'un angle donné deux segments dont la moyenne harmonique soit une ligne donnée.

30. Deux points parcourent des droites OA et OB concourantes avec des vitesses a et b; ils partent en même temps de points A et B : on demande de prouver qu'au bout d'un certain temps (positif ou négatif) ils se trouveront de nouveau à une distance égale à celle qu'ils avaient au moment du départ. (Discuter le résultat.)

N. B. — Il est entendu que les questions de Géométrie posées ci-dessus doivent être résolues avec le seul secours de l'Algèbre.

31. Étant donnés quatre points fixes A, B, C, D dans un plan, pour tout point M de ce plan on aura

$$a.\overline{MA}^2 + b.\overline{MB}^2 + c.\overline{MC}^2 + d.\overline{MD}^2 = p,$$

a, b, c, d, p désignant des nombres qui restent les mêmes quand on fait varier la position du point M. La condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B, C soient en ligne droite est que $d = 0$. Étant donnés les points A, B, C, déterminer D de telle sorte que

$$a = b = c = d.$$

32. Étant donnés cinq points fixes A, B, C, D, E dans l'espace, pour tout point M on aura

$$a.\overline{MA}^2 + b.\overline{MB}^2 + c.\overline{MC}^2 + d.\overline{MD}^2 + e.\overline{ME}^2 = p,$$

a, b, c, d, e, p désignant des nombres indépendants de la position du point M. La condition nécessaire et suffisante pour que A, B, C, D soient dans un même plan est $e = 0$.

33. Trouver un point tel que ses distances à trois droites fixes soient proportionnelles à trois lignes données. Discuter la solution.

34. Trouver dans l'espace un point tel que ses distances à quatre plans fixes soient proportionnelles à quatre nombres donnés. Discuter la solution.

35. Trouver dans un plan un point tel que ses distances à trois points donnés soient proportionnelles à des nombres donnés.

36. Trouver dans l'espace un point tel que ses distances à quatre points donnés soient proportionnelles à des nombres donnés.

37. Sur chaque côté d'un triangle T on donne trois segments, et l'on propose de trouver dans le plan du triangle un point tel que, en le prenant pour sommet d'un triangle ayant pour base l'un des segments en question, les sommes des aires de trois triangles ayant leurs bases sur trois côtés différents du triangle T soient les mêmes.

38. Un cône solide dont la densité est δ est posé par sa base sur un liquide dont la densité est $\Delta > \delta$: les dimensions de ce cône étant données, on demande de combien il s'enfoncera dans le liquide.

CHAPITRE VI.
DES DÉTERMINANTS.

I. — DÉFINITIONS.

Lorsque l'on a un système de n^2 quantités

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

on appelle *lignes* les rangées horizontales ou, si l'on veut, l'ensemble des lettres affectées du même premier indice; les *colonnes* sont les rangées verticales ou l'ensemble des lettres affectées du même second indice. Ainsi a_{ij} sera l'*élément* de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne.

On appelle *déterminant* (*) du système des n^2 éléments (1) la somme de tous les produits obtenus en prenant un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne, de telle sorte que dans aucun de ces produits il ne se trouve deux éléments appartenant à la même ligne ou à la même colonne (c'est-à-dire portant même premier indice ou même second indice); chacun de ces produits porte un signe déterminé par les considérations suivantes.

(*) D'après Gauss et Jacobi; *résultante* d'après Laplace et Cauchy. Cauchy et Jacobi ont aussi employé la dénomination de *sommes alternées* avec la notation $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$. La dénomination de *déterminant* est généralement adoptée.

Considérons le produit

$$(2) \qquad a_{x\xi}a_{y\eta}a_{z\zeta}\ldots a_{p\varpi}a_{q\chi}\ldots a_{s\sigma}a_{t\tau}$$

de n facteurs, qui fait partie du déterminant; effectuons les différences des premiers indices dans l'ordre où ils se présentent, et les différences des seconds indices aussi dans l'ordre où ils se présentent (*), et formons le produit de ces différences, à savoir :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (y-x)(z-x)\ldots(t-x).(z-y)\ldots(t-y)\ldots(t-s) \\ \times(\eta-\xi)(\zeta-\xi)\ldots(\tau-\xi).(\zeta-\eta)\ldots(\tau-\eta)\ldots(\tau-\sigma). \end{array} \right.$$

Si ce produit est positif, on donne au terme (2) le signe $+$; on lui donne le signe $-$ dans le cas contraire.

Je dis que la définition précédente est nette et précise; en d'autres termes, je dis que le signe du produit (2) est bien déterminé et indépendant de l'ordre dans lequel on écrit les facteurs $a_{x\xi}$, $a_{y\eta}$, ... Pour le prouver, il suffit de faire voir que le signe en question ne change pas quand on intervertit l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques, parce qu'alors on pourra, en intervertissant successivement l'ordre d'un certain nombre de facteurs consécutifs, faire passer tel facteur à la place que l'on voudra. Considérons donc les deux facteurs consécutifs

$$a_{p\varpi}, \quad a_{q\chi}$$

du produit (2). Les permuter, c'est permuter dans le produit (3) les lettres p et q d'une part dans la première ligne de ce produit, ϖ et χ d'autre part dans la seconde ligne du même produit (3), or le changement de

(*) J'entends par là que, étant donné l'ordre dans lequel les facteurs a sont écrits dans le produit (2), les différences des indices en question doivent être faites en retranchant toujours l'indice précédent de l'indice suivant.

p en q altère le signe de la seule différence $q - p$, qui devient $p - q$; le changement de χ en ϖ altère le signe de la seule différence $\chi - \varpi$, qui devient $\varpi - \chi$; ainsi, la permutation des facteurs $a_{p\varpi}$, $a_{q\chi}$ introduit un double changement de signe dans le produit (3), c'est-à-dire que, en définitive, ce produit et par suite le produit (2) conservent leur signe quand on permute leurs facteurs.

II. — PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS.

Théorème I. — *Un déterminant conserve sa valeur quand ses lignes deviennent colonnes et que ses colonnes deviennent lignes.*

En effet, soit D le déterminant des quantités (1), D' ce que devient ce déterminant quand on remplace les lignes par les colonnes. D et D' contiennent tous deux le terme $a_{x\xi}a_{y\eta}\ldots a_{t\tau}$ et dans D comme dans D' le signe est celui du produit (3).

Théorème II. — *Lorsque dans un déterminant on permute deux lignes (ou deux colonnes), ce déterminant se trouve multiplié par* -1.

En effet, soient p et q les numéros des lignes permutées; le déterminant est une somme de termes de la forme $\pm \ldots a_{p\varpi}a_{q\chi}\ldots$ (*) où les points indiquent des lettres manquantes ne portant aucune le premier indice p ou q. En permutant les deux lignes en question, on permute dans chaque produit les indices p et q; mais alors le signe du

(*) Nous avons vu que l'on pouvait écrire les facteurs dans un ordre quelconque; nous écrivons alors l'élément $a_{p\varpi}$ à côté de $a_{q\nu}$ pour faciliter le raisonnement.

produit (3) est changé, en sorte que le signe du terme considéré $\pm \ldots a_{p\varpi} a_{q\chi} \ldots$ est simplement changé; cette proposition étant vraie pour tous les termes du déterminant considéré, il en résulte que le signe de ce déterminant se trouve lui-même changé. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Un déterminant dans lequel il existe deux lignes (ou deux colonnes) identiques est nul.*

En effet, supposons que la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ ligne soient identiques : en les permutant, on n'altère évidemment pas le déterminant, qui reste identique à lui-même; mais, d'après le théorème précédent, il doit se trouver multiplié par -1. En appelant D la valeur du déterminant en question, on doit donc avoir $D = -D$, c'est-à-dire $D = 0$.

C. Q. F. D.

Il est bon de faire connaître la définition que l'on donne souvent encore du signe de chaque terme dans un déterminant. On suppose un terme quelconque ordonné par rapport à ses facteurs de telle sorte que, par exemple, les premiers indices aillent en croissant. On dit alors que le signe du terme est $+$ *si le nombre des inversions est pair et* $-$ *si le nombre des inversions est impair;* d'ailleurs deux lettres forment une inversion si le second indice de la première est plus grand que le second indice de la seconde. Cette définition est comprise dans la nôtre, puisque nous avons prouvé que nous pouvions écrire les facteurs d'un produit dans un ordre arbitraire sans changer son signe.

Théorème IV. — *Si dans un déterminant tous les éléments d'une même ligne (ou d'une même colonne) sont nuls à l'exception d'un seul, ce déterminant se réduit au produit de cet élément par un déterminant de degré moindre.*

En effet, considérons le déterminant (1) et supposons d'abord $a_{12} = a_{13} = a_{14} = \ldots = a_{1n} = 0$ et $a_{11} \gtrless 0$. Si nous appelons ε le signe du produit

$$P = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\ldots(\nu - \alpha)(\gamma - \beta)(\nu - \beta)\ldots(\nu - \mu),$$

le déterminant (1) pourra se représenter par le symbole

$$\sum \varepsilon a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n-1\mu} a_{n\nu};$$

en supprimant alors les termes pour lesquels $\alpha > 1$, lesquels sont nuls, puisque $a_{1\alpha}$ est nul pour $\alpha > 1$, il reste

$$\text{(D)} \qquad a_{11} \sum \varepsilon' a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu},$$

ε' désignant ce que devient le signe de P pour $\alpha = 1$. Ce signe est évidemment celui du produit

$$P' = (\gamma - \beta)\ldots(\nu - \beta)\ldots(\mu - \nu).$$

On voit immédiatement alors que l'expression (D) est, par définition, égale au produit de a_{11} par le déterminant obtenu en supprimant dans (1) la première ligne et la première colonne.

Supposons maintenant que tous les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne soient nuls, à l'exception de a_{ij}. Échangeons la $i^{\text{ième}}$ ligne successivement avec chacune des $i - 1$ lignes placées avant elle; le déterminant se trouvera multiplié par $(-1)^{i-1}$, mais la $i^{\text{ième}}$ ligne sera devenue la première. Échangeons la $j^{\text{ième}}$ colonne successivement avec chacune des précédentes; elle deviendra la première, et le déterminant se trouvera multiplié par $(-1)^{i-1} \times (-1)^{j-1}$ ou par $(-1)^{i+j}$. Toutes les lignes et toutes les colonnes auront conservé leur ordre, à l'exception de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne; mais l'élément a_{ij} occupe la première place,

et nous sommes ramenés au cas examiné tout à l'heure. Ainsi, dans le déterminant (1), le coefficient de a_{ij} est égal au produit de $(-1)^{i+j}$ par le déterminant obtenu en supprimant dans (1) la $i^{\text{ième}}$ et la $j^{\text{ième}}$ colonne qui contiennent a_{ij}.

On verrait de la même façon que le coefficient de $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ est le déterminant obtenu en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes, etc., et l'on peut ainsi décomposer un déterminant quelconque en une somme de produits de déterminants de degrés moindres. Nous n'insistons pas sur ce point, qui n'offre pas de grandes difficultés. Le problème suivant va éclaircir ce que nous venons de dire.

Problème. — *Étant donné le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = \mathrm{D},$$

on propose de l'ordonner suivant les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne.

En d'autres termes, si nous posons par exemple

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}_i a_i + \mathrm{B}_i b_i + \ldots + \mathrm{L}_i l_i,$$

il s'agit de déterminer A_i, B_i, ..., L_i. Pour y parvenir, on observe que $\mathrm{A}_i a_i$ n'est autre chose que ce que devient D quand on y suppose

$$b_i = 0, \quad c_i = 0, \quad \ldots, \quad l_i = 0,$$

que $\mathrm{B}_i b_i$ est la valeur de D pour

$$a_i = 0, \quad c_i = 0, \quad \ldots, \quad l_i = 0, \quad \ldots.$$

On a donc, en vertu du théorème précédent,

$$\mathrm{A}_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i-1} & c_{i-1} & \dots & l_{i-1} \\ b_{i+1} & c_{i+1} & \dots & l_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B}_i = (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1} & c_{i-1} & \dots & l_{i-1} \\ a_{i+1} & c_{i+1} & \dots & l_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}, \quad \dots\dots$$

A_i, B_i, ... sont ce que l'on appelle les *déterminants mineurs* du déterminant (1).

En général, on appelle *déterminants mineurs* d'un déterminant ceux que l'on obtient en supprimant un nombre quelconque de lignes et un égal nombre de colonnes; l'*ordre* d'un mineur est le nombre de lignes que l'on a supprimées dans le déterminant primitif.)

On trouve ainsi successivement

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 c_1 b_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 c_1 b_2$$

....

III. — RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉQUATIONS LINÉAIRES.

C'est en essayant de trouver des formules générales pour la résolution des équations *linéaires* ou du premier degré que les géomètres sont arrivés à la notion des déterminants. En étudiant avec soin les propriétés du dénominateur commun des inconnues dans les équations à deux, trois et quatre inconnues, ils ont fini par y découvrir une loi de formation qui n'est autre que celle des déterminants.

Considérons le système d'équations suivant, dans lequel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désigneront les inconnues et dans lequel les autres lettres désigneront des coefficients indépendants des inconnues :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n = s_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n = s_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{ji}x_i + \ldots + a_{jn}x_n = s_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}x_n = s_n. \end{array}\right.$$

Désignons par D le déterminant formé avec tous les coefficients des inconnues pris dans l'ordre où ils se présentent; ainsi, soit

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

désignons par A_{ij} en général le déterminant mineur obtenu en supprimant la ligne et la colonne qui contiennent l'élément a_{ij}, ou, si l'on veut, la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne. On pourra ordonner D, suivant les éléments de sa première

colonne ; A_{ij} sera le coefficient de a_{ij} dans D et l'on aura (p. 132)

$$D = A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \ldots + A_{n1}a_{n1}; \tag{2}$$

mais on aura aussi (p. 130)

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \ldots + A_{n1}a_{n2}, \\ 0 = A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + \ldots + A_{n1}a_{n3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \ldots + A_{n1}a_{nn}. \end{array}\right. \tag{3}$$

En effet, les seconds membres de ces équations ne sont autre chose que le déterminant D, dans lequel on a remplacé la première colonne par la seconde, la troisième, etc., la $n^{\text{ième}}$. Cela posé, nous examinerons d'abord le cas où tous les déterminants mineurs A_{11}, A_{21}, ..., A_{n1} ne sont pas nuls à la fois.

En multipliant alors la première équation (1) par A_{11}, la seconde par A_{21}, la suivante par A_{31} et ainsi de suite, et en ajoutant les résultats, on obtiendra une conséquence légitime de ces équations (p. 79) qui pourra remplacer l'une quelconque d'entre elles. Or dans le résultat, en vertu de (2), le coefficient de x_1 sera D ; celui de x_2, celui de x_3, ... seront nuls ; ils sont en effet égaux aux seconds membres des équations (3), et l'on aura simplement

$$Dx_1 = A_{11}s_1 + A_{21}s_2 + \ldots + A_{n1}s_n, \tag{4}$$

d'où l'on conclura la valeur de l'inconnue x_1 :

$$x_1 = \frac{A_{11}s_1 + A_{21}s_2 + \ldots + A_{n1}s_n}{D}.$$

On aurait de la même façon

$$x_i = \frac{A_{1i}s_1 + A_{2i}s_2 + \ldots + A_{ni}s_n}{D}.$$

Ainsi, quand les mineurs de D ne sont pas nuls, on peut énoncer la règle suivante, dite de Cramer :

Théorème. — *Les racines d'un système d'équations linéaires, en nombre égal à celui des inconnues, sont des fractions ayant pour dénominateur commun le déterminant du système des coefficients des inconnues et pour numérateurs les déterminants obtenus en remplaçant dans le dénominateur commun la colonne qui contient les coefficients de l'inconnue que l'on cherche par une colonne formée des seconds membres des équations proposées.*

IV. — DISCUSSION DES FORMULES PRÉCÉDENTES

Les conclusions précédentes tomberaient en défaut si le dénominateur D était nul. En effet, la formule (4), *conséquence légitime* des équations (1), serait en général absurde, le premier membre étant nul et le second différent de zéro; le système (1) serait donc lui-même absurde. Toutefois, si le déterminant

$$A_{11}s_1 + A_{21}s_2 + \ldots + A_{n1}s_1$$

était nul aussi, la formule (4) se réduirait à l'identité $0 = 0$, qui n'aurait plus rien d'absurde; mais alors, en multipliant la deuxième équation (1) par A_{21}, la troisième par A_{31}, etc., et en les ajoutant, on aurait une équation qui, en vertu des formules (2), (3), (4), se réduirait identiquement à

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = A_{11}s_1.$$

C'est la première équation (1) multipliée par A_{11}. La première équation (1) est donc une conséquence des autres, et, x_1 étant choisi arbitrairement, $n-1$ des équations (1) serviront à calculer les autres inconnues, si leur déterminant n'est pas nul.

Si A_{11}, A_{21}, ..., A_{n1} étaient tous nuls, la formule (4) serait bien une identité, mais on ne serait plus en droit de conclure que les équations (1) forment un système indéterminé ; en effet, (4) ne serait plus une conséquence du système (1) puisqu'on l'obtient en ajoutant les équations de ce système (1) multipliées par zéro, ce qui n'a aucun sens.

Il reste donc à examiner le cas où tous les déterminants mineurs A_{ij} sont nuls. Ce cas a été traité pour la première fois par M. Fonténé, maître d'études au lycée Saint-Louis, et par M. Rouché.

Nous supposerons en général que tous les déterminants mineurs obtenus en supprimant $i-1$ lignes et $i-1$ colonnes dans D soient nuls (ce qui suppose les déterminants mineurs de degrés supérieurs nuls ainsi que D). Mais nous supposerons que l'un des déterminants mineurs obtenus en supprimant i lignes et i colonnes ne soit pas nul ; ce sera, si l'on veut, le déterminant obtenu en ôtant dans D les i premières lignes et les i premières colonnes. Écrivons alors nos $n-i$ dernières équations et l'une des autres, la $j^{\text{ième}}$ par exemple, comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{j,i}x_i + a_{j,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{j,n}x_n = s_j - a_{j,1}x_1 - \ldots - a_{j,i-1}x_{i-1}, \\ a_{i+1,i}x_i + a_{i+1,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{i+1,n}x_n = s_{i+1} - a_{i+1,1}x_1 - \ldots - a_{i+1,i-1}x_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,i}x_i + a_{n,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{n,n}x_n = s_n - a_{n,1}x_1 - \ldots - a_{n,i-1}x_{i-1}. \end{array}\right.$$

Si l'on y considère x_1, x_2, ..., x_{i-1} comme donnés, le déterminant Δ du système des inconnues x_i, x_{i+1}, ..., x_n sera nul ; mais le mineur de ce déterminant qui multiplie a_{ji} ne sera pas nul par hypothèse (c'est celui que l'on obtient en supprimant dans D les i premières lignes et les i premières colonnes). Appelant alors Δ_j, Δ_{i+1}, ..., Δ_n les coefficients de a_{ji}, $a_{i+1,i}$, ..., $a_{n\,i}$ dans Δ, on aura en

ajoutant les formules (5), après les avoir multipliées respectivement par $\Delta_j, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_n$,

$$0 = \Delta_j s_j + \Delta_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \Delta_n s_n,$$

car tous les coefficients tels que

$$\Delta_j a_{jk} + \Delta_{i+1} a_{i+1,k} + \ldots + \Delta_n a_{nk}$$

sont des déterminants mineurs de D nuls par hypothèse.

Si donc une ou plusieurs des quantités telles que

$$\Delta_j s_j + \Delta_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \Delta_n s_n$$

n'est pas nulle identiquement, en supposant

$$j = 1, 2, 3, \ldots, i,$$

le système (1) *sera incompatible, sinon il sera indéterminé; la première équation* (5) *sera une conséquence des suivantes, ainsi que toutes les équations* (1) *non écrites dans le groupe* (5), *en sorte que i des quantités x pourront être choisies arbitrairement; les autres auront des valeurs bien déterminées, exprimées au moyen des premières.*

V. — REMARQUES.

Remarque I. — La règle de Cramer montre que les inconnues sont des fonctions linéaires des seconds membres des équations (1).

Remarque II. — Le système d'équations à n inconnues

$$\begin{array}{l} a_1 \;\; x + b_1 \;\; y + c_1 \;\; z + \ldots + l_1 \;\; u = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + l_{n-1} u = 0 \end{array}$$

est évidemment indéterminé dans le cas général; mais, si l'on divise chacune des équations par u et si l'on considère

les rapports $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \ldots$, ils auront des valeurs déterminées et l'on aura

$$x : \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & l_{n-1} \end{vmatrix} = y : - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & l_{n-1} \end{vmatrix} = \ldots .$$

Remarque III. — Si l'on veut éliminer les n quantités $x, y, z, \ldots, u$ entre les $n+1$ équations

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} a_1 \; x + b_1 \; y + \ldots + l_1 \; u + s_1 \; = 0, \\ a_2 \; x + b_2 \; y + \ldots + l_2 \; u + s_2 \; = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n+1} x + b_{n+1} y + \ldots + l_{n+1} u + s_{n+1} = 0, \end{cases}$$

il suffit de porter dans la dernière les valeurs de $x, y, z, \ldots, u$ tirées des n premières ; on trouve ainsi

$$a_{n+1} \begin{vmatrix} -s_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ -s_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -s_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} + b_{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - s_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 - s_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_n - s_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ s_{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = 0.$$

Si actuellement, dans chacun des déterminants qui figurent dans l'équation précédente, on place la colonne des s la dernière, ces déterminants vont être multipliés par certaines puissances de (-1), celui qui multiplie l_{n+1} excepté, car dans celui-là la colonne des s est la dernière ; les signes de ces déterminants seront alternativement $+$ et $-$; si enfin on change les signes dans la colonne des s, chaque déterminant change de signe, excepté le coefficient de s_{n+1} ; on voit ainsi (problème, p. 132) que le résultat

cherché de l'élimination est

$$(\mathrm{T})\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 & s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \dots & l_{n+1} & s_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation s'appelle la *résultante des équations proposées.*

Autrement, éliminer $x, y, \dots, u$ entre les équations (S) ou éliminer $x, y, \dots, u, t$ entre les suivantes,

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 \quad x + b_1 \quad y + \dots + l_1 \quad u + s_1 \quad t = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n+1} x + b_{n+1} y + \dots + l_{n+1} u + s_{n+1} t = 0, \end{array}\right.$$

qui sont homogènes et dans lesquelles on peut considérer les rapports $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{u}{t}$ comme les quantités à éliminer, sont deux opérations équivalentes. Or, éliminer $x, y, \dots, u, t$ entre les formules (R), c'est écrire que ces équations ont encore lieu pour des valeurs de $x, y, z, \dots, u, t$ différentes de zéro; c'est donc exprimer que le système (R) est indéterminé, ce qui se fera en égalant à zéro le déterminant des coefficients (p. 137).

Remarque IV. — Pour qu'un déterminant soit nul, il faut qu'il existe une même relation linéaire et homogène constante entre les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne; l'équation (T), en effet, exprime qu'il existe des quantités $x, y, z, \dots, u$ satisfaisant aux équations (S).

Remarque V. — Lorsque deux systèmes d'équations linéaires ont les mêmes solutions, l'une quelconque des équations du second système peut s'obtenir en ajoutant les

équations du premier multipliées respectivement par des facteurs convenablement choisis.

En effet, soit

$$(U) \qquad b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = t_1,$$

une équation satisfaite pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont à (1); puisque les équations (1) ont une solution, D n'est pas nul et l'on pourra, d'après la règle de Cramer, calculer des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que l'on ait

$$\lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \ldots + \lambda_n a_{ni} = b_i$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Si l'on multiplie alors la première équation (1) par λ_1, la seconde par λ_2, ... et si on les ajoute, on trouve

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \ldots + \lambda_n s_n.$$

Cette équation et (U) ont lieu pour les mêmes valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; leurs seconds membres sont donc identiques: donc enfin (U) s'obtient en multipliant les équations (1) par des facteurs λ convenablement choisis et en les ajoutant. C. Q. F. D.

VI. — CONDITION POUR QUE DES FONCTIONS LINÉAIRES SOIENT INDÉPENDANTES.

Considérons p fonctions linéaires et homogènes f_1, $f_2, \ldots, f_p$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, p étant censé moindre que $n+1$. Pour qu'une nouvelle fonction f_{p+1} dépende de celles-ci, ou si l'on veut pour que les équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{p+1} = 0.$$

soient indéterminées (les p premières étant supposées telles qu'elles déterminent $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonction des autres x, la nouvelle équation ne pouvant pas servir

à déterminer une inconnue de plus), il faudra que λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ désignant des quantités indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on ait identiquement

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{p+1} f_{p+1} = 0,$$

ce qui fournira en égalant à zéro les coefficients de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, n équations linéaires en $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$, qui devront rentrer dans $p+1$ d'entre elles, cela exige que $n-p$ déterminants à $(p+1)^2$ éléments soient nuls. *Il faut donc $n-p$ conditions distinctes, pour exprimer que $p+1$ fonctions linéaires de n variables ne sont pas distinctes.*

Il résulte de là que, en égalant à zéro les mineurs d'un certain ordre d'un déterminant à n^2 éléments, toutes les équations ainsi obtenues ne sont pas distinctes.

Si l'on veut exprimer, par exemple, que tous les mineurs à $p+1$ lignes et $p+1$ colonnes sont nuls, il faudra exprimer que p fonctions linéaires ayant pour coefficients les éléments des p premières lignes étant données, les $n-p$ fonctions linéaires ayant les autres éléments pour coefficients ne sont pas distinctes de celles-ci. En exprimant que chacune de ces $m-p$ fonctions linéaires dépend des premières, on devra écrire $m-p$ conditions. Donc, en tout $(n-p)^2$ conditions.

En particulier, si l'on exprime que tous les mineurs du premier ordre d'un déterminant sont nuls, on n'obtient que $(n-1)^2$ conditions; en exprimant que ceux du second ordre sont nuls, on en obtient $(n-2)^2$, etc.

VII. — SUR DES SIMPLIFICATIONS RELATIVES AU CALCUL DES DÉTERMINANTS.

Pour ajouter deux déterminants qui ne diffèrent que par une seule rangée, il suffit d'ajouter terme à terme

les rangées non identiques; c'est ce qu'il est facile de prouver en mettant les deux déterminants sous la forme

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n,$$
$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \ldots + A_n \alpha_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les éléments des colonnes qui diffèrent. On trouve alors pour somme des déterminants en question

$$A_1(a_1 + \alpha_1) + \ldots + A_n(a_n + \alpha_n),$$

ce qui démontre la règle que nous avions énoncée.

Cette règle n'est pas sans importance : il en résulte, en effet, qu'un déterminant ne change pas de valeur quand aux termes d'une rangée on ajoute ceux d'une rangée parallèle multipliés par un facteur constant, car cette opération revient à ajouter au déterminant proposé un déterminant dans lequel une rangée a ses termes équimultiples d'une rangée parallèle, c'est-à-dire nul. En appliquant cette remarque, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous donnerons encore la démonstration d'une formule remarquable.

Proposons-nous d'évaluer le produit des différences de n quantités

$$\left.\begin{array}{r} (b-a)(c-a)(d-a)\ldots(l-a) \\ (c-b)(d-b)\ldots(l-b) \\ (d-c)\ldots(l-c) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (l-k) \end{array}\right\} = P.$$

Si l'on considère le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^{n-1} \\ 1 & c & c^2 & \dots & c^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \dots & \dots \\ 1 & l & l^2 & \dots & l^{n-1} \end{vmatrix},$$

D et P sont deux polynômes du degré $n-1$ en a qui se réduisent à zéro pour les $n-1$ valeurs $b, c, \dots, l$ de a; ils sont donc tous deux égaux au produit de

$$(a-b)(a-c)\dots(a-l)$$

par une quantité indépendante de a; en d'autres termes, leur rapport est indépendant de a (*voir* p. 42). On démontrerait de la même façon que leur rapport est indépendant de $b, c, \dots, l$; pour déterminer ce rapport, il suffit d'observer que les termes en $1.b.c^2\dots l^{n-1}$ ont tous deux pour coefficients l'unité dans P et dans D, et, par suite (p. 45, Remarque I), on a $P = D$. C. Q. F. D.

On peut conclure de là que le résultat de l'élimination de $x, y, z, \dots, u$ entre les équations

$$\begin{aligned} &x + y + z + \dots + u = 0, \\ &ax + by + cz + \dots + lu = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &a^{n-1}x + b^{n-1}y + \dots + l^{n-1}u = 0 \end{aligned}$$

s'obtient en égalant à zéro le produit des différences des quantités $a, b, c, \dots, l$; si donc toutes ces quantités sont inégales, les équations précédentes sont compatibles.

VIII. — MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS.

Lemme I. — *Soient*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

deux déterminants du même ordre.

Le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & p_{n1} & \dots & p_{nn} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

dans lequel tous les éléments placés au-dessous des éléments a sont nuls, est égal à AB.

En effet, le déterminant C se composera de termes contenant n éléments a et de termes contenant moins de n éléments a. Or un terme qui contient moins de n éléments a contient au moins un élément appartenant aux colonnes des a, mais pris en dehors des lignes des a, c'est-à-dire un élément nul, et sera nul; donc le développement du déterminant C ne se composera que des termes contenant n éléments a, et par suite n éléments b; il sera donc indépendant des p.

Désignons par P le nombre des différences négatives que l'on peut former avec les indices $\alpha, \beta, \dots, \delta$, et par Q le nombre des différences négatives que l'on peut former avec les indices $\lambda, \mu, \dots, \rho$; le déterminant C sera de la forme

$$C = \Sigma(-1)^{P+Q} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\delta} b_{1\lambda} b_{2\mu} \dots b_{n\rho},$$

le signe Σ se rapportant aux indices $\alpha, \beta, \dots, \delta, \lambda, \mu, \dots, \rho$. On peut encore écrire

$$C = \Sigma(-1)^{P} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\delta} [\Sigma(-1)^{Q} b_{1\lambda} b_{2\mu} \dots b_{n\rho}],$$

c'est-à-dire, par définition,

$$C = \Sigma(-1)^{P} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\delta} B = AB.$$

Ainsi on a bien $C = AB$.

Lemme II. — *On verrait de même que*

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \\ a_{11} & \ldots & a_{1n} & p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & p_{n1} & \ldots & p_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{AB}(-1)^n.$$

On passe, en effet, de ce déterminant au déterminant C en faisant n permutations de lignes.

D'après le lemme I on a

$$(2)\quad \mathrm{AB} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ceci posé, 1° multiplions la $n+1^{\text{ième}}$ colonne par a_{11}, la $n+2^{\text{ième}}$ par a_{21}, ..., la dernière par a_{n1}, et ajoutons ces colonnes ainsi modifiées à la première; 2° multiplions la $n+1^{\text{ième}}$ colonne par a_{12}, la $n+2^{\text{ième}}$ par a_{22}, .., la dernière par a_{n2}, et ajoutons ces colonnes ainsi modifiées à la seconde, et ainsi de suite. Si nous faisons, pour abréger l'écriture,

$$\begin{gathered} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \ldots + a_{n1}b_{1n} = c_{11}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1i}b_{j1} + a_{2i}b_{j2} + \ldots + a_{ni}b_{jn} = c_{ji}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

la formule (1) deviendra

$$AB = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ c_{11} & \ldots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

ou, en vertu du lemme II,

$$(3) \qquad AB = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

C'est dans cette dernière égalité que consiste la règle donnée par Binet et par Cauchy pour la multiplication de deux déterminants.

La formule (3) donne lieu encore à trois autres formules, que l'on obtient en changeant les lignes en colonnes dans les déterminants A et B. Ainsi, dans la formule (3), on peut supposer à volonté

$$c_{ij} = a_{1i} b_{1j} + a_{2i} b_{2j} + \ldots + a_{ni} b_{nj},$$

ou

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj},$$

ou

$$c_{ij} = a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2} + \ldots + a_{in} b_{jn},$$

ou

$$c_{ij} = a_{1i} b_{j1} + a_{2i} b_{j2} + \ldots + a_{ni} b_{jn}.$$

Application. — On a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd & ac' + bd' \\ a'c + b'd & a'c' + b'd' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ac + a'c' & ad + a'd' \\ bc + b'c' & bd + b'd' \end{vmatrix} \cdots$$

ce qui donne les identités

$$\begin{aligned}(ab'-ba')(cd'-dc') &= (ac+bd)\ (a'c'+b'd')\\ &\quad -(ac'+bd')\ (a'c-b'd)\\ &= (ac+a'c')(bd+b'd')\\ &\quad -(ad+a'd')(bc+b'c')-\ldots.\end{aligned}$$

Si, par exemple, on fait $a=c$, $b=d$, $a'=c'$, $b'=d'$, on a

$$(ab'-ba')^2=(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2=\ldots.$$

Corollaire I. — Si l'on suppose $a_{n1}=0$, $a_{n2}=0$, ..., $a_{nn}=0$, $a_{n-1\,1}=0$, $a_{n-1\,2}=0$, ..., $a_{n-1\,n}=0$, ..., on voit que le déterminant $\Sigma\pm c_{11}\,c_{22}\ldots c_{nn}$ sera nul, c_{ij} étant défini par l'équation

$$c_{ij}=a_{1i}b_{1j}+a_{2i}b_{2j}+\ldots+a_{ki}b_{kj}\quad (k<n).$$

Corollaire II. — Si l'on forme avec les deux systèmes d'éléments

$$(3)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn}\end{vmatrix},\qquad (4)\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn}\end{vmatrix}$$

les éléments

$$c_{ij}=a_{i1}b_{j1}+a_{i2}b_{j2}+\ldots+a_{in}b_{jn},$$

le déterminant $\Sigma\pm c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$ sera égal à la somme des produits des déterminants obtenus en prenant k colonnes dans les Tableaux (3) et (4).

Cela tient évidemment à ce que, si dans un déterminant

$$\Sigma\pm p_{11}p_{22}\ldots p_{nn}$$

on change p_{11} en $p_{11}+q_{11}+r_{11}$, p_{12} en $p_{12}+q_{12}+r_{12}$, ..., p_{1n} en $p_{1n}+q_{1n}+r_{1n}$, ce déterminant devient

$$\Sigma\pm p_{11}p_{22}\ldots p_{nn}+\Sigma\, q_{11}p_{22}\ldots p_{nn}+\Sigma\pm r_{11}p_{22}\ldots p_{nn}+\ldots$$

Voici une application :

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & a\alpha + b\beta + c\gamma \\ a\alpha - b\beta + c\gamma & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a\alpha + b\beta \\ a\alpha + b\beta & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & b\beta + c\gamma \\ b\beta + c\gamma & \beta^2 + \gamma^2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} c^2 + a^2 & c\gamma + a\alpha^2 \\ c\gamma + a\alpha & \gamma^2 + \alpha c\gamma \end{vmatrix},$$

ce qui revient à l'identité, souvent utile en Géométrie,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2$$
$$= (a\beta - b\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2.$$

EXERCICES ET NOTES

1. On a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

2. Les déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

ont tous deux pour valeur

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2b^2a^2$$

ou

$$-(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

3. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) \\ \quad \times (a + b + c + d). \end{array} \right.$$

4. On a

$$\begin{vmatrix} -1 & -\cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = -1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 4\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)$$

$2p$ désignant $\alpha+\beta+\gamma$.

5. Résoudre le système, à n inconnues $x, y, \ldots, u$,

$$\begin{array}{l} x + y + z + \ldots + u = s_0, \\ ax + by + cz + \ldots + lu = s_1, \\ a^2x + b^2y + c^2z + \ldots + l^2u = s_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{n-1}x + b^{n-1}y + c^{n-1}z + \ldots + l^{n-1}u = s_{n-1}. \end{array}$$

6. Résoudre les équations

$$\begin{array}{l} \frac{x}{a+\lambda} + \frac{y}{b+\lambda} + \ldots + \frac{u}{l+\lambda} = 1, \\ \frac{x}{a+\mu} + \frac{y}{b+\mu} + \ldots + \frac{u}{l+\mu} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{x}{a+\rho} + \frac{y}{b+\rho} + \ldots + \frac{u}{l+\rho} = 1 \quad (*). \end{array}$$

On trouve

$$x = \frac{(a+\lambda)(a+\mu)+\ldots+(a+\rho)}{(b-a)(c-a)+\ldots+(l-a)}, \quad y = \ldots.$$

(*) Ces équations ont été résolues diversement par Binet, Lamé, Jacobi. Elles sont très-importantes en Physique mathématique.

7. Si l'on considère le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

et si l'on désigne par α_{ij} en général le coefficient de a_{ij} dans le développement de D, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

sera ce que l'on appelle le déterminant à éléments réciproques. Cela posé, on vérifiera que

$$\Delta = D^{n-1};$$

pour cela on multipliera D par Δ, et l'on trouvera un déterminant dont tous les éléments seront nuls, à l'exception de ceux qui forment une diagonale et qui seront égaux à D. (CAUCHY.)

8. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\lambda & b+\lambda & c+\lambda \\ 1 & a'+\lambda' & b+\lambda' & c'+\lambda' \\ 1 & a''+\lambda'' & b''+\lambda'' & c''+\lambda'' \end{vmatrix}$$

(SYLVESTER.)

9 Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1-\beta_1} & \frac{1}{\alpha_2-\beta_1} & \frac{1}{\alpha_n-\beta_1} \\ \frac{1}{\alpha_1-\beta_2} & \frac{1}{\alpha_2-\beta_2} & \frac{1}{\alpha_n-\beta_2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{1}{\alpha_1-\beta_n} & \frac{1}{\alpha_2-\beta_n} & \frac{1}{\alpha_n-\beta_n} \end{vmatrix}$$

est égal au produit des différences que l'on peut faire avec les quantités α, multiplié par le produit des différences que l'on peut former avec les quantités β et divisé par le produit de toutes les différences telles que $\alpha_i - \beta_j$.

(CAUCHY.)

10. M. Cayley a appelé *déterminants gauches* ceux dans lesquels on a la relation $a_{ij} + a_{ji} = 0$; si l'on a en outre $a_{ii} = 0$, on dit que le déterminant est gauche et symétrique. Un déterminant gauche et symétrique qui a un nombre impair d'éléments est toujours nul. (On démontre ce théorème en s'appuyant directement sur la définition que nous avons donnée des déterminants et en montrant que les termes $a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\lambda}$ et $a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \ldots a_{\lambda n}$ sont égaux et de signes contraires ou nuls.) (La notation est celle de l'exercice 7.)

Un déterminant gauche et symétrique qui a un nombre pair d'éléments est le carré parfait d'une fonction entière de ses éléments. (Nous ne proposons pas ici la démonstration de ce théorème, mais on pourra la trouver quand on aura lu le dernier Chapitre de cet Ouvrage.) La racine carrée d'un déterminant gauche et symétrique est ce que l'on appelle un *pfaffien*.

(CAYLEY.)

11. Le déterminant $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{n+1\,n+1}$, où $a_{n+1\,i} = a_{1\,n+1} = 1$ pour $i < n+1$ et dans lequel $a_{n+1\,n+1} = 0$, ne change pas de valeur quand on remplace a_{ij} par $a_{ij} + h_i + k_j$, les quantités h_1, h_2, ..., h_n, k_1, k_2, ..., k_n étant arbitraires; pour le prouver, on multiplie le déterminant proposé successivement par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & h_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & h_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et par} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot \\ k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_n & 1 \end{vmatrix}.$$

(SYLVESTER.)

12. *Ouvrages à consulter.* — Baltzer, trad. par Hoüel; Brioschi, trad. par Combescure; l'*Algèbre supérieure*, de Salmon, trad. par Resal; Dostor (c'est l'Ouvrage le plus complet et le plus élémentaire). Le tout en vente chez Gauthier-Villars.

13. Voici un exercice propre à familiariser le lecteur avec le calcul numérique des déterminants. Les quinze déterminants que l'on peut

former en prenant quatre lignes parmi les suivantes sont nuls :

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & a_4 & a_3 \\
0 & a_4 & 0 & -a_2 \\
0 & -a_3 & -a_2 & 0 \\
a_4 & 0 & 0 & a_1 \\
-a_3 & 0 & a_1 & 0 \\
a_2 & a_1 & 0 & 0.
\end{array}$$

14. Un déterminant ne change pas de valeur si l'on change le signe **des éléments** dont la somme des indices est impaire. (JANNI).

15. On a identiquement

$$\begin{vmatrix}
a_1-b_1, & a_1-b_2, & \dots & a_1-b_n \\
a_2-b_1, & a_2-b_2, & \dots & a_2-b_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_n-b_1, & a_n-b_2, & \dots & a_n-b_n
\end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE VII.

DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET DES QUESTIONS QUI EN DÉPENDENT.

I. — DE LA RACINE CARRÉE.

Le carré d'une quantité ou la seconde puissance de cette quantité est, comme on sait, le produit de deux facteurs égaux à cette quantité; il en résulte que tout carré est une quantité essentiellement positive.

On appelle *racine carrée* d'une quantité une quantité qui, multipliée par elle-même, reproduit la première; la racine carrée d'une quantité A se désigne par le symbole $\sqrt{A}$.

Théorème. — 1° *Les quantités négatives n'ont pas de racine carrée; 2° les quantités positives ont deux racines égales et de signes contraires; 3° zéro n'a qu'une racine qui est zéro.*

En effet, soit x la racine carrée de A; on aura, par définition même,

$$x^2 = A.$$

Or, si A est négatif, l'équation précédente n'a pas de racines, puisque le premier membre est positif et le second négatif; si nous supposons alors A positif et si nous désignons par a le nombre positif qui, élevé au carré, donne

A, nous aurons

$$x^2 = a^2$$

ou bien

$$x^2 - a^2 = 0$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$(x - a)(x + a) = 0.$$

Or il n'y a que deux manières d'annuler le premier membre de cette équation : c'est de faire $x - a = 0$ ou $x + a = 0$, d'où l'on tire

$$x = a \quad \text{ou} \quad x = -a,$$

ou, si l'on veut, en représentant par $\pm$ à volonté les signes $+$ et $-$,

$$x = \pm \sqrt{A},$$

$\sqrt{A}$ désignant l'une quelconque des deux valeurs de la racine carrée de A, la valeur positive, par exemple. Si $A = 0$, il est bien clair que de l'équation

$$x^2 = A \quad \text{ou} \quad x^2 = 0$$

on ne pourra conclure que $x = 0$.

Nous avons admis qu'il existait toujours un nombre positif qui, élevé au carré, reproduisait le nombre positif A. Nous avons vu en effet que, s'il n'existait pas de nombre commensurable tel que

$$a^2 = A,$$

on était convenu de définir *racine carrée de* A la limite vers laquelle convergeaient les fractions croissantes dont le carré était inférieur à A. Donc, etc. C. Q. F. D.

Rappelons enfin que le carré d'un binôme $(a + b)$ se compose du carré de a, du double produit de a par b et du

carré de b; c'est ce qu'exprime la formule suivante :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

II. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Nous allons tout d'abord démontrer un théorème qui sera fréquemment employé dans la suite et qui est fondamental dans la théorie des équations du second degré.

THÉORÈME. — A *et* B *étant tous deux rendus positifs, l'équation*

$$(1) \qquad A = B$$

sera équivalente aux deux suivantes :

$$(2) \qquad \sqrt{A} = \sqrt{B}, \quad \sqrt{A} = -\sqrt{B} \quad \text{ou} \quad \sqrt{A} = \pm\sqrt{B}.$$

En effet, la formule (1) peut s'écrire

$$A - B = 0$$

ou

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = 0.$$

Or, le produit $(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B})$ ne peut s'annuler que si l'un de ses facteurs est nul, et, réciproquement, il s'annule dès que l'un de ceux-ci est nul; les valeurs des inconnues qui satisfont à (1) satisfont donc à (2), et *vice versa*.

La forme la plus générale sous laquelle peut se présenter l'équation du second degré est

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

a désignant une quantité essentiellement différente de zéro; b et c sont d'ailleurs quelconques. Pour résoudre cette équation, on commence ordinairement par diviser

chacun des coefficients par a (*), puis on pose

$$(4) \qquad \frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q;$$

elle prend alors la forme

$$(5) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Si l'on observe alors que $x^2 + px$ sont les deux premiers termes du carré de $x + \frac{p}{2}$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, l'équation précédente pourra s'écrire

$$(6) \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0,$$

ou bien, en faisant passer les termes connus dans le second

(*) On peut résoudre directement l'équation (1) de la manière suivante : on la met sous la forme

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

et l'on vérifie aisément, en développant le carré indiqué, l'identité de cette formule avec l'équation (1). On déduit immédiatement de là

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

puis

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

ou

$$x\sqrt{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

ou enfin

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

membre,

(7) $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Jusqu'ici nous n'avons fait subir à l'équation (3) que des transformations incapables d'altérer la valeur des racines.

Appliquons le théorème démontré au commencement de ce paragraphe en observant que la racine du premier membre est $x+\frac{p}{2}$; nous aurons, au lieu de la formule (7),

(8) $$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Mais on peut arriver directement à ce résultat en faisant observer que $x+\frac{p}{2}$ élevé au carré, devant reproduire $\frac{p^2}{4}-q$, est par définition la racine carrée de cette quantité. Or cette racine a deux valeurs $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ et $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; en sorte que l'on a

(9) $$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

pourvu toutefois que $\frac{p^2}{4}-q$ soit positif ou nul. Dans le cas où $\frac{p^2}{4}-q$ serait négatif, l'équation (7) et par suite l'équation (3) n'auraient pas de racines, car il n'existe pas de quantité $x+\frac{p}{2}$ dont le carré soit négatif.

De l'équation (9) on tire enfin

(10) $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Si l'on remplace p et q par leurs valeurs (4), il vient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

ou bien

(11) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Les formules (10) et (11) sont d'un fréquent usage dans l'Analyse ; nous allons en donner immédiatement quelques applications.

Première application. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Nous assimilerons cette équation à l'équation (5), nous ferons $p = -4$, $q = 3$, et, en appliquant la formule (10), nous trouverons

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

ou

$$x = 2 \pm 1;$$

ainsi l'une des racines est 3, l'autre 1, ce que l'on peut vérifier *a posteriori*.

Nous avons vu que, si $\frac{p^2}{4} - q$ était négatif, l'équation du second degré n'admettait pas de racines. La formule (10), dans ce cas, ainsi que la formule (11), deviennent absurdes, en sorte que ces formules mêmes, lorsqu'on cherchera à les appliquer, indiqueront l'absence de racines.

Deuxième application. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 2x + 7 = 0.$$

La formule (10) donne

$$x = 1 \pm \sqrt{1-7}$$

ou bien

$$x = 1 \pm \sqrt{-6};$$

ce résultat montre que l'équation considérée n'a pas de racines.

TROISIÈME APPLICATION. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Nous pourrions encore appliquer la formule (10); mais, comme nous introduirions ainsi des fractions, le coefficient de x n'étant pas divisible par 2, c'est à la formule (11) que nous aurons recours. Nous assimilerons alors l'équation proposée à l'équation (3); nous ferons $a = 1$, $b = 7$, $c = 10$. Nous aurons alors

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2},$$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = -5 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

QUATRIÈME APPLICATION. — *Résoudre l'équation*

$$36x^2 - 12x + 1 = 0.$$

Il faut faire, dans la formule (11), $a = 36$, $b = -12$, $c = 1$; il vient alors

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-144}}{72}$$

ou

$$x = \frac{12}{72} = \frac{1}{6};$$

ici nous ne trouvons qu'une racine.

Avec un peu d'habitude, on simplifie mentalement la formule (11) lorsque b est divisible par 2, et alors c'est la formule

(12) $$x = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a},$$

obtenue en divisant par 2 les deux termes de la fraction qui entre dans le second membre de la formule (11), que l'on applique.

Cinquième application. — *Résoudre l'équation*

$$4x^2 - 8x + 3 = 0.$$

La formule (12) donne

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4},$$

ou

$$= \frac{4 \pm 2}{4},$$

ou

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{2}.$$

L'application de la formule (11) aurait donné des chiffres plus gros; ainsi on aurait trouvé

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8}.$$

III. — DISCUSSION DES RACINES DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

Reprenons l'équation

(1) $$x^2 + px + q = 0.$$

Nous avons trouvé que les racines étaient données par la formule

$$(2) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nous avons vu que, si la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ était négative, il n'y avait pas de racines, et alors la formule (2) devient absurde; on convient dans ce cas de dire que les racines de l'équation (1) sont *imaginaires*.

Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nulle, l'équation (1) n'admet qu'une seule racine; elle est égale à $-\frac{p}{2}$. On convient de dire que l'équation (1) a *deux racines égales* à $-\frac{p}{2}$.

Enfin, lorsque $\frac{p^2}{4} - q$ est positif, on a deux racines dites *réelles et inégales*. On peut observer à ce propos que, si la quantité q est négative, l'équation (1) a toujours deux racines réelles et inégales, car alors $\frac{p^2}{4} - q$ sera toujours positif.

Lorsque dans l'équation

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

c et a sont de signes contraires, il y a forcément une racine positive et une négative, car dans la formule (2) le radical a une valeur absolue plus grande que $-\frac{p}{2}$.

Lorsque, les racines restant réelles, q est positif, on voit que les racines seront de même signe, car alors la valeur absolue du radical dans la formule (2) est moindre que

$-\frac{p}{2}$. Si p est positif, elles seront négatives ; sinon, elles seront positives.

Si nous désignons par x' et x'' les racines de l'équation (1), nous aurons

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$
$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

En ajoutant ces deux formules membre à membre, on trouve

$$x' + x'' = -p.$$

En les multipliant membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} x'x'' &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q. \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La somme des racines de l'équation* (1) *est égale à* $-p$; *leur produit est égal à* q.

Ou, ce qui revient au même :

La somme des racines de l'équation (3) *est égale à* $-\frac{b}{a}$, *leur produit à* $\frac{c}{a}$.

Si donc on se proposait de former une équation du second degré admettant pour racines deux nombres donnés

x' et x'', il suffirait d'écrire

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0.$$

Du reste, en résolvant cette équation, on trouve

$$x = \frac{x' + x'' \pm \sqrt{(x' + x'')^2 - 4x'x''}}{2}$$

ou

$$x = \frac{x' + x''}{2} \pm \frac{x' - x''}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = x' \quad \text{et} \quad x = x''.$$

Il arrive dans certaines questions que l'on connaît la somme s de deux quantités x' et x'' ainsi que leur produit P; pour déterminer ces quantités, il suffit d'observer qu'elles sont racines de l'équation du second degré

$$(4) \qquad x^2 - sx + P = 0.$$

En effet, la somme des racines de cette équation est s, leur produit est P; du reste, il est facile de prouver que l'équation (4) fournit la solution complète du problème. En effet, si l'on pose

$$x' + x'' = s,$$
$$x'x'' = P,$$

on voit, par la première de ces équations, que

$$x'' = s - x',$$

et, par conséquent, la seconde peut s'écrire

$$x'(s - x') = P$$

ou bien

$$x'^2 - sx' + P = 0,$$

ce qui prouve que x' est une racine de l'équation (4). On verrait de même que x'' est racine de la même équation.

Si l'on donnait

$$x' - x'' = d,$$
$$x'x'' = \mathrm{P},$$

x' et $-x''$ seraient racines de l'équation

$$x^2 - dx - \mathrm{P} = 0.$$

Exemple. — *Trouver deux nombres dont la somme fasse 12 et dont le produit fasse 27.*

Ces deux nombres sont les racines de l'équation

$$x^2 - 12x + 27 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 27},$$
$$x = 6 \pm 3,$$

et, par suite, les nombres cherchés sont 9 et 3.

IV. — DISCUSSION DU TRINOME $ax^2 + bx + c$.

Proposons-nous d'étudier la manière dont varie le trinôme

(1) $$y = ax^2 + bx + c$$

lorsque l'on fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Si nous posons, comme plus haut,

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q,$$

la formule (1) donne successivement

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

(2) $$y = a(x^2 + px + q).$$

Nous distinguerons trois cas :

1° $\frac{p^2}{4} - q > 0$. *L'équation $y = 0$ a ses racines réelles et inégales*. Dans ce cas, la formule (2) donne

$$(3) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\right].$$

$\frac{p^2}{4} - q$ étant positif, on peut le poser égal à λ^2, et la formule précédente donne

$$(4) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right].$$

Cette égalité montre que le trinôme y est la différence de deux carrés ; ces carrés sont $\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm a}\right]^2$ et $(\lambda\sqrt{\pm a})^2$, le signe + placé sous le radical convenant au cas où a est positif et le signe — au cas où il est négatif.

Le trinôme y peut encore se mettre sous une autre forme. L'équation (3) peut s'écrire

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2\right]$$

ou

$$y = a\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$

c'est-à-dire, en désignant par x' et x'' les racines de l'équation $y = 0$,

$$(5) \qquad y = a(x - x')(x - x'').$$

Ainsi le trinôme y, dans le cas que nous examinons, est le produit de deux binômes du premier degré. Si nous identifions cette valeur de y avec celle que fournit la for-

mule (2), il vient

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x'')$$

ou bien

$$x^2 + px + q = x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit x, on a (Chap. III, p. 44)

$$-p = (x' + x''), \quad q = x'x''.$$

Nous retrouvons les relations démontrées page 164.

Cela posé, supposons $a > 0$, et reprenons la formule (4):

$$(4) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right].$$

Si nous faisons varier x depuis $-\infty$ jusqu'à $-\frac{p}{2}$, y va décroître, car le seul terme variable $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ décroît et s'annule pour $x = -\frac{p}{2}$. Si nous continuons à faire croître x, le terme $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ va croître et repassera, pour des valeurs de x équidistantes de $-\frac{p}{2}$, par les mêmes valeurs que précédemment, en sorte que la plus petite valeur que peut prendre y correspond à $x = -\frac{p}{2}$, demi-somme des racines de l'équation $y = 0$. Cette valeur est $-a\lambda^2$; du reste, pour $x = \pm\infty$, y est égal à l'infini.

Pour $a = 0$, y est toujours nul.

Enfin, pour $a < 0$, il est facile de voir, sans recommencer la discussion, que y croît depuis $-\infty$ jusqu'à $-a\lambda^2$ lorsque x varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2}$, puis décroît depuis $-a\lambda^2$ jusqu'à $-\infty$ lorsque x varie de $-\frac{p}{2}$ + à ∞.

2° *Supposons* $\frac{p^2}{4} - q = 0$. *L'équation* $y = 0$ *a ses racines égales*. Dans ce cas, on peut écrire, comme plus haut,

$$y = a(x^2 + px + q) = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right].$$

Mais, comme $\frac{p^2}{4} - q = 0$,

$$y = a\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Le trinôme y est donc un carré parfait si a est positif et un carré parfait pris en signe contraire si a est négatif.

x variant de $-\infty$ à $-\frac{p}{2}$, demi-somme des racines, y décroît si a est positif, croît dans le cas contraire; x variant de $-\frac{p}{2}$ à $+\infty$, y croît si a est positif et décroît dans le cas contraire.

3° *Supposons* $\frac{p^2}{4} - q < 0$. *L'équation* $y = 0$ *a ses racines imaginaires*. On a toujours

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\right].$$

Mais, comme $\frac{p^2}{4} - q < 0$, on peut poser

$$-\frac{p^2}{4} + q = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \lambda^2;$$

il vient alors

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2\right],$$

et dans ce cas on voit que y est, au signe près, la somme de deux carrés dont l'un ne contient pas la quantité x; aussi y ne peut-il s'annuler pour aucune valeur attribuée

à cette lettre : c'est ce qui explique pourquoi, dans ce cas, l'équation $y=0$ n'a pas de racines.

Les variations de y s'étudient dans ce cas comme dans le premier; de cette discussion résultent plusieurs faits importants :

1° Si l'équation $y=0$ a ses racines réelles, le trinôme y passe deux fois par zéro; il est de même signe que son premier terme ax^2 quand x n'est pas compris entre les racines, ce qui peut se voir sur la formule

$$y=a(x-x')(x-x'').$$

Il est de signe contraire à son premier terme quand x varie entre les racines x', x''; enfin il est la différence de deux carrés.

2° Si l'équation $y=0$ a ses racines égales, le trinôme y est toujours de même signe que son premier terme ax^2, excepté lorsque x devient égal à l'une des racines; il est un carré parfait.

3° Si l'équation $y=0$ a ses racines imaginaires, le trinôme y conserve toujours le signe de son premier terme; il est, au signe près, égal à la somme de deux carrés.

Dans tous les cas le trinôme atteint sa plus grande ou sa plus petite valeur ou, comme l'on dit, son *maximum* ou son *minimum*, pour $x=-\frac{p}{2}$.

Nous venons de voir que, dans le cas où le trinôme

$$y=ax^2+bx+c$$

égalé à zéro avait ses racines égales, il était un carré parfait, du moins au signe près. Il est facile de démontrer que :

Pour qu'un trinôme du second degré soit un carré parfait, il faut que, égalé à zéro, l'équation résultante ait ses racines égales.

En effet, ax^2+bx+c ne peut être que le carré d'un binôme. Soit $mx+n$ ce binôme; on doit avoir

$$ax^2+bx+c=(mx+n)^2.$$

Or, en égalant $(mx+n)^2$ à zéro, on trouve deux racines égales. Du reste, la formule précédente donne

$$ax^2+bx+c=m^2x^2+2mnx+n^2,$$

et, en identifiant,

$$m^2=a, \quad 2mn=b, \quad n^2=c.$$

On déduit de là

$$m=\sqrt{a} \quad \text{et} \quad n=\sqrt{c},$$

et par suite

$$ax^2+bx+c=(x\sqrt{a}+\sqrt{c})^2.$$

En remplaçant dans l'équation

$$2mn=b$$

m et n par leurs valeurs $\sqrt{a}$ et $\sqrt{c}$, on a

$$2\sqrt{ac}=b,$$

ou bien, en élevant au carré,

$$4ac=b^2, \quad b^2-4ac=0.$$

Nous retrouvons ainsi par une autre voie la condition qui doit être satisfaite pour que l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

ait ses racines égales.

V. — EXAMEN DU CAS OU LE COEFFICIENT x^2 EST TRÈS-PETIT.

La formule

(1) $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

qui donne les racines de l'équation

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

a été démontrée pour toutes les valeurs de a différentes de zéro. Il est intéressant de rechercher ce qu'elle devient quand on y introduit l'hypothèse $a = 0$, qui fait disparaître l'une des racines de l'équation (2) en l'abaissant au premier degré; en d'autres termes, nous allons voir ce que devient la racine qui disparaît pour $a = 0$. Si l'on introduit directement zéro à la place de a dans la formule (1), les racines

$$(3) \qquad x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$(4) \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

prennent respectivement les formes illusoires

$$x' = \frac{0}{0}, \quad x'' = \frac{-2b}{0}.$$

Ces formules ne nous apprennent rien; mais, si nous multiplions les deux termes de la fraction qui représente la valeur de x', formule (3), par $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, et les deux termes de la fraction qui représente la valeur de x'', formule (4), par $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, en observant que l'on a

$$(u - v)(u + v) = u^2 - v^2,$$

on trouve

$$x' = \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})},$$

$$x'' = \frac{4ac}{2a(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})},$$

ou simplement, en supprimant le facteur commun $2a$,

$$x' = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Si l'on fait alors tendre a vers zéro, on voit que $\sqrt{b^2-4ac}$ tend vers b; par suite, x' tend vers $-\frac{c}{b}$, racine de l'équation

$$bx + c = 0,$$

tandis que x'' augmente indéfiniment. Ainsi, en employant un langage figuré dont nous avons fait connaître le sens (p. 113), on peut dire que pour $a=0$ l'une des racines de l'équation (2) devient infinie et que l'autre est égale à $-\frac{c}{b}$.

VI. — DES ÉQUATIONS BICARRÉES.

On appelle *équations bicarrées* les équations de la forme

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0;$$

elles se ramènent immédiatement aux équations du second degré en prenant x^2 pour inconnue. On en conclut

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Une équation bicarrée aura donc en général quatre racines. Si $b^2-4ac<0$, elle n'aura pas de racines, car alors il n'existe pas de valeur pour x^2 qui satisfasse à l'équation (1). Si l'une des quantités comprises dans la formule

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

est négative, l'équation n'aura que deux racines; si elles sont négatives toutes deux, l'équation (1) n'aura pas de racines.

Nous allons faire connaître une formule qui permet de simplifier dans bien des cas le calcul des racines de l'équation (1); les racines de cette équation sont de la forme

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}.$$

Le problème que nous allons nous proposer de résoudre est celui-ci :

Problème. — *A et B étant censés rationnels, on demande de trouver deux nombres u et v rationnels satisfaisant à la relation*

(2) $$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{u}+\sqrt{v}.$$

Remarquons auparavant que, si l'on a

$$m+\sqrt{n}=m'+\sqrt{n'},$$

m, n, m', n' désignant des nombres rationnels, on aura forcément

$$m=m', \quad n=n',$$

si $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n'}$ ne sont pas commensurables. En effet,

$$\sqrt{n}=(m'-m+\sqrt{n'}),$$

et, en élevant au carré,

(3) $$n=(m'-m)^2+n'+2\sqrt{n'}(m'-m).$$

Or le produit $2\sqrt{n'}(m'-m)$ sera incommensurable tant que $m-m'$ ne sera pas nul, car, si ce nombre était commensurable, on pourrait poser

$$2\sqrt{n'}(m'-m)=\frac{\mu}{\nu},$$

μ et ν étant des nombres entiers, d'où

$$\sqrt{n'} = \frac{\mu}{\nu} : 2(m' - m).$$

$\sqrt{n'}$ serait donc égal à un nombre commensurable, ce qui est contre notre hypothèse. Mais alors, si $m \gtrless m'$, le second membre de la formule (3) est incommensurable, le premier ne l'est pas; donc il faut que l'on ait $m = m'$, et par suite $n = n'$.

Cela posé, revenons à la formule (2). En élevant au carré, on a

$$A + \sqrt{B} = u + v + 2\sqrt{uv},$$

d'où nous concluons

$$A = u + v, \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{uv} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}B = uv.$$

Nous ferons ensuite observer que, si le radical $\sqrt{B}$ est pris avec le signe —, les radicaux $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$ devront être pris avec des signes contraires. On connaît ainsi la somme et le produit de u et v; ces quantités (p. 161) sont donc racines de l'équation du second degré

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0.$$

On en déduit

$$u \quad \text{ou} \quad v = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2},$$

et par suite

$$(4) \qquad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Cette formule résoudra le problème toutes les fois que $A^2 - B$ sera un carré parfait. Toutefois, nous ferons observer que la formule (4) est une identité et qu'elle a lieu

dans le cas où les nombres A et B sont tout à fait quelconques. En effet, les deux nombres u et v ont été déterminés par la condition de satisfaire aux formules

$$u + v = A, \quad uv = \frac{1}{4}B,$$

qui satisfont à la condition

$$u + v \pm 2\sqrt{uv} = A \pm \sqrt{B},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{u} \pm \sqrt{v} = \sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$

quels que soient A et B. Du reste, la formule (4) se vérifie aisément en élevant ses deux membres au carré.

Exemple. — Résoudre l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

On a

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Appliquons au calcul de x la formule (4). Pour cela, il faut faire dans cette formule

$$A = -\frac{p}{2}, \quad B = \frac{p^2}{4}, \quad A^2 - B = q;$$

il vient alors

$$x = \pm\left(\sqrt{-\frac{p}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{q}} \pm \sqrt{-\frac{p}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{q}}\right).$$

La transformation en question réussira donc toutes les fois que q sera un carré parfait; ainsi l'équation

$$x^4 - 24x^2 + 36 = 0$$

donnera

$$x = \pm(\sqrt{6 + 3} \pm \sqrt{6 - 3})$$

ou

$$x = \pm(3 \pm \sqrt{3}).$$

VII — PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DU TRINOME $x^4 + px^2 + q$.

Le trinôme $x^4 + px^2 + q$ peut toujours se mettre sous la forme d'un produit de deux trinônes du second degré. Ceci est évident lorsque les racines de l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

sont réelles, en considérant x^2 comme l'inconnue; alors, en effet, en désignant par x' et x'' ces racines, on a

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 - x')(x^2 - x'').$$

Supposons donc x' et x'' imaginaires; alors on a

$$(1) \qquad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

D'un autre côté, en considérant x^4 et q comme les termes extrêmes d'un carré, on a

$$(2) \qquad x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 + (p - 2\sqrt{q})x^2.$$

Mais de la relation (1) on tire successivement, en observant que $q > 0$,

$$p^2 < 4q,$$

$$p < 2\sqrt{q},$$

$$p - 2\sqrt{q} < 0.$$

Si p est négatif, cette formule sera satisfaite d'elle-même. La formule (2) peut alors s'écrire

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 - x^2\left(\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right)^2$$

ou bien

$$x^4 + px^2 + q$$
$$= \left(x^2 + \sqrt{q} - x\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right)\left(x^2 + \sqrt{q} + x\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right).$$

C. Q. F. D.

Applications. — On a

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1),$$
$$x^4 + 1 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2}).$$

VIII. — DES QUESTIONS DE MAXIMUM RÉSOLUBLES PAR DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

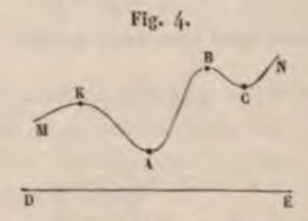
On appelle *maximum* d'une quantité variable une valeur de cette quantité plus grande que celles qui la précèdent et la suivent *immédiatement*.

On appelle *minimum* d'une quantité variable une valeur de cette quantité plus petite que celles qui la précèdent et la suivent *immédiatement*.

Comme on voit, le maximum d'une quantité n'est pas la plus grande de toutes ses valeurs; celle-ci porte le nom de *maximum absolu*. On appelle de même *minimum absolu* d'une quantité la plus petite de toutes les valeurs de cette quantité.

Si nous considérons, par exemple, une courbe sinueuse MN (*fig.* 4) et une droite DE situées dans un

Fig. 4.



même plan, la distance d'un point quelconque de MN

à DE est une quantité variable qui est maximum en B et en K, minimum en A et en C. Un minimum, comme on voit, peut être plus grand que certains maxima.

Problème I. — *Trouver le maximum d'un produit de deux facteurs dont la somme est constante et égale à $2a$.*

Soit x l'une des parties de la somme; l'autre sera $2a - x$, et l'on aura, en désignant par y le produit que l'on veut rendre maximum,

$$y = x(2a - x)$$

ou bien

$$x^2 - 2ax + y = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - y}.$$

A l'inspection de cette formule, on voit que la plus grande valeur que puisse prendre y est a^2, car, pour de plus grandes valeurs de y, x n'existerait plus; pour $y = a^2$, on a $x = a$. Ainsi les deux facteurs du produit y sont égaux lorsque ce produit est maximum absolu; du reste, y peut décroître de a^2 à $-\infty$.

Problème II. — *Trouver le minimum d'une somme de deux facteurs dont le produit est constant et égal à p^2.*

En appelant x l'un des facteurs, l'autre sera $\frac{p^2}{x}$, et, y désignant la somme que l'on veut rendre minimum, on a

$$x + \frac{p^2}{x} = y,$$

ou bien

$$x^2 - xy + p^2 = 0,$$

$$x = \frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4p^2}.$$

On voit immédiatement que l'on peut faire croître y^2 au delà de toute limite, mais que l'on ne peut pas lui donner de valeurs inférieures à $4p^2$. $y = 2p$ est donc un minimum, $y = -2p$ un maximum ; du reste on a alors

$$x = \frac{1}{2}y = \pm p,$$

et l'on reconnaît que les facteurs doivent être égaux et positifs pour qu'il y ait minimum, égaux et négatifs pour qu'il y ait maximum.

Problème III. — *Trouver les maxima et les minima de la fraction*

$$(1) \qquad y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}.$$

Résolvons par rapport à x ; nous aurons successivement

$$x^2(my - a) + x(ny - b) + py - c = 0,$$

$$x = \frac{ny - b \pm \sqrt{(ny - b)^2 - 4(my - a)(py - c)}}{2(my - a)}.$$

Si nous posons alors

$$n^2 - 4mp = \lambda, \quad -2nb + 4mc + 4ap = \mu, \quad b^2 - 4ac = \nu,$$

il vient

$$x = \frac{ny - b \pm \sqrt{\lambda y^2 + \mu y + \nu}}{2(my - a)},$$

formule dans laquelle le trinôme u placé sous le radical devra être positif. Nous aurons trois cas à distinguer :

1° $\mu^2 - 4\lambda\nu > 0$. Le trinôme $\lambda y^2 + \mu y + \nu = u$ peut alors se mettre sous la forme

$$u = \lambda(y - y')(y - y''), \quad \text{où} \quad y' < y''.$$

Si alors λ est positif, le trinôme u ne sera positif que pour toutes les valeurs de y non comprises entre y' et y''; y' sera alors une limite d'accroissement pour y, un maximum. La valeur correspondante de x sera

$$x = \frac{ny' - b}{2(my' - a)}.$$

y'', au contraire, sera un minimum, et la valeur correspondante de x sera

$$x = \frac{ny'' - b}{2(my'' - a)}.$$

Si, au contraire, λ est négatif, u ne sera positif que pour les valeurs de y comprises entre y' et y''; y' sera un minimum, y'' un maximum.

2° Si $\mu^2 - 4\lambda\nu$ est nul, le trinôme u est un carré parfait au facteur λ près; si ce dernier est positif, les valeurs de x prennent la forme

$$x = \frac{Ay + B}{2(my - a)}.$$

Il est clair que y peut passer par tous les états de valeur possibles; il n'y a donc ni maximum ni minimum. Si λ est négatif, on ne peut donner qu'une seule valeur admissible à y, celle qui annule le trinôme u.

3° $\mu^2 - 4\lambda\nu < 0$, dans ce cas, le trinôme u conserve toujours le signe de λ; si donc λ est positif, il n'y a pas de maximum ni de minimum; si λ est négatif, il n'y a pas de valeur admissible pour x : ce cas ne peut pas se présenter. Il est bien clair, en effet, que, si l'on donne à x une certaine valeur dans l'équation (1), il en résultera une autre pour y, et par conséquent, pour certaines valeurs données de y, il existera des valeurs correspondantes pour x.

Revenons au cas où l'on aurait

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0.$$

Si l'on remplace λ, μ, ν par leurs valeurs, on a

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = (4mc + 4ap - 2nb)^2 - 4(n^2 - 4mp)(b^2 - 4ac)$$

ou bien

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 16(m^2c^2 + a^2p^2 + acn^2 + mpb^2 - mnbc - abpn - 2acmp).$$

Si l'on suppose $a = mi$, $b = ni$, $c = pi$, la relation précédente donne

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0.$$

Nous savons, en effet, qu'alors y conserve une valeur indépendante de x.

Il nous reste à examiner le cas où $\lambda = 0$. Dans ce cas, il y a toujours un maximum ou un minimum donné par la formule

$$y = -\frac{\nu}{\mu}.$$

IX. — SUR QUELQUES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM RÉSOLUES A L'AIDE DE PROCÉDÉS ÉLÉMENTAIRES.

Problème I. — *Trouver le maximum d'un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante.*

Considérons d'abord le cas de deux facteurs a et b. On a

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Laissons la somme $a + b$ constante ; il est clair que le premier membre de cette égalité sera maximum quand le

terme soustractif $\frac{(a-b)^2}{4}$ sera minimum. Si donc on peut prendre $a=b$, on aura alors la valeur maximum de ab.

Considérons maintenant un nombre quelconque de facteurs $abc\ldots l$; il est bien clair qu'on ne change pas leur somme en remplaçant a et b par $\frac{a+b}{2}$. Mais, si a et b sont différents, on voit, d'après ce qui précède, que ab sera inférieur à $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; donc, tant qu'il existera deux facteurs inégaux dans le produit, il ne sera pas maximum; donc enfin le maximum cherché a lieu lorsque tous les facteurs sont égaux.

On peut conclure de là le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La moyenne arithmétique de plusieurs quantités* $a, b, c, \ldots, l$ *est plus grande que leur moyenne géométrique.*

En effet,

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}\right)^n$$

est un produit de n facteurs égaux tels que

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{n},$$

dont la somme est

$$a+b+\ldots+l;$$

ce produit est donc la plus grande valeur que puisse prendre le produit $abc\ldots l$ sans que la somme de ses

facteurs cesse de conserver sa valeur; donc

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}\right)^n > abc\ldots l$$

ou

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{n} > \sqrt[n]{abc\ldots l}.$$

C. Q. F. D.

PROBLÈME II. — *Trouver le minimum d'une somme de termes dont le produit est constant.*

Nous considérerons d'abord deux termes a et b; nous aurons alors

$$a+b=\sqrt{(a-b)^2+4ab}.$$

On voit immédiatement que, ab étant constant, $a+b$ sera d'autant plus petit que $(a-b)$ sera plus petit; si donc on peut prendre $a=b$, $a+b$ sera minimum.

En raisonnant comme dans le problème précédent, on démontre facilement que *le minimum d'une somme de termes dont le produit est constant a lieu lorsque ces facteurs sont égaux ou ont entre eux des différences aussi petites que possible.*

PROBLÈME III. — $x+y+z+\ldots$ *est constant : trouver le maximum de*

$$x^m y^n z^p\ldots,$$

expression dans laquelle $m, n, p, \ldots$ sont des nombres constants.

Il est clair que le maximum de $x^m y^n z^p\ldots$ a lieu en même temps que celui de

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p \ldots.$$

Mais l'expression précédente est le produit de

$$m + n + p + \dots$$

facteurs dont la somme est égale à $x + y + z + \dots$, c'est-à-dire constante; le maximum aura donc lieu quand ces facteurs seront égaux ou quand

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{q} = \dots.$$

On verrait de même que ces égalités constituent la condition pour que $x + y + \dots$ soit minimum quand $x^m y^n z^p \dots$ est constant.

Problème IV. — *Trouver le cône maximum inscrit dans une sphère de rayon donné.*

Si l'on désigne par a le rayon de la sphère, par x le rayon de la base et par y la hauteur du cône, la quantité qu'il faut rendre maximum a pour expression $\frac{1}{3}\pi x^2 y$ ou simplement $x^2 y$. Or on trouve facilement entre x et y la relation

$$x^2 = y(2a - y).$$

Si l'on remplace alors x^2 dans l'expression à rendre maximum par la valeur que nous venons de trouver, elle devient

$$y^2(2a - y).$$

Or la somme des facteurs y, $2a - y$ est constante et égale à $2a$; il y aura donc maximum (*voir* le problème précédent) lorsque l'on aura

$$\frac{y}{2} = 2a - y,$$

ou

$$y = \frac{4}{3}a, \quad x = \frac{2}{3}a\sqrt{2}.$$

PROBLÈME V. — *Trouver le cône minimum circonscrit à une sphère de rayon donné a.*

Soient x le rayon de la base, y la hauteur du cône; la quantité à rendre minimum est toujours

(1) $$x^2 y = z.$$

Si du centre de la sphère on abaisse une perpendiculaire sur l'une des génératrices du cône, on obtient une figure dans laquelle deux triangles semblables qu'il est aisé d'apercevoir donnent la relation

$$\frac{y-a}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{(y-a)^2}{x^2+y^2} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Si nous résolvons par rapport à x^2, il vient

$$x^2 = \frac{a^2 y^2}{(y-a)^2 - a^2} = \frac{a^2 y^2}{y^2 - 2ay}.$$

En multipliant par y et en ayant égard à l'équation (1), il vient

$$z = \frac{a^2 y^3}{y^2 - 2ay}.$$

Or z sera minimum quand

$$\frac{1}{z} = \frac{y^2 - 2ay}{a^2 y^3}$$

sera maximum. Or cette dernière expression peut s'écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2a^3}\,\frac{2a}{y}\left(1 - \frac{2a}{y}\right).$$

Si l'on observe que $\frac{1}{2a^3}$ est constant et que la somme des facteurs $\frac{2a}{y}$ et $1-\frac{2a}{y}$ est constante, $\frac{1}{z}$ sera maximum, et par suite z minimum, lorsque l'on aura

$$\frac{2a}{y}=1-\frac{2a}{y} \quad \text{ou} \quad y=4a.$$

Cette donnée suffit pour construire le cône minimum.

NOTES ET EXERCICES.

1. On a employé deux ouvriers gagnant des salaires différents : le premier, ayant été payé au bout d'un certain nombre de jours, a reçu 96 francs, et le second, ayant travaillé six jours de moins, n'a eu que 54 francs; s'il avait travaillé tous les jours, et que l'autre eût manqué six jours, ils auraient reçu tous les deux la même somme. On demande combien de jours chacun d'eux a travaillé et le prix de sa journée.

2. On remet à un banquier deux billets sur la même personne, le premier de 550 francs, payable dans sept mois, le second de 720 francs, payable dans quatre mois, et il donne pour le tout une somme de 1200 francs. On demande quel est le taux annuel de l'intérêt d'après lequel ces billets ont été escomptés.

3. Dans quelle direction faut-il lancer une bille de billard pour qu'après deux réflexions elle vienne repasser par le point de départ? On supposera l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion; on supposera le billard circulaire (dans ce cas la solution dépendra d'une équation du troisième degré dont on connaît *à priori* une racine, ce qui permet de la ramener au second); on supposera aussi le billard composé de deux bandes rectilignes indéfinies (pour que le problème soit possible dans ce cas, il faut que l'angle des bandes soit aigu).

4. Trouver sur une droite donnée un point tel que la somme des carrés de ses distances à d'autres points donnés sur cette droite soit

égale à un nombre donné m. Discuter le problème et dire quelle est la plus petite valeur que l'on puisse adopter pour m.

5. Trouver sur une droite donnée AB un point M également éclairé de deux lumières, d'intensités a et b, placées en A et B respectivement.

6. Trouver deux nombres connaissant leur moyenne arithmétique et leur moyenne géométrique. Conclure de la discussion que la moyenne arithmétique de deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique.

7. Résoudre les équations

$$(1)\ \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=b^2, \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x\pm y=b, \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x^3-y^3=a^3, \\ x-y=b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-y^2=a^2, \\ xy=b^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ xy+yz+zx=b^2, \\ x+y-z=c, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=a, \\ xy=b^2. \end{cases}$$

Pour résoudre (1), on remarque que x^2 et y^2 sont racines de

$$z^2-a^2z+b^4=0;$$

(2) se ramène à (1) en élevant la seconde équation au carré et en retranchant la première; (3) se résout en divisant la première équation du système par la seconde.

8. Résoudre en nombres entiers l'équation $z^2=x^2+y^2$.

Solution. — On a $x^2=(z+y)(z-y)$; on pose alors $z+y=a^2$, $z-y=b^2$, a^2 et b^2 étant des carrés de même parité, afin que

$$z=\frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{a^2-b^2}{2}$$

soient entiers.

Exemples :

$$a=1,\quad b=3;\quad \text{alors}\quad y=4,\quad z=5,\quad x=3,$$
$$a=2,\quad b=4;\quad \text{»}\quad y=6,\quad z=10,\quad x=8.$$

9. Pour résoudre une inégalité de la forme

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{ou} \quad <0,$$

on observe que ax^2+bx+c est de même signe ou de signe contraire à son premier terme selon que x est compris en dehors ou dans l'intervalle compris entre les racines. Cela posé, résoudre les inégalités

$$x^2-4x+1>5,$$
$$x^2+x+1>0,$$
$$(x-a)(x-b)>c,$$

ou montrer qu'elles ne peuvent pas être satisfaites.

10. Résoudre l'inégalité

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \gtrless \alpha.$$

On ne chassera pas le dénominateur; pourquoi serait-ce une faute? On fera passer α dans le premier membre, et l'on sera ramené à résoudre une inégalité de la forme

$$(1) \qquad \frac{Ax^2+Bx+C}{a'x^2+b'x+c'} \gtrless 0.$$

Pour résoudre cette inégalité, on décomposera les deux termes de la fraction en facteurs du premier degré, si c'est possible. Si aucun des deux termes de la fraction n'est décomposable en facteurs du premier degré, les racines de ces deux termes seront imaginaires, ces deux termes conserveront toujours le même signe, et l'inégalité (1) sera ou toujours satisfaite ou toujours impossible. Si un seul terme a ses racines imaginaires, il conserve son signe, et l'autre terme change de signe quand x passe par les racines de ce terme égalé à zéro. Soient α, β les racines rangées par ordre de grandeur. Supposons a' et A positifs; la fraction aura le signe + quand x variera de $-\infty$ à α, le signe − quand x variera de α à β, et le signe + quand x variera de β à $+\infty$. Si les deux termes de la fraction sont décomposables en facteurs du premier degré, en appelant α, β, γ, δ les racines des équations $Ax^2+Bx+C=0$, $a'x+b'x+c'=0$ rangées par ordre de grandeur, la fraction aura le signe de Aa' quand x variera de $-\infty$ à α, puis changera successivement de signe seulement pour $x=\beta$, γ, δ.

Résoudre ainsi

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}>0, \quad \frac{x^2-3x+2}{2x^2-4x+1}<0, \quad (x+1)(x+2)x(x-1)>0.$$

11. Si $\alpha+\sqrt{\beta}$ est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, α et β désignant des entiers et $\sqrt{\beta}$ une irrationnelle, $\alpha-\sqrt{\beta}$ sera aussi racine de cette équation.

Voici maintenant quelques questions de maximum que l'on résoudra par les procédés indiqués dans le texte.

12. Maxima et minima de

$$x+\frac{1}{x}, \quad x-\frac{1}{x}, \quad x^2+\frac{1}{x^2}, \quad x^2-\frac{1}{x^2}.$$

13. Trouver le maximum ou le minimum de $ax+by$ quand xy est constant, de xy quand $ax+by$ est constant, de x^2+y^2 quand xy ou $x+y$ est constant.

14. Une colonne verticale est surmontée d'une statue : trouver en quel point du terrain, supposé horizontal, il faut se placer pour voir la statue sous un angle maximum (construction géométrique de cet angle). Résoudre le même problème en supposant la surface du terrain sphérique.

15. Étant données deux parallèles AB et CD, une sécante AD et un point B sur l'une d'elles, mener par le point B une sécante BC rencontrant AD en un point O tel que la somme des aires des triangles AOB, COD soit minimum.

16. Trouver le trapèze de périmètre ou de surface maximum ou minimum inscrit dans un demi-cercle, la grande base du trapèze coïncidant avec le diamètre du demi-cercle.

17. Étant donné un angle BAC et un point P situé dans son plan, faire passer par le point P une droite BC telle que l'aire du triangle ABC soit un maximum ou un minimum.

18. Dans un trapèze, trois côtés consécutifs sont égaux : déterminer le quatrième côté, qui est censé être l'une des bases, de telle sorte que l'aire du trapèze soit maximum.

19. On inscrit un rectangle dans un grand cercle de la sphère; on prend ce rectangle pour base d'un prisme droit dont les pans découpent dans la sphère un quadrilatère curviligne : on demande comment doit être choisi le rectangle pour que ce quadrilatère soit maximum.

20. Trouver le cylindre droit à base circulaire de volume ou de surface latérale maximum inscrit dans un cône donné.

21. Trouver le tronc de cône de surface latérale maximum inscrit dans un hémisphère, l'une des bases du tronc étant le grand cercle qui sert de base à l'hémisphère.

Voici maintenant quelques théories facilitant la recherche des maxima et des minima.

22. On trouve facilement le maximum de

$$(ax+a')^m(bx+b')^n(cx+c')^p,$$

où $a, b, c, a', b', c', m, n, p$ sont donnés, au moyen de l'artifice suivant. La quantité à rendre maximum peut être remplacée par

$$(a\alpha x+\alpha a')^m(b\beta x+\beta b')^n(c\gamma x+c'\gamma)^p,$$

α, β, γ étant indépendants de x; si l'on dispose de α, β, γ de telle sorte que

$$(1) \qquad \alpha a+\beta b+\gamma c=0,$$

ce que l'on peut faire d'une infinité de manières, la somme des facteurs de l'expression que nous voulons rendre maximum sera constante, et on la rendra maximum en posant

$$\frac{a\alpha x+a'\alpha}{m}=\frac{b\beta x+b'\beta}{n}=\frac{c\gamma x+c'\gamma}{p}.$$

Ces deux équations et (1) font connaître x et les rapports $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$, que l'on n'a pas besoin d'ailleurs de calculer.

Voici un exercice dans lequel on appliquera ce qui vient d'être dit.

23. Étant donnée une sphère, déterminer un petit cercle de telle sorte qu'en le prenant pour base de deux cônes droits ayant leurs sommets sur la sphère la différence des volumes de ces cônes soit maximum (*voir* l'exercice précédent).

24. On trouve facilement le minimum de $\sqrt{x^2 \pm a^2} + \sqrt{y^2 \pm b^2}$ quand $x + y = l$ reste constant; en élevant au carré, on a à rendre minimum $x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 \pm a^2)(y^2 \pm b^2)}$. Or $x^2 + y^2 = l^2 - 2xy$; donc on a à rendre mininum

$$l^2 - 2xy - 2\sqrt{(x^2 \pm a^2)(y^2 \pm b^2)}$$

ou à rendre maximum

$$m = xy + \sqrt{(x^2 \pm a^2)(y^2 \pm b^2)}.$$

En remplaçant y par sa valeur $l - x$, en élevant au carré et en faisant les réductions, on a une équation du second degré en x; on la résout et on égale à zéro la quantité placée sous le radical; on arrive ainsi à une équation du troisième degré en m, mais qui se décompose facilement en une équation du premier et du second degré. Ainsi on reconnaît que $m = \pm ab$. Voici deux jolies applications.

25. Trouver le plus court chemin d'un point à un autre en passant par une droite donnée située dans un même plan avec les points donnés (*voir* l'exercice 24).

26. Trouver sur la droite qui joint les centres de deux cercles un point tel que la somme des tangentes menées de ce point aux deux cercles soit maximum ou minimum (*voir* l'exercice 24).

27. On a $(x + a)^m + (x - a)^m > 2x^m$: en conclure que, si $X - Y$ est constant, $X^m + Y^m$ est maximum pour $X = Y$. On a aussi

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x - a} > 2\sqrt{x};$$

on peut en déduire une conclusion analogue. (Ce théorème a des applications nombreuses et évidentes.)

Une foule de questions de maximum se simplifient en s'aidant de considérations synthétiques; en voici des exemples.

28. Prouver par l'analyse que de tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, le plus grand est inscriptible dans un cercle (on pourra faire usage de la Trigonométrie); en conclure que, de tous les polygones que l'on peut former avec des côtés donnés, le plus grand est inscriptible dans un cercle.

29. On donne un prisme hexagonal régulier et droit. Soient ABCDEF

une de ses bases, A'B'C'D'E'F' l'autre (les sommets A, B, C, D, E, F se succèdent dans l'ordre alphabétique et les arêtes sont AA', BB', ...).

On joint AC, CE, EA; on fait passer des plans également inclinés sur la base par ces droites AC, CE, EA; ces plans se coupent en un point s de la droite qui joint les centres des bases et coupent les arêtes BB', DD', FF' en des points b, d, f. On demande comment il faut mener les plans en question pour que le solide $sAbCdEf$ A'B'C'D'E'F' ait une surface latérale minima. (Deux solides semblables, accolés par leur base A'B'C'D'E'F', forment précisément la figure d'une alvéole d'abeille.) (Buffon) (*).

30. De tous les polygones ayant le même périmètre et le même nombre de côtés, le plus grand est convexe et régulier.

31. A l'aide de l'application 22, on résoudra encore ce problème : Étant donnée une sphère et un plan P, trouver le cône droit minimum ayant sa base dans le plan P et son axe perpendiculaire circonscrit à la sphère. (Prendre pour inconnue l'inverse de la hauteur du cône.)

32. Un quadrilatère inscrit dans un cercle a ses diagonales rectangulaires; le point de rencontre de ces diagonales est fixe : dans quelle position son aire est-elle maximum?

33. Trouver les limites des expressions suivantes pour $x = \infty$:

$$x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\quad x\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right),\quad \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}.$$

34. Inscrire dans un cercle un triangle de périmètre donné et d'aire maximum.

35. Toute section faite dans un tétraèdre parallèlement à deux arêtes opposées est un parallélogramme; de tous ces parallélogrammes quel est le plus grand?

(*) Buffon, sans être mathématicien, a fait preuve de connaissances étendues en Analyse : il a traduit le *Calcul des fluxions* de Newton, et dans son *Histoire naturelle* il a traité diverses questions relatives au Calcul des probabilités.

36. Trouver le cylindre de révolution de surface totale minimum contenant un volume donné.

37. Parmi tous les cônes de révolution de même volume, trouver celui dont l'arête est la plus petite.

38. Étant donné un triangle, mener une droite minimum qui le partage en deux parties égales.

39. Montrer que la recherche du maximum ou du minimum de $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, se ramène à celle du maximum ou du minimum de $mx+\frac{1}{x}$.

40. Rendre maxima ou minima les expressions

$$\sin x+\cos x,\quad \sin x-\cos x,\quad \operatorname{tang} x+\cot x.$$

41. Quand on donne $x+y+z+\ldots+t$, la somme des produits 2 à 2, 3 à 3, ... des quantités $x, y, z, \ldots, t$ est maximum quand on a $x=y=z\ldots=t$.

En effet, par exemple, la somme $xy+xz\ldots+xt+yz+\ldots$ peut s'écrire $xy+A(x+y)+B$, A, B ne contenant plus ni x ni y; or, sans changer $x+y+\ldots+t$, on peut remplacer x et y par $\frac{x+y}{2}$ et si x n'est pas égal à y, $xy+A(x+y)+B$ augmentera puisque xy, seul terme variable de cette somme, augmente (p. 181); donc, etc. Pour continuer la démonstration, on mettra la somme des produits 3 à 3 sous la forme

$$xyz+A(xy+yz+zx)+B(x+y+z)+C.$$

42. Prouver que $x+y+z\ldots+t$, restant constant

$$x^2+y^2\ldots+t^2$$

est minimum quand $x=y=z\ldots=t$; $x^3+y^3\ldots+t^3$ est également minimum pour $x=y=z\ldots$, etc. (s'appuyer sur l'exemple précédent).

43. Quand on se donne $xyz\ldots t$ la somme des produits 2 à 2, 3 à 3, ..., de $x, y, z, \ldots$, est minimum pour $x=y\ldots=t$.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES PROGRESSIONS ET DES LOGARITHMES.

I. — PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

On appelle *progression arithmétique* une suite de termes dans laquelle chacun d'eux est égal au précédent augmenté d'une quantité constante positive ou négative que l'on appelle *raison* de la progression.

Considérons la progression arithmétique

$$(1) \qquad a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ k,\ l.$$

Soient r la raison et n le nombre des termes; on aura par définition même

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad \ldots, \quad l = k + r.$$

On voit déjà, d'après cela, que le second terme b est égal au premier plus la raison; le troisième terme c est égal au second b plus la raison, c'est-à-dire au premier plus deux fois la raison; en ajoutant la raison à c, on trouve d : donc le quatrième terme est égal au premier plus trois fois la raison, et, en général, le $n^{\text{ième}}$ terme l est égal à a plus $n-1$ fois la raison. On peut donc écrire

$$l = a + (n-1)r,$$

ce qui donne lieu au théorème suivant :

Théorème I. — *Dans toute progression, un terme quelconque est égal au premier (et l'on peut prendre pour*

premier terme celui que l'on veut) plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

Problème. — *Trouver la somme des termes d'une progression arithmétique.*

Désignons par s la somme des termes de la progression (1). Nous aurons, en conservant d'ailleurs les mêmes notations que tout à l'heure,

(1) $$s = a + b + c + \ldots + k + l.$$

Nous pouvons aussi écrire, en renversant l'ordre des termes,

(2) $$s = l + k + \ldots + c + b + a.$$

Or la suite $l, k, \ldots, c, b, a$ peut être considérée comme une progression arithmétique ayant pour premier terme l et pour raison $-r$. Si l'on considère alors les $i^{\text{ièmes}}$ termes des progressions (1) et (2), on trouve respectivement pour leur expression $a + \overline{i-1}\,r$ et $l - \overline{i-1}\,r$; leur somme est donc $a + l$. Il résulte de là que, si l'on ajoute les formules (1) et (2) terme à terme, la somme des termes de même rang sera toujours $a + l$; on peut donc écrire

$$2s = (a + l) \times n,$$

c'est-à-dire

(3) $$s = \frac{(a + l)n}{2},$$

formule que l'on peut encore écrire comme il suit, en remplaçant l par sa valeur $a + \overline{n-1}\,r$:

$$s = \frac{(2a + \overline{n-1}\,r)n}{2}.$$

La formule (3) montre que :

Théorème II. — *La somme des termes d'une progres-*

sion arithmétique s'obtient en ajoutant les termes extrêmes et en multipliant le résultat par la moitié du nombre des termes.

Applications. — Les entiers successifs forment une progression arithmétique dont la raison est 1. On a donc ici $a = 1$, $r = 1$, et, en désignant par s la somme de n entiers consécutifs commençant par 1,

$$s = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les nombres impairs forment aussi une progression arithmétique. La raison est 2, le $n^{\text{ième}}$ nombre impair est $1 + \overline{n-1}.2$ ou $2n - 1$, et l'on trouve, pour la somme des n premiers nombres impairs, n^2.

II. — DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

On appelle *progression géométrique* une suite de termes dans laquelle chacun d'eux est égal au précédent multiplié par une quantité constante, que l'on appelle *raison* de la progression.

Considérons la progression géométrique

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ k,\ l.$$

Le second terme b est égal au premier multiplié par la raison; pour avoir le troisième terme c, il faut multiplier b par la raison, ou, ce qui revient au même, multiplier a deux fois de suite par la raison; on verrait de même que, pour avoir le quatrième terme, il faut multiplier le premier trois fois de suite par la raison, et d'une manière générale :

Théorème I. — *Un terme quelconque d'une progres-*

sion géométrique s'obtient en multipliant le premier autant de fois par la raison qu'il y a de termes avant lui.

Il résulte de là que, en désignant par q la raison de la progression, ses termes peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1}.$$

Si nous désignons par s la somme des termes de cette progression, nous pourrons écrire

$$s = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Or, si l'on se reporte au Chapitre III, p. 40, on reconnaît immédiatement que la quantité écrite entre parenthèses n'est autre chose que le quotient de $q^n - 1$ divisé par $q - 1$, en sorte que l'on a

$$s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Cette formule peut encore s'écrire

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

On peut trouver la quantité s d'une autre manière, en observant que

$$sq = aq + bq + \ldots + lq$$

ou bien

$$sq = b + c + \ldots + l + lq,$$

d'où l'on conclut

$$sq - s = lq - a,$$

et par suite

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

III. — INSERTION DE MOYENS.

Insérer des *moyens* entre deux nombres a et b, c'est trouver des nombres compris entre a et b et obéissant à certaines lois. Ainsi :

Insérer m *moyens arithmétiques* entre deux nombres a_0 et a_{m+1}, c'est trouver m nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tels que

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ a_{m+1}$$

forment une progression arithmétique. Pour résoudre cette question, il suffit de trouver la raison; or, a_{m+1} étant le $m+2^{\text{ième}}$ terme (puisque entre a_0 et a_{m+1} il y en a m), il est égal au premier a_0 plus $m+1$ fois la raison x. On a donc

$$a_{m+1} = a_0 + (m+1)x,$$

d'où l'on tire la raison

$$x = \frac{a_{m+1} - a_0}{m+1}.$$

La raison une fois connue, on a

$$a_1 = a_0 + x, \quad a_2 = a_0 + 2x,$$

et ainsi de suite.

Insérer m *moyens géométriques* entre a_0 et a_{m+1}, c'est trouver m nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tels que la suite

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ a_{m+1}$$

soit une progression géométrique.

Soit x la raison de la progression inconnue; a_{m+1} est le $m+2^{\text{ième}}$ terme de cette progression. Donc

$$a_{m+1} = a_0 x^{m+1},$$

d'où l'on tire

$$x = \sqrt[m+1]{\frac{a_{m+1}}{a_0}}.$$

La raison une fois connue, on a

$$a_1 = a_0 x, \quad a_2 = a_0 x^2, \quad \ldots.$$

IV. — QUELQUES THÉORÈMES SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES.

LEMME. — *Soit m un nombre entier plus grand que 1, α un nombre plus grand que zéro; on aura*

$$(1) \qquad (1+\alpha)^m > 1 + m\alpha.$$

En effet, on a

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2;$$

donc la formule (1) est vérifiée pour $m = 2$. Supposons-la vraie pour $m = n$; démontrons qu'elle est encore vraie pour $m = n + 1$. Si l'on a

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha,$$

en multipliant les deux membres par $1 + \alpha$, on a

$$(1+\alpha)^{n+1} > 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2,$$

c'est-à-dire, *a fortiori*,

$$(1+\alpha)^{n+1} > 1 + (n+1)\alpha.$$

La formule (1) subsiste donc pour $m = n + 1$. Or elle est vraie pour $m = 2$: donc elle l'est pour $m = 3$, puis pour $m = 4$, etc.; donc elle est générale.

THÉORÈME I. — *Les puissances successives des nombres*

plus grands que 1 *vont en croissant et peuvent depasser toute limite.*

En effet, tout nombre plus grand que 1 peut être représenté par $1+\alpha$, et l'on aura, en appelant n un entier quelconque,

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha.$$

La formule précédente montre que, en prenant n suffisamment grand, $(1+\alpha)^n$ pourra être pris plus grand que toute quantité donnée; du reste, il est bien évident que

$$(1+\alpha)^{n+1} > (1+\alpha)^n.$$

Théorème II. — *Les puissances successives des nombres moindres que* 1 *vont en diminuant et ont zéro pour limite.*

En effet, tout nombre moindre que 1 peut être considéré comme le quotient de l'unité divisée par un nombre $(1+\alpha)$ plus grand que 1, et alors le théorème que nous venons de démontrer rend celui-ci évident.

Théorème III. — *Les racines successives des nombres plus grands que* 1 *vont en diminuant et ont l'unité pour limite.*

En effet : 1° a désignant un nombre plus grand que 1,

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}},$$
$$\sqrt[n+1]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^n};$$

donc évidemment

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}.$$

2° Je dis que l'on peut toujours prendre n assez grand pour que

$$(1) \qquad \sqrt[n]{a} - 1 < \delta,$$

δ désignant une quantité aussi petite que l'on voudra. En effet, de l'inégalité précédente on déduit

$$(2)\qquad a < (1+\delta)^n;$$

or (théorème I)

$$1 + n\delta < (1+\delta)^n.$$

Si donc on prend

$$a < 1 + n\delta,$$

a fortiori l'inégalité (2) sera satisfaite, et par suite (1); pour satisfaire à la question, il suffit, comme on voit, de prendre

$$n > \frac{a-1}{\delta},$$

ce qui revient à dire que la racine $n^{\text{ième}}$ de a a pour limite 1 lorsque n augmente indéfiniment.

Théorème IV. — *Les racines successives d'un nombre moindre que* 1 *vont en croissant et ont l'unité pour limite.*

Ce théorème est une conséquence du précédent.

V. — DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES DÉCROISSANTES.

Soit

$$a + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$$

une somme de termes en progression géométrique; cette somme est égale, d'après ce que l'on a vu, à

$$a\frac{q^n-1}{q-1} \quad \text{ou à} \quad \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Supposons $q < 1$.

1° Les termes de la progression géométrique qui sont les produits de a par les puissances successives de q iront en décroissant et tendront vers zéro, en vertu du théorème II du paragraphe précédent.

2° La somme des n premiers termes $\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$ ira en croissant et aura pour limite $\frac{a}{1-q}$, puisque q^n tend vers zéro. Ainsi :

Théorème. — *La limite de la somme des n premiers termes d'une progression géométrique dont la raison est moindre que* 1 *quand n croît indéfiniment est égale au premier terme divisé par la différence entre la raison et l'unité.*

Exemples :

$$1^\circ \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

2° Une fraction périodique telle que 0,3535... est égale à la somme des termes d'une progression géométrique :

$$\frac{35}{100} + \frac{35}{(100)^2} + \frac{35}{(100)^3} + \ldots;$$

sa valeur est $\frac{35}{100} : \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{35}{99}$; ce que l'on savait déjà.

Au fond, la démonstration donnée en Arithmétique est identique avec celle-ci.

VI. — DÉFINITION D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES.

Si l'on considère deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant

par zéro,

(1) $$1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots,$$

(2) $$0, r, 2r, \ldots, nr, \ldots,$$

chaque terme de la progression arithmétique est ce que, d'après Neper, on appelle le *logarithme* du terme de même rang dans la progression géométrique : ainsi nr est le logarithme de q^n.

On pourra, comme l'on voit, former, en variant les raisons q et r, une infinité de systèmes de logarithmes.

Voici une propriété du système (1) et (2) qui va faire comprendre toute l'importance de la théorie qui nous occupe. Soient q^m et q^n deux termes de la progression géométrique, mr et nr les deux termes correspondants de la progression arithmétique; le produit $q^m q^n = q^{m+n}$ est un terme de la progression géométrique; le terme correspondant de la progression arithmétique est $(m+n)r$ ou $mr+nr$. On voit donc que :

Théorème. — *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

Théorème extrêmement important. On conçoit en effet que, si tous les nombres avaient des logarithmes connus, on pourrait au moyen de ce théorème convertir les multiplications en additions. Nous allons montrer qu'effectivement on peut faire en sorte que par une généralisation convenable de notre définition tous les nombres acquièrent des logarithmes.

Tout d'abord nous supposerons nos progressions (1) et (2) prolongées vers la gauche et écrites sous les formes

(1) $$\ldots \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q, q^2, \ldots,$$

(2) $$\ldots -2r, -r, 0, r, 2r, \ldots;$$

alors, en supposant (ce qui est conforme à l'usage) $q > 1$, $r > 0$, nous voyons que *les logarithmes des nombres moindres que* 1 *seront négatifs*. Cela posé :

Théorème I. — *Si l'on insère entre deux termes consécutifs de la progression* (1) *un nombre suffisamment grand de moyens, la nouvelle raison différera aussi peu que l'on voudra de l'unité; si entre les termes correspondants de la progression* (2) *on insère le même nombre de moyens, la raison de la nouvelle progression sera en même temps aussi peu différente de zéro que l'on voudra.*

En effet, les raisons des nouvelles progressions seront respectivement

$$\sqrt[m+1]{q}, \quad r:(m+1).$$

Or ces deux quantités ont respectivement pour limites 1 et zéro (p. 201); donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème II. — *Désignons par* $1+\alpha$ *la raison de la nouvelle progression géométrique, par* β *la raison de la nouvelle progression arithmétique;* α *et* β *pourront, comme nous avons vu, être pris aussi petits que l'on voudra, et, lorsqu'ils seront suffisamment petits, la différence entre deux termes consécutifs des nouvelles progressions pourra être prise aussi petite que l'on voudra.*

Soient $(1+\alpha)^n$, $(1+\alpha)^{n+1}$ deux termes consécutifs de la progression géométrique; leur différence est

$$(1+\alpha)^n(1+\alpha-1) = \alpha(1+\alpha)^n.$$

Je dis que l'on peut prendre α assez petit pour que

$$(3) \qquad \alpha(1+\alpha)^n < \delta,$$

δ désignant une quantité aussi petite que l'on voudra. En

effet, l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(4) \qquad \alpha < \frac{\delta}{(1+\alpha)^n}.$$

Prenons alors non-seulement $\alpha < \delta$, mais encore

$$\alpha < \frac{\delta}{(1+\delta)^n};$$

l'inégalité (4) sera alors satisfaite *a fortiori*, et par suite l'inégalité (3), ce qui démontre le théorème que nous avions énoncé relativement à la progression géométrique. La différence entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique a pour expression générale

$$(n+1)\beta - n\beta = \beta;$$

elle peut donc être prise aussi moindre que toute quantité donnée.

Il résulte de ces théorèmes que l'on pourra toujours insérer entre les termes des progressions (1), (2) un nombre de moyens assez grand pour que la différence entre un nombre donné N et un certain terme de la progression soit moindre que δ. Soit $(1+\alpha)^p$ le terme de la progression géométrique le plus voisin de N; $n\beta$ sera le terme correspondant de la progression arithmétique; $n\beta$ sera alors le *logarithme de* N *à* β *près*. Or, n croissant indéfiniment, β tend vers zéro et $n\beta$ vers une certaine limite qui est le *logarithme* de N.

La théorie précédente montre la possibilité de la construction d'une Table donnant les logarithmes de tous les nombres avec telle approximation que l'on voudra.

VII. — PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES.

Le logarithme d'un produit de deux facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.

En effet, soit NN' un produit de deux facteurs s'ils ne font pas partie de la progression géométrique (1) du paragraphe précédent; soient ν et ν' les nombres de cette progression les plus voisins de N et N'. On aura

$$(5) \qquad \log\nu + \log\nu' = \log\nu\nu',$$

d'après ce que nous avons vu plus haut. Mais, si l'on suppose que les progressions (1) et (2) soient remplacées par celles que l'on obtient en insérant des nombres indéfiniment croissants de moyens, ν et ν' se rapprocheront de N et N', et $\nu\nu'$ de NN'; $\log\nu$, $\log\nu'$ et $\log\nu\nu'$ tendront alors vers ce que nous avons appelé $\log N$, $\log N'$ et $\log NN'$. La formule (5) deviendra alors

$$\log N + \log N' = \log NN'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De là découlent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le logarithme d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

En effet, soient a, b, c, d des facteurs; on a

$$\begin{aligned} \log(abcd) &= \log a(bcd) = \log a + \log(bcd), \\ \log(bcd) &= \log b(cd) = \log b + \log cd, \\ \log cd &= \log c + \log d. \end{aligned}$$

On en conclut

$$\log(abcd) = \log a + \log b + \log c + \log d. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. — *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur, q le quo-

tient. On a

$$D = dq,$$

d'où

$$\log D = \log d + \log q,$$

et par suite

$$\log q = \log D - \log d. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. — *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de cette puissance.*

En effet,

$$\log a^n = \log(aaa\ldots) = \log a + \log a + \ldots = n \log a.$$

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Le logarithme de la racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de la racine.*

En effet, soit y la racine $n^{\text{ième}}$ de a; on a

$$a = y^n,$$

d'où, par le théorème précédent,

$$\log a = n \log y,$$

et par suite

$$\log y = \frac{1}{n} \log a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VIII. — USAGE DES TABLES.

Les Tables de logarithmes dont on fait usage donnent les logarithmes *vulgaires*. On appelle ainsi ceux qui sont définis par les progressions

$$\ldots, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000, \ldots, 10^n, \ldots,$$

$$\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots;$$

la *base* de ce système, c'est-à-dire le nombre qui a pour logarithme 1, est 10.

Les avantages de ce système résultent des propriétés que voici :

Les logarithmes des nombres compris entre 1 *et* 10, 10 *et* 100, 100 *et* 1000, ... *sont compris entre* 0 *et* 1, 1 *et* 2, 2 et 3, ... ; *donc la partie entière d'un logarithme, ou sa* CARACTÉRISTIQUE, *est composée d'autant d'unités que ce nombre contient de chiffres entiers moins* 1.

Les logarithmes des nombres moindres que 1 sont négatifs ; or tout nombre négatif compris entre deux entiers $-n$ et $-(n+1)$ peut se mettre sous la forme $-(n+1)+\alpha$, α désignant un nombre positif moindre que 1. Tout logarithme d'un nombre moindre que 1 pourra donc être considéré comme formé d'une partie entière négative, sa *caractéristique,* et d'une partie fractionnaire positive.

Tout nombre compris entre 0 *et* 0,1 *aura son logarithme compris entre* 0 *et* -1 ; *la caractéristique de son logarithme sera donc* -1, *et, en général, la caractéristique d'un nombre décimal dont le premier chiffre est placé au* $n^{ième}$ *rang après la virgule a pour logarithme un nombre dont la caractéristique est* $-n$.

Deux nombres composés des mêmes chiffres écrits dans le même ordre ont des logarithmes qui ne diffèrent que par leurs caractéristiques.

En effet, on a par exemple

$$\log 3782{,}5 = \log(37{,}825 \times 100)$$
$$= \log 37{,}825 + \log 100 = \log 37{,}825 + 2\,;$$

les logarithmes de 3782,5 et 37,825 ne diffèrent donc que par un nombre entier, c'est-à-dire que par leurs caractéristiques.

Il existe un grand nombre de Tables de logarithmes; pour en faire usage, il convient de lire l'Introduction.

Je décrirai ici la manière de se servir des Tables de Lalande à sept décimales.

Si l'on veut le logarithme d'un nombre entier compris entre 0 et 10000, on trouve ce nombre inscrit dans la Table dans la colonne Nomb.; son logarithme est à gauche dans la colonne intitulée Logarit. et en face. Entre deux logarithmes de la Table, on a écrit dans la colonne Diff. leur différence.

Pour trouver le logarithme d'un nombre quelconque, on calcule d'abord la caractéristique; cette caractéristique, pour les nombres plus grands que 1, est égale au nombre des chiffres significatifs entiers moins 1. Pour les nombres moindres que 1, elle est négative et égale au nombre qui indique le rang du premier chiffre placé après la virgule. La caractéristique une fois déterminée, on prend pour partie décimale la partie décimale du logarithme du nombre composé des mêmes chiffres que le nombre proposé, mais compris entre 0 et 10000. Voici maintenant comment on trouve ce logarithme.

Exemple. — *Calculer le logarithme de* 189367.

Il suffit de *calculer le logarithme de* 1893,67. A cet effet, on observe que, 1893, 67 tombant entre 1893 et 1894, le logarithme de 1893,67 est compris entre les logarithmes *tabulaires* 3,2771506 et 3,2773800 de 1893 et 1894. Pour trouver la quantité x qu'il faut ajouter au logarithme 3,2771506 de 1893 pour obtenir le logarithme de 1893,67, on prend dans la Table la différence entre log 1893 et *log*. 1894, qui est 0,0002294, et on pose cette proportion, ce qui n'est pas tout à fait exact, mais ce qui fournit une approximation très-suffisante dans la pratique :

Nomb	0.31′30″ Logarit.	Diff.	Nomb	0.32′0″ Logarit.	Diff.	Nomb	0.32′30″ Logarit.	Diff.
1890	3.2764618	2297	1920	3.2833012	2262	1950	3.2900346	2227
1891	3.2766915	2296	1921	3.2835274	2260	1951	3.2902573	2225
1892	3.2769211	2295	1922	3.2837534	2259	1952	3.2904798	2224
1893	3.2771506	2294	1923	3.2839793	2258	1953	3,2907022	2224
1894	3.2773800	2292	1924	3.2842051	2256	1954	3.2909246	2222
1895	3.2776092	2291	1925	3.2844307	2256	1955	3.2911468	2221
1896	3.2778383	2290	1926	3.2846563	2254	1956	3.2913689	2219
1897	3.2780673	2289	1927	3.2848817	2253	1957	3.2915908	2219
1898	3.2782962	2288	1928	3.2851070	2252	1958	3.2918127	2217
1899	3.2785250	2286	1929	3.2853322	2251	1959	3.2920344	2217
1900	3.2787536	2285	1930	3.2855573	2250	1960	3.2922561	2215
1901	3.2789821	2284	1931	3.2857823	2248	1961	3.2924776	2214
1902	3.2792105	2283	1932	3.2860071	2248	1962	3.2926990	2213
1903	3.2794388	2281	1933	3.2862319	2246	1963	3.2929203	2212
1904	3.2796669	2281	1934	3.2864565	2245	1964	3.2931415	2211
1905	3.2798950	2279	1935	3.2866810	2244	1965	3.2933626	2209
1906	3.2801229	2278	1936	3.2869054	2242	1966	3.2935835	2209
1907	3.2803507	2277	1937	3.2871296	2242	1967	3.2938044	2207
1908	3.2805784	2275	1938	3.2873538	2240	1968	3.2940251	2206
1909	3.2808059	2275	1939	3.2875778	2239	1969	3.2942457	2205
1910	3.2810334	2273	1940	3.2878017	2238	1970	3.2944662	2204
1911	3.2812607	2272	1941	3.2880255	2237	1971	3.2946866	2203
1912	3.2814879	2271	1942	3.2882492	2236	1972	3.2949069	2202
1913	3.2817150	2269	1943	3.2884728	2235	1973	3.2951271	2200
1914	3.2819419	2269	1944	3.2886963	2233	1974	3.2953471	2200
1915	3.2821688	2267	1945	3.2889196	2232	1975	3.2955671	2198
1916	3.2823955	2266	1946	3.2891428	2232	1976	3.2957869	2198
1917	3.2826221	2265	1947	3.2893660	2230	1977	3.2960067	2196
1918	3.2828486	2264	1948	3.2895890	2228	1978	3.2962263	2195
1919	3.2830750	2262	1949	3.2898118	2228	1979	3.2964458	2194
1920	3.2833012		1950	3.2900346		1980	3.2966652	

La différence 1 *entre les deux nombres entiers consécutifs* 1893, 1894, *qui comprennent le nombre donné* 1893,67, *est à la différence* 0,67 *entre le nombre donné et le nombre entier immédiatement plus petit, comme la différence* 0,0002294 *entre les deux logarithmes tabulaires des deux nombres entiers qui comprennent le nombre donné est à la différence* x *entre le plus petit de*

ces deux logarithmes tabulaires et le logarithme cherché. On a donc

$$1 : 0,67 = 0,0002294 : x,$$

d'où

$$x = 0,0001537.$$

On ajoute cette valeur de x au logarithme 3,2771506 de 1893 : la somme 3,2773043 est le logarithme de 1893,67.

Le logarithme de 189367 est donc 5,2773043.

Nous avons maintenant à résoudre la question inverse :

PROBLÈME. — *Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné.*

La caractéristique, augmentée d'une unité, indique combien il y a de chiffres dans la partie entière du nombre auquel appartient le logarithme donné. On est donc ramené au cas où la caractéristique est 3. Cela posé :

Quand la caractéristique du logarithme donné est 3, le nombre cherché est compris entre 1000 et 10000.

Pour trouver ce nombre, on cherche le logarithme donné dans les colonnes intitulées LOGARIT.

Lorsque le logarithme donné se trouve dans la Table, le nombre cherché est placé à sa gauche, dans la colonne intitulée NOMB.

Quand le logarithme donné, dont la caractéristique est 3, *ne se trouve pas dans la Table,* il tombe nécessairement entre les logarithmes tabulaires de deux nombres entiers consécutifs de quatre chiffres ; le plus petit de ces deux nombres exprime la *partie entière* du nombre décimal auquel appartient le logarithme donné.

La *partie décimale* du nombre cherché est déterminée par cette proportion :

La différence entre les deux logarithmes tabulaires

qui comprennent le logarithme donné est à la différence entre le logarithme donné et le plus petit de ces deux logarithmes tabulaires comme l'unité est à la partie décimale x du nombre auquel appartient le logarithme donné. On calcule x avec trois décimales.

Exemple. — *Déterminer à quel nombre appartient le logarithme* 3,2773043.

On voit dans la Table que ce logarithme tombe entre les logarithmes 3,2771506 et 3,2773800 des nombres 1893 et 1894; la *partie entière* du nombre cherché est donc 1893.

Pour calculer la *partie décimale* x de ce nombre, on prend dans la colonne intitulée Diff. la différence entre log 1893 et log 1894, qui est 0,0002294; on cherche la différence 0,0001537 entre le logarithme donné et le logarithme tabulaire immédiatement plus petit, et l'on pose la proportion

$$0,0002294 : 0,0001537 = 1 : x,$$

qui revient à

$$2294 : 1537 = 1 : x,$$

d'où

$$x = 0,670.$$

Le logarithme 3,2773043 appartient donc au nombre 1893,67. On verrait de même que le logarithme $\bar{2}$,2773043 appartient au nombre 0,0189367, etc.

UN EXEMPLE DE CALCUL LOGARITHMIQUE.

Pour montrer comment on dispose un calcul logarithmique, nous allons traiter l'exemple suivant : *Calculer x*

donné par la formule

$$x = (0,3678756)^{15} \times \frac{27,325170}{243,51287}.$$

On a

$$\log x = 15 \log 0,3678756 + \log 27,325170 - \log 243.51287$$

$$\log 0,3678756 = \bar{1},5657010$$

$$\log 27,325170 = 1,4365629$$

$$\log 243,51287 = 2,3865219$$

$$15 \log 0,3678756 = \bar{7},4855150$$

$$\log 27,325170 = 1,4365629$$

$$-\log 243,51287 = \bar{3},6134781$$

$$\log x = \bar{8}.5355560$$

$$x = 0,0000000343206o9.$$

UN MOT SUR LA DÉCOUVERTE DES LOGARITHMES.

L'invention des logarithmes remonte, d'après Montucla et d'après M. Terquem (*Bulletin,* article Benjamin Bramer) à Juste Byrge (Jobst Burgi), qui avait construit une Table en 1610, imprimée à Prague en 1620, et avait indiqué le moyen de simplifier les calculs à l'aide de cette Table.

Mais on attribue généralement l'invention des logarithmes à Jean Neper, qui publia sa découverte en 1614, dans un Livre intitulé *Logarithmorum canonis descriptio*.... Neper n'avait pas tout d'abord fait usage de deux progressions pour définir son système, mais il avait eu recours à des considérations mécaniques à peu près équivalentes. Les logarithmes que l'on appelle aujourd'hui *népériens* ne sont pas de cet auteur, mais bien d'un géomètre nommé Speidel; les logarithmes de Speidel sont d'ailleurs égaux à ceux de Neper, au signe près.

Les logarithmes dits *népériens* ont pour base le nombre $e = 2,71828\ldots$; le choix de cette base sera expliqué plus tard.

Robert Neper, fils de Jean, publia les œuvres posthumes de son père sous le titre *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. C'est seulement dans cet Ouvrage que Neper fait connaître sa méthode de construction des Tables et les avantages d'un système dont la base serait 10.

Briggs construisit la première Table de logarithmes vulgaires vers 1618, sous le titre de *Logarithmorum chilias prima;* son travail fut complété par Gellibrand et publié sous le titre de *Trigonometria britannica*.

Les Tables de Vlacq à onze décimales (1628 et 1636), de Vega à dix décimales, de Gardinier, revues par Callet, ont été célèbres; citons les Tables construites sous la direction de Prony pour le cadastre, qui n'ont pas été imprimées et dont un exemplaire est déposé à la bibliothèque de l'Institut.

Les Tables de Schrön, publiées chez Gauthier-Villars, nous paraissent les plus commodes pour les élèves; mais les petites Tables à cinq décimales de Lalande (même éditeur) sont plus portatives et plus commodes pour des ingénieurs.

IX. — RÈGLES D'INTÉRÊT COMPOSÉ.

De l'argent est placé à intérêt composé lorsqu'à la fin de chaque année on place les intérêts avec le capital.

Soient a un capital, r l'intérêt de 1 franc au bout d'un an; proposons-nous de calculer la valeur A de ce capital au bout de n années.

Au bout d'un an, 1 franc est devenu $(1 + r)$; a francs sont donc devenus $a(1 + r)$, d'où l'on voit que, pour obtenir la valeur d'un capital placé pendant un an, il suffit

de multiplier par $(1+r)$ la valeur primitive de ce capital. Si donc on place le capital a, qui est devenu $a(1+r)$, encore un an, il deviendra $a(1+r)(1+r)$ ou $a(1+r)^2$; si l'on place encore ce capital pendant un an, il deviendra $a(1+r)^2(1+r)$ ou $a(1+r)^3$, etc., et enfin, au bout de n années, il deviendra $a(1+r)^n$. On a donc

$$A = a(1+r)^n.$$

C'est dans cette formule que consiste la règle d'intérêt composé; elle sert à résoudre plusieurs problèmes que nous allons examiner successivement.

Problème I. — *Trouver ce que devient une somme a placée au taux de* $100r$ *pour* 100 *pendant un temps t.*

Soient n l'entier contenu dans t, φ la fraction qui complète le temps t; on aura

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \varphi r,$$

φ étant exprimé en fraction d'année.

Problème II. — *Quel est le capital a qui, placé à* $100r$ *pour* 100, *devient* A *au bout du temps t?*

Si l'on pose $t = n + \varphi$, n étant le plus grand entier contenu dans t, on a

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \varphi r,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{A}{(1+r)^n(1+\varphi r)}.$$

Problème III. — *Au bout de combien de temps le capital a placé à* $100r$ *pour* 100 *devient-il* A?

Si l'on désigne par $n + \varphi$ le temps cherché, n désignant

toujours le plus grand entier contenu dans $n+\varphi$, on a

(1) $$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n\varphi r = a(1+r)^n(1+\varphi r),$$

et, en prenant les logarithmes,

$$\log A = \log a + \log(1+\varphi r) + n\log(1+r)$$

ou bien

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} - \frac{\log(1+\varphi r)}{\log(1+r)}.$$

Mais $\frac{\log(1+\varphi r)}{\log(1+r)}$ est moindre que 1 ; on a donc, à moins d'une unité près,

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}.$$

Si donc on évalue $\frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$ par défaut à moins d'une unité près, on aura n; n une fois connu, l'équation (1) fera connaître φ par la résolution d'une équation du premier degré.

Problème IV. — *A quel taux faut-il placer la somme a pour obtenir la somme* A *au bout du temps* $n+\varphi$?

On partira toujours de la formule

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n r\varphi,$$

ou bien

(1) $$A = a(1+r)^n(1+r\varphi).$$

Le taux qui dépend de r s'obtient par la résolution d'une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré; mais on peut profiter de la petitesse de r pour la résoudre par approximations successives, et l'on pose d'abord

$$A = a(1+r_1)^n.$$

De là on tire une première valeur de r,

$$\log(1+r_1) = \frac{\log A - \log a}{n},$$

trop grande. Si dans l'équation (1) on remplace le facteur r du produit $r\varphi$ par r_1, on trouve, en résolvant par rapport à r, une seconde valeur approchée r_2 de r,

$$\log(1+r_2) = \frac{\log A - \log[a(1+r_1\varphi)]}{n},$$

trop grande. En opérant avec r_2 comme avec r_1, on obtient une valeur r_3 trop petite, et ainsi de suite.

X. — DES ANNUITÉS.

Une annuité est une somme que l'on paye chaque année, soit pour éteindre une dette, soit pour se réserver un capital.

Problème I. — *Pendant n années on paye a francs au commencement de chaque année : on demande quel capital on aura formé au bout des n années, le taux de l'argent étant* $100r$ *pour* 100.

Les a francs placés au commencement de la première année sont devenus $a(1+r)^n$.

Les a francs placés au commencement de la deuxième année sont devenus $a(1+r)^{n-1}$.

. . . .

Les a francs placés au commencement de la $n^{\text{ième}}$ année sont devenus $a(1+r)$.

On pourra donc retirer, au bout de n années,

$$a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r),$$

c'est-à-dire (p. 197)

$$a\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1}(1+r),$$

ou bien

$$a[(1+r)^n-1]\left(1+\frac{1}{r}\right).$$

Problème II. — *Quelle annuité a faut-il payer pour éteindre une dette A en n années, le taux étant de* $100r$ *pour* 100?

Au bout de n années, A est devenu $A(1+r)^n$; en désignant par a l'annuité qu'il faut payer à la fin de chaque année, on devra poser

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a,$$

ou bien

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1},$$

ou enfin

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r},$$

d'où l'on tire

$$a = A\frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n-1}.$$

Problème III. — *Au bout de combien de temps aura-t-on éteint une dette A par une annuité de a au taux de* $100r$ *pour* 100?

En désignant par n ce temps, il faudra poser

$$A(1+r)^n \leqq \frac{a}{r}[(1+r)^n-1].$$

On résoudra par rapport à n, en ayant soin de choisir

le plus petit nombre entier satisfaisant à l'inégalité. En $n - 1$ années, la dette ne sera pas tout à fait éteinte; on fera alors la différence

$$A(1+r)^{n-1} - \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1] = \delta.$$

On trouvera une quantité δ inférieure à A : cette somme resterait à payer. Si donc on veut attendre encore un an, la dernière annuité devra être $\delta(1+r)$.

Problème IV. — *Quelle somme faut-il placer pour obtenir pendant n années une rente de a francs, le taux étant* $100r$ *pour* 100?

En désignant par x la somme qu'il faut placer, cette somme vaudra, au bout de n années, $x(1+r)^n$; la rente reçue équivaut à

$$a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a = a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

On a donc

$$x(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

On tire de là

$$x = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{(1+r)^n r}.$$

Faisons $n = \infty$; nous aurons la somme y qu'il faut placer pour obtenir une rente perpétuelle de a francs :

$$y = \lim \frac{a[(1+r)^n - 1]}{(1+r)^n r} = \lim \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] = \frac{a}{r}.$$

Ainsi la somme qu'il faut placer pour obtenir la rente perpétuelle est $\frac{a}{r}$.

Pour tout ce qui concerne l'intérêt de l'argent, on consultera avec fruit la *Théorie mathématique des opérations financières*, de M. Charlon.

EXERCICES.

1. Trouver le produit des termes d'une progression géométrique.

2. Dans les formules

$$s = \frac{(a+l)n}{2}, \quad l = a + \overline{n-1}\,r,$$

relatives aux progressions arithmétiques, on peut se donner deux des quantités a, l, n, r et se proposer de calculer les deux autres.

3. Problème analogue pour les progressions géométriques.

4. Les termes des progressions géométriques croissent avec une rapidité qui dépasse l'imagination. Voici quelques exemples qui pourront convaincre le lecteur.

Trouver la quantité de blé obtenue en plaçant 1 grain sur la 1re case d'un échiquier, 2 sur la 2e, 4 sur la 3e, et ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la 64e. Cette quantité de blé avait été demandée, dit-on, par l'inventeur du jeu d'échecs comme récompense de sa découverte. (Hâtons-nous de dire que cette anecdote est d'une authenticité fort douteuse.)

5. En supposant qu'Adam ait eu 3 fils, chacun d'eux 3 autres fils, et ainsi de suite; en supposant de plus que la vie d'un homme soit de 1 siècle, on demande quelle devrait être actuellement la population mâle du globe.

6. En supposant que le prix du pain augmente de $\frac{1}{10}$ de sa valeur chaque année, on demande quel devrait être aujourd'hui le prix de

la livre de pain, sachant que du temps d'Adam ce prix s'élevait à 1 centime les 100 kilogrammes.

7. Si la population d'un empire s'est accrue en 200 ans de $\frac{1}{10}$ de sa valeur primitive, calculer l'accroissement annuel moyen de la population.

8. Démontrer que l'on peut construire une progression géométrique, connaissant le nombre des termes, la somme de ces termes et la somme de leurs carrés.

9. Trouver cinq nombres en progression arithmétique connaissant leur somme et leur produit.

10. Trouver la somme des termes de la suite

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

11. On donne un triangle rectangle ABC en A; du sommet A on mène AA′ perpendiculaire sur BC, du point A′ on mène A′A″ perpendiculaire sur AC, du point A″ on mène A″A‴ perpendiculaire sur A′C, ...: trouver la limite de la somme

$$AA' + A'A'' + A''A''' + A'''A^{\text{iv}} + \ldots.$$

12. Un polygone régulier de n côtés est inscrit dans un cercle de rayon donné R; on mène les rayons de ce polygone et on le décompose ainsi en triangles isoscèles, tels que OAB; dans OAB on inscrit un cercle K_1, on trace un second cercle K_2 tangent à K_1 et aux droites OB et OA plus petit que le cercle K_1; on trace un troisième cercle K_3 plus petit que K_2 et tangent à K_2 ainsi qu'aux droites OA, OB et ainsi de suite. 1° Calculer pour un polygone d'un nombre de côtés donné n la limite de la somme des aires des cercles K_1, K_2, K_3, ... 2° Le nombre n croissant indéfiniment, calculer la limite de la somme de tous les cercles analogues à K_1, K_2, ...; en d'autres termes, calculer la limite de $n(K_1 + K_2 + K_3 + \ldots)$ pour $n = \infty$.

14. Un vase plein, de volume V, contient de l'eau salée, et dans cette eau il y a en dissolution un poids p de sel. On vide ce vase, et l'on admet qu'il reste adhérent aux parois un volume v de liquide. On remplit ce vase d'eau pure et on le vide de nouveau pour le rincer, et ainsi de suite un nombre de fois représenté par n. Prouver que,

quel que soit n, le vase V contiendra toujours du sel; calculer le poids x de sel qu'il contiendra après la $n^{\text{ième}}$ opération.

15. Quelle somme faut-il placer actuellement pour obtenir dans p années une rente de a francs payable pendant n années?

16. Au bout de combien de temps un capital placé au taux r est-il doublé, triplé, ...?

17. A quel taux faut-il placer un capital pour le doubler en n années?

18. Calculer le logarithme de 2 à un centième près dans le système de logarithmes dont la base est 16.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

NOTE SUR UNE QUESTION DE MAXIMUM.

A la p. 181, nous avons donné une méthode qui n'est peut-être pas à l'abri de toute objection, pour trouver le maximum d'un produit de facteurs dont la somme est constante. Tout revient à montrer que la moyenne arithmétique de plusieurs quantités (nécessairement positives) est plus grande que leur moyenne géométrique.

1° Supposons qu'il s'agisse d'abord de deux quantités a, b; il est clair que

$$(a-b)^2 \geqq 0,$$

ou

$$a^2+b^2-2ab \geqq 4ab,$$

ou

$$(a+b)^2 \geqq 4ab,$$
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab};$$

et il n'y a égalité que si $a=b$.

2° Supposons maintenant qu'il s'agisse de quatre quantités a, b, c, d; on a, en vertu des considérations précédentes,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) \geqq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}},$$

ou

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}.$$

S'il s'agit de 8 quantités a, b, c, d, e, f, g, h, on aura

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c+d}{4}+\frac{e+f+g+h}{4}\right) \geqq \sqrt{\sqrt[4]{abcd}\sqrt[4]{efgh}},$$

ou

$$\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8} \geqq \sqrt[8]{abcdefgh};$$

et ainsi de suite. Le théorème est donc établi pour un nombre de quantités qui est une puissance de 2; pour l'établir d'une façon générale, il suffira de prouver que s'il est vrai pour un nombre de quantités égal à n, il est encore vrai pour $n-1$ quantités. Et en effet, si l'on a

$$\frac{a+b+\ldots+k+l}{n} \geqq \sqrt[n]{abc\ldots kl},$$

on aura

$$(a+b+\ldots+l)^n > n^n.a.b.c\ldots kl.$$

Dans cette formule, posons

$$l = \frac{a+b+\ldots+k}{n-1},$$

et il viendra

$$(a+b+c+\ldots+k)^n \frac{n^n}{(n-1)^n} \geqq n^n.abc\ldots k\left(\frac{a+b+\ldots+k}{n-1}\right),$$

ou enfin

$$\frac{(a+b+c+\ldots+k)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \geqq abc\ldots k,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a+b+c+\ldots+k}{n-1} \geqq \sqrt[n-1]{abc\ldots k}.$$

C. Q. F. D.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Préface v

Introduction xi

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER. — Notions fondamentales 1

I. — Préliminaires 1
II. — Quantités algébriques 3
III. — Addition 4
IV. — Soustraction 9
V. — Multiplication et division 10

CHAPITRE II. — Des polynomes 17

I. — Préliminaires 17
II. — Addition et soustraction 18
III. — Multiplication 20
IV. — Sur quelques simplifications qui se présentent dans le calcul 24
V. — Division et fractions algébriques 26

CHAPITRE III. — Des polynomes entiers 36

I. — Définition 36
II. — Multiplication des polynômes entiers 37
III. — Propriétés des polynômes entiers 37
IV. — Corollaires 45
V. — Division des polynômes entiers 47
VI. — Remarques relatives à la théorie de la division 52
VII. — Méthode des coefficients indéterminés 54

Pages.

CHAPITRE IV. — Théorie des radicaux arithmétiques 59

I. — Définition 59
II. — Réduction au même indice 60
III. — Multiplication et division des radicaux 62
IV. — Formule du binôme 63
V. — Puissance d'un polynôme 65
VI. — Racines des polynômes 68
VII. — Cas de la racine carrée 69
VIII. — Remarques 71

CHAPITRE V. — Équations du premier degré 75

I. — Principes généraux 75
II. — Usage des principes précédents 80
III. — Des équations du premier degré à une inconnue 83
IV. — Des équations du premier degré à plusieurs inconnues .. 84
V. — Discussion des cas qui peuvent se présenter dans la résolution d'un système de deux équations du premier degré 92
VII. — Des problèmes d'Algèbre qui conduisent à des équations du premier degré 98
VIII. — Interprétation des solutions négatives 103
IX. — Théorie des erreurs relatives 109
X. — Des solutions de la forme $\frac{m}{0}$ 112
XI. — Théorèmes sur les limites 114
XII. — Sur les solutions de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 116

CHAPITRE VI. — Des déterminants 127
I. — Définitions 127
II. — Propriétés des déterminants 129
III. — Résolution d'un système général d'équations linéaires .. 134
IV. — Discussion des formules précédentes 136
V. — Remarques 138
VI. — Condition pour que des fonctions linéaires soient indépendantes 141
VII. — Sur des simplifications relatives au calcul des déterminants 143
VIII. — Multiplication des déterminants 144

CHAPITRE VII. — Des équations du second degré et des questions qui en dépendent 154
I. — De la racine carrée 154

Pages.

II. — Résolution de l'équation du deuxième degré à une inconnue 156
III. — Discussion des racines de l'équation du deuxième degré. 161
IV. — Discussion du trinôme ax^2+bx+c 165
V. — Examen du cas où le coefficient de x^2 est très petit 170
VI. — Des équations bicarrées 172
VII. — Propriété remarquable du trinôme x^4+px^2+q 176
VIII. — Des questions de maximum résolues par des équations du second degré 177
IX. — Sur quelques questions de maximum résolues à l'aide de procédés élémentaires 181

CHAPITRE VIII. — Théorie des progressions et des logarithmes..... 194

I. — Progressions arithmétiques 194
II. — Progressions géométriques........ 196
III. — Insertion de moyens 198
IV. — Quelques théorèmes sur les puissances des nombres ... 199
V. — Des progressions géométriques décroissantes........ 201
VI. — Définition d'un système de logarithmes........ 202
VII. — Propriétés des logarithmes........ 205
VIII. — Usage des Tables........ 207
IX. — Règles d'intérêt composé 214
X. — Des annuités 217

Note sur une question de maximum... 223

23501 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ
D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

CINQUIÈME ÉDITION,

EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES;

REVUE

Par J.-B. MARCHAND,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE,

À l'usage des Classes de Mathématiques spéciales.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894



TRAITÉ

D'ALGÈBRE.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

TRAITÉ
D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

CINQUIÈME ÉDITION,
EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES.
revue
Par J.-H. MARCHAND,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE,
A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

TRAITÉ D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

ANALYSE COMBINATOIRE.

I. — DES ARRANGEMENTS.

On appelle *arrangements* de m objets pris n à n les résultats obtenus en prenant n de ces objets de toutes les manières possibles, de telle sorte que deux quelconques de ces résultats diffèrent soit par les objets dont ils sont composés, soit par l'ordre de ces objets.

Proposons-nous de trouver le nombre des arrangements de m objets pris n à n, nombre que l'on désigne habituellement par le symbole A_m^n. A cet effet, supposons que l'on connaisse le nombre des arrangements de m objets pris i à i, ou A_m^i; si l'on veut former les arrangements de m objets pris $i+1$ à $i+1$, il faudra ajouter successivement à chaque arrangement des m objets pris i à i les $m-i$ objets qui n'y entrent pas. On formera ainsi $m-i$ nou-

veaux arrangements avec chacun des anciens, c'est-à-dire en tout $A_m^i(m-i)$ nouveaux résultats.

Je dis : 1° que tous ces résultats sont des arrangements différents, car ils diffèrent, soit par l'arrangement composé de i objets qui a servi à les former, soit par le dernier objet ajouté; 2° qu'un arrangement quelconque composé de $i+1$ objets s'y trouve, car, si à cet arrangement on enlève son dernier objet, on retrouve un arrangement de i objets. Or, comme ils ont été tous employés, l'arrangement composé de $i+1$ objets se trouve parmi ceux que nous avons formés; on a donc enfin

$$A_m^{i+1} = A_m^i(m-i).$$

Si l'on observe alors que A_m^1 est égal à m et si dans la formule précédente on fait $i=1, 2, 3, \ldots, n-1$, on trouve

$$A_m^2 = m(m-1), \quad A_m^3 = A_m^2(m-2), \quad \ldots,$$
$$A_m^n = A_m^{n-1}(m-n+1),$$

et, en multipliant ces égalités membre à membre, puis en supprimant dans les deux membres de la formule résultante des facteurs égaux,

$$A^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

C. Q. F. D.

II. — DES PERMUTATIONS.

On appelle *permutations* de n objets les résultats obtenus en disposant ces n objets les uns à côté des autres de toutes les manières possibles.

Proposons-nous de trouver le nombre des permutations de n objets; désignons ce nombre par P_n (*). Supposons

(*) On désigne quelquefois ce nombre par le symbole $n!$.

que l'on sache former le nombre P_i : à chaque permutation de i objets ajoutons un nouvel objet, en lui faisant occuper successivement la première, la seconde, ..., la $i+1^{\text{ième}}$ place; on formera ainsi $(i+1)P_i$ résultats différents, soit par la permutation de i objets qui a servi à les former, soit par le rang occupé par le nouvel objet. En second lieu, une permutation quelconque de $i+1$ objets fait partie de celles que l'on vient de considérer, car, en lui enlevant le dernier de ses objets, on retombe sur une des permutations de i objets, permutations qui ont été toutes employées. On a donc

$$P_{i+1} = P_i(i+1).$$

En faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et en observant que P_1 est égal à 1, on a

$$P_2 = 1.2, \quad P_3 = P_2.3, \quad \ldots, \quad P_n = P_{n-1}.n,$$

et par suite, en multipliant ces égalités membre à membre,

$$P_n = 1.2.3\ldots n.$$

On peut remarquer que

$$P_n = A_n^n.$$

Et, en effet, si dans la formule trouvée page 2 on fait $m = n$, on trouve

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = P_n.$$

III. — DES COMBINAISONS.

On appelle *combinaisons* de m objets pris n à n les résultats obtenus en prenant n de ces objets de toutes les manières possibles, deux résultats différant seulement par

la nature des objets qui entrent dans chacun d'eux et non par leur ordre.

Désignons par C_m^i le nombre des combinaisons de m objets pris i à i; pour former les combinaisons de m objets pris $i+1$ à $i+1$, on peut, à chaque combinaison composée de i objets, ajouter chacun des $m-i$ objets qui n'y entrent pas. On obtient ainsi $C_m^i \times (m-i)$ résultats qui contiendront toutes les combinaisons formées de $i+1$ objets, puisque, en retranchant un objet à l'une des combinaisons formée de $i+1$ objets, on retrouve une combinaison formée de i objets, et que toutes celles-ci ont été employées; mais les résultats que nous obtenons de la sorte ne sont pas tous différents. En effet, si nous considérons l'un quelconque d'entre eux, quel que soit l'objet que l'on en retranche, on retombe sur une combinaison différente formée de i objets; une combinaison quelconque de m objets pris $n+1$ à $n+1$ a donc été obtenue par notre procédé de $i+1$ manières différentes, en sorte que $C_m^i(m-i)$ représente $i+1$ fois C_m^{i+1}. On a donc

$$C_m^{i+1} = C_m^i \frac{m-i}{i+1},$$

d'où l'on conclut, en faisant $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, et en observant que le nombre des combinaisons de m objets pris un à un est m,

$$C_m^2 = m\frac{m-1}{2}, \quad C_m^3 = C_m^2 \frac{m-2}{3}, \quad \ldots,$$

$$C_m^n = C_m^{n-1} \frac{m-n+1}{n},$$

d'où l'on conclut

$$(1) \qquad C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

On voit, d'après ce qui précède, que

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Cette formule peut du reste se démontrer directement en observant que les arrangements de m objets pris n à n peuvent s'obtenir en permutant les n objets de chaque combinaison de m objets pris n à n, de toutes les manières possibles. On a donc

$$A_m^n = C_m^n \times P_n,$$

d'où l'on déduit la formule précédente, et par suite, si l'on veut, la formule (1).

Si l'on adopte la notation $n!$ pour représenter le produit $1.2.3\ldots n$, la formule (1) peut encore s'écrire

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

IV. — REMARQUES AU SUJET DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

Problème I. — *Concevons qu'après avoir formé les arrangements de m lettres prises n à n on suppose i de ces lettres identiques à a, j de ces lettres identiques à b, etc. : combien obtiendra-t-on de résultats différents?*

Supposons d'abord qu'il n'y ait que i lettres identiques à a :

1° Les arrangements où a n'entre pas seront tous différents : ce sont les arrangements de $m-i$ lettres prises n à n; leur nombre est A_{m-i}^n ou

$$P_n C_{m-i}^n.$$

2° Les arrangements où a entre une fois seront encore tous différents : si nous voulons en connaître le nombre,

considérons les combinaisons correspondantes; ôtons a, nous aurons les combinaisons de $m-i$ lettres $n-1$ à $n-1$. Si dans chacune de ces combinaisons nous permutons les n lettres qui y entrent y compris a, nous aurons $P_n C_{m-i}^{n-1}$ résultats différents ou $\frac{P_n}{P_1} C_{m-i}^{n-1}$.

3° Les arrangements où a entre deux fois ne seront pas tous différents; si nous ôtons deux fois a et si nous considérons les combinaisons correspondantes, elles sont en nombre C_{n-i}^{n-2}, et, si nous permutons les lettres qui y entrent en y comprenant deux fois a, nous aurons $P_n C_{m-i}^{n-2}$ résultats qui ne seront pas tous différents, car, en permutant les deux lettres a dans chaque combinaison, on ne la change pas; il n'y aura donc en tout que $\frac{P_n}{P_2} C_{m-i}^{n-2}$ résultats différents, etc. Le nombre cherché est donc

$$P_n\left(C_{m-i}^{n} + \frac{C_{m-i}^{n-1}}{P_1} + \frac{C_{m-i}^{n-2}}{P_2} + \frac{C_{m-i}^{n-3}}{P_3} + \ldots + \frac{C_{m-i}^{n-i}}{P_i}\right).$$

Supposons maintenant qu'il y ait i lettres égales à a, j lettres égales à b.

Le terme général de la quantité cherchée sera le nombre des arrangements dans lesquels a entre μ fois et b ν fois. Il est facile de voir que ce nombre est

$$\frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu},$$

en sorte que le nombre des résultats cherchés est

$$\sum \frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu},$$

μ et ν restant toujours moindres que i et j, etc.

Problème II. — *Trouver le nombre des permutations différentes que l'on obtient en supposant un certain nombre de lettres identiques dans les permutations de n lettres.*

P_n étant le nombre des permutations de n lettres, si parmi ces lettres il y en a i identiques à a, il est clair qu'en permutant ces lettres a on aura des résultats identiques; les permutations P_n se partagent en groupes de P_i permutations identiques : donc les permutations essentiellement différentes se réduisent au nombre de $P_m : P_i$ quand i lettres deviennent identiques à a; si, en outre, j lettres deviennent identiques à b, le nombre des permutations distinctes se réduira à $\frac{P_m}{P_i P_j}$, etc.

Problème III. — *Trouver le nombre des résultats différents obtenus en supposant, dans les combinaisons de m lettres prises n à n, i lettres identiques à a, j lettres identiques à b.*

Considérons une combinaison dans laquelle a entre μ fois, b ν fois, etc.; supprimons les lettres a et b de cette combinaison, nous trouvons une combinaison de $m-i-j$ lettres prises $n-\mu-\nu$ à $n-\mu-\nu$; donc le nombre des combinaisons distinctes où a entre μ fois et b ν fois est $C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu}$, d'où l'on conclut facilement le nombre cherché.

V. — FORMULE DU BINOME.

On appelle *formule du binôme* celle qui fait connaître le développement d'une puissance quelconque d'un binôme. Cette formule (dans le cas où l'exposant de la puissance est entier et positif) paraît avoir été connue bien avant Newton, on la trouve dans les Œuvres de Pascal. On peut consulter à ce sujet : 1° l'article Binôme dans le *Dictionnaire des Mathématiques* de Montferrier; 2° un article de M. O. Terquem, inséré dans ses *Nouvelles Annales*, t. VI; 3° enfin, l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla.

Voici comment on peut arriver à cette formule à l'aide de l'analyse combinatoire.

Multiplions entre eux les binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l).$$

Pour faire un produit de deux polynômes, on multiplie chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; en d'autres termes, le produit de deux polynômes est la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chaque polynôme de toutes les manières possibles.

Le produit de trois polynômes est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chaque polynôme de toutes les manières possibles, et ainsi de suite (t. I, p. 24).

Cela posé, le produit que nous cherchons est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des binômes $(x+a), (x+b), \ldots$ de toutes les manières possibles. Prenons d'abord x dans chacun des m binômes en question, nous formons le terme x^m; prenons ensuite x dans $m-1$ binômes et le second terme dans le $m^{\text{ième}}$ binôme restant; faisons cette opération de toutes les manières possibles, la somme des termes ainsi obtenus sera $x^{m-1}(a+b+\ldots+l)$, que l'on peut désigner par la notation abrégée

$$x^{m-1}\sum a,$$

déjà employée (Ire Partie, p. 65, 66). En général, si nous prenons x dans $m-n$ binômes, il faudra prendre les seconds termes dans chacun des n binômes restants; en répétant cette opération de toutes les manières possibles et en ajoutant les résultats, on trouve

$$x^{m-n}\sum abc\ldots f,$$

$\sum abc\ldots f$ désignant, pour abréger, la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs n des m lettres $a, b, c, \ldots, l$ de toutes les manières possibles. $\sum abc\ldots f$ représente donc la somme des combinaisons des m lettres $a, b, \ldots, f$ prises n à n sous forme de produits. Si donc on vient à supposer $a = b = c = \ldots = l$, le terme que nous venons de calculer se réduit à

$$C_m^n x^{m-n} a^n.$$

Enfin, pour achever la formation du produit que nous cherchons, nous prendrons les seconds termes des binômes, et nous aurons le terme $abc\ldots l$; nous pourrons donc écrire

$$(1)\quad \begin{cases} (x+a)(x+b)\ldots(x+l) \\ \quad = x^m + x^{m-1}\sum a + \ldots + x^{m-n}\sum ab\ldots f + \ldots + ab\ldots l. \end{cases}$$

Nous aurons plus loin occasion de faire usage de cette formule; si l'on y fait $a = b = c = \ldots = l$, il vient

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \ldots + C_m^n a^n x^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Cette formule peut encore s'écrire, en remplaçant C_m^n par sa valeur

$$(2)\quad \begin{cases} (x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \ldots \\ \quad + \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a^n x^{m-n} + \ldots + a^m. \end{cases}$$

Nous ferons, au sujet de cette formule, plusieurs remarques importantes.

1° *Deux coefficients également éloignés des extrêmes dans le développement de $(x+a)^m$ sont égaux.*

En effet, en changeant x en a et a en x, les coefficients des termes ne changent pas; le premier membre de l'équation (2) ne change pas non plus. On a alors, en identifiant les deux développements de $(x+a)^m$ que l'on obtient ainsi, c'est-à-dire en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, le théorème qu'il s'agissait d'établir; il conduit à la formule

$$C_m^n = C_m^{m-n},$$

que l'on peut vérifier directement. Elle revient, en effet, à la suivante :

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}.$$

Si l'on réduit les deux membres de cette égalité au même dénominateur, les numérateurs deviennent égaux à $1.2.3\ldots n$.

2° Si l'on fait $a = x = 1$, on a

$$2^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^n + \ldots + C_m^m.$$

3° Si l'on fait $a = -x = -1$, on a

$$0 = 1 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots \pm C_m^n \mp \ldots \pm C_m^m.$$

4° Si, dans la formule (2), on met le terme général sous la forme

$$(3) \qquad \frac{m!}{n!(m-n)!} a^{m-n} x^n,$$

$i!$ désignant d'une manière générale le produit $1.2.3\ldots i$, si l'on change ensuite a en $a+b$, le terme général du développement de $(x+a+b)^m$ sera donné par le terme général du développement de l'expression (3) dans la-

quelle on aura changé a en $a+b$; il sera donc

$$\frac{m!(m-n)!}{n!(m-n)!(m-n-\alpha)!\alpha!}a^{\alpha}b^{m-n-\alpha}x^{n}$$
$$=\frac{m!}{n!(m-n-\alpha)!\alpha!}a^{\alpha}b^{m-n-\alpha}x^{n}.$$

En changeant ensuite b en $b+c$, on obtient de la même façon le terme général du développement de $(x+a+b+c)^m$, et, en continuant ainsi, on trouve, comme t. I, p. 67,

$$(x+a+b+\ldots+l)^m=\sum\frac{m!}{n!\alpha!\beta!\ldots\lambda!}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}x^{n},$$

formule dans laquelle on a toujours

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda+n=m;$$

les entiers $\alpha,\beta,\ldots$ pouvant être nuls, on y supposera a^0 égal à 1, et $0!$ égal à 1.

VI. — DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

Considérons les coefficients des puissances successives du binôme; écrivons sur une première ligne les coefficients de la première puissance, c'est-à-dire 1 et 1; sur

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

une seconde ligne écrivons les coefficients de la seconde puissance, c'est-à-dire 1, 2, 1, et ainsi de suite, de sorte

que les coefficients des termes de même rang se correspondent dans une même colonne verticale. Le Tableau que nous formons ainsi porte le nom de *triangle arithmétique;* les propriétés de ce triangle ont été développées avec beaucoup de soin par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique;* toutefois il ne dispose pas son

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

triangle tout à fait de la même façon que nous. Si nous concevons que, dans le triangle dont nous avons parlé en premier lieu, on fasse glisser chaque colonne verticale de manière à amener toutes les unités qui sont en tête sur une même ligne horizontale, on aura le triangle de Pascal. Les nombres qui sont inscrits dans la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne verticale du triangle portent le nom de *nombres figurés du $n^{\text{ième}}$ ordre;* les nombres du premier ordre, ou 1, 2, 3, 4,.... portent aussi le nom de *nombres naturels*, les nombres du second ordre celui de *nombres triangulaires*, les nombres du troisième ordre celui de *pyramidaux*, les nombres du quatrième ordre celui de *triangulo-triangulaires*.

THÉORÈME I. — *Le $i^{\text{ème}}$ nombre figuré de l'ordre n a pour expression*

$$\frac{i(i+1)\ldots(i+n-1)}{1.2.3\ldots n} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)}.$$

En effet, les nombres figurés de l'ordre n sont les nombres de combinaisons n à n; le premier est relatif à n objets,

le second à $n+1, \ldots$, le $i^{\text{ième}}$ à $n+i-1$, en sorte que le $i^{\text{ième}}$ nombre figuré de l'ordre n est C_{n+i-1}^{n}, ou, d'après un corollaire (p. 10), C_{n+i-1}^{i-1}, c'est-à-dire

$$\frac{(i+n-1)(i+n-2)\ldots i}{1.2.3\ldots n} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+i-1)(n+i-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(i-1)},$$

expressions identiques avec celles que nous avions annoncées.

Théorème II. — *Un nombre figuré est égal au nombre écrit immédiatement au-dessus de lui dans le triangle arithmétique, augmenté du nombre placé à la gauche de ce dernier.*

En d'autres termes,

$$C_{n+i}^{n} = C_{n+i-1}^{n} + C_{n+i-1}^{n-1}.$$

Cette formule se vérifie très-facilement en remplaçant les symboles C_{n+i}^{n}, C_{n+i-1}^{n}, C_{n+i-i}^{n-1} par leurs valeurs. Voici comment on peut l'établir directement. Considérons la formule

$$(x+a)^{n+i-1} = x^{n+i-1} + \ldots + C_{n+i-1}^{n} a^n x^{i-1} + \ldots,$$

démontrée pages 8 et 9; multiplions ses deux membres par $(x+a)$, nous aurons

$$(x+a)^{n+i} = x^{n+i} + \ldots + (C_{n+i-1}^{n} + C_{n+i-1}^{n-1}) a^n x^i + \ldots;$$

or, en identifiant cette formule avec celle que l'on obtient en appliquant directement la formule du binôme à l'expression $(x+a)^{n+i}$, on trouve

$$C_{n+i-1}^{n} + C_{n+i-1}^{n-1} = C_{n+i}^{n}.$$

C. Q. F. D.

Théorème III. — *Il resulte du théorème précédent*

qu'un nombre figuré quelconque est égal à la somme des nombres figurés de l'ordre précédent, placés immédiatement au-dessus de lui dans le triangle arithmétique.

Ainsi, l'on a

$$\frac{i(i+1)\dots(i+n-1)}{1.2.3\dots n} = \frac{1.2.3\dots(n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} + \frac{2.3.4\dots n}{1.2\dots(n-1)} + \dots + \frac{i(i+1)\dots(i+n-2)}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

Le triangle arithmétique dont nous venons de parler est un cas particulier d'un triangle beaucoup plus général, que Pascal appelle aussi *triangle arithmétique* et que nous allons apprendre à former.

Dans une première colonne verticale écrivons le nombre a; dans une seconde colonne contiguë écrivons les nombres a, $a+b$, $2a+b$, ..., obtenus en ajoutant au nombre b les produits de a par les nombres figurés du premier ordre; dans une troisième colonne écrivons les produits des nombres du second ordre par a augmentés des produits des nombres du premier ordre par b, et ainsi de suite; nous formerons le Tableau ci-contre.

a				
a	b			
a	$a+b$	b		
a	$2a+b$	$a+2b$	b	
a	$3a+b$	$3a+3b$	$a+3b$	b
a	$4a+b$	$6a+4b$	$4a+6b$	$a+4b$
a	$5a+b$	$10a+5b$	$10a+10b$	$5a+10b$

Les propriétés connues des nombres figurés montrent : 1° qu'*un nombre inscrit dans le Tableau précédent est égal à celui qui est placé au-dessus de lui augmenté de celui qui est à gauche de ce dernier;* 2° qu'*un nombre*

quelconque est égal à la somme de tous ceux qui sont écrits au-dessus de lui dans la colonne précédente.

Considérons la troisième colonne de notre dernier Tableau; faisons $b = 1$, elle se composera de la suite

$$1, \quad a + 2, \quad 3a + 3, \quad 6a + 4, \quad 10a + 5, \quad \ldots.$$

Lorsque $a = 1$, on retrouve les *nombres triangulaires;* lorsque $a = 2$, on obtient les *nombres carrés,* qui ne sont autre chose que les carrés des nombres naturels; lorsque $a = 3$, on obtient ce que l'on appelle les *nombres pentagonaux;* lorsque $a = 4$, on obtient les *nombres hexagonaux,* etc. Voici maintenant la raison de ces dénominations.

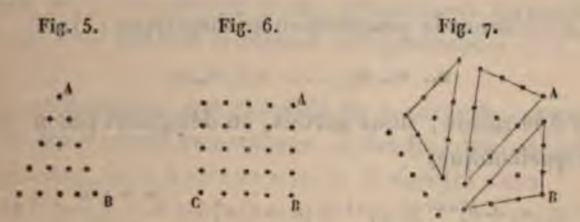


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

Considérons la *fig.* 5 : elle commence par un point; au-dessous on a placé deux points, puis trois, puis quatre, etc. Si n représente le nombre de points placés sur le côté AB, le nombre total des points contenus dans la figure sera

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n,$$

somme des n premiers nombres naturels, c'est-à-dire représentera le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire.

Si nous considérons maintenant la *fig.* 6, si nous désignons par n le nombre de points contenus dans le côté AB, il y aura n^2 points en tout dans la figure; or, on peut évaluer ce nombre d'une autre manière, en observant que l'on trouve de chaque côté de la diagonale AC

k points, k désignant le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre triangulaire; il y a donc en tout

$$2k+n=n(n-1)+n=n^2$$

points dans la figure, c'est-à-dire un nombre de points marqué par le $n^{\text{ième}}$ nombre carré.

Si nous considérons la *fig.* 7 et si le côté AB contient n points, nous voyons que la figure totale contiendra, en désignant par k le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, $3k+n$ points, et ainsi de suite.

VII. — SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES TERMES D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

Considérons la progression arithmétique (*)

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_m,\ u_{m+1},\ \ldots.$$

Soit h la raison; nous aurons, en désignant par n un entier quelconque,

$$u_2^{n+1}=(u_1+h)^{n+1}=u_1^{n+1}+(n+1)u_1^n h+\frac{(n+1)n}{1.2}u_1^{n-1}h^2+\ldots,$$

$$u_3^{n+1}=(u_2+h)^{n+1}=u_2^{n+1}+(n+1)u_2^n h+\frac{(n+1)n}{1.2}u_2^{n-1}h^2+\ldots,$$

. . . . ,

$$u_{m+1}^{n+1}=(u_m+h)^{n+1}=u_m^{n+1}+(n+1)u_m^n h+\frac{(n+1)n}{1.2}u_m^{n-1}h^2+\ldots.$$

(*) La théorie des nombres polygonaux et des progressions arithmétiques existe dans les œuvres de Diophante. Archimède a fait connaître la somme des carrés des n premiers nombres entiers, il l'a appliquée à la recherche de l'aire de la parabole; la somme des cubes des n premiers entiers a été donnée par Brahmegupta, au VIIe siècle; la somme des quatrièmes puissances a été donnée par Djamchîd ben Mas'oud ben Mahmoud, médecin arabe du XVIe siècle; Fermat a donné le premier une méthode générale pour la sommation des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

Ajoutons ces égalités membre à membre, il vient, en supprimant des termes communs de part et d'autre,

$$u_{m+1}^{n+1} - u_1^{n+1} = (n+1)h\sum_{i=1}^{i=m} u_i^n + \frac{(n+1)n}{1.2}h^2\sum_{i=1}^{i=m} u_i^{n-1} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum u_i^n = {} & \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_1^{n+1}}{(n+1)h} - \frac{n}{2}h\sum u_i^{n-1} \\ & - \frac{n(n-1)}{2.3}h^2\sum u_i^{n-2} - \ldots. \end{aligned} \right.$$

Cette formule permet de calculer la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des termes d'une progression arithmétique lorsque l'on connaît la somme des puissances 1, 2, 3,..., $n-1$.

Proposons-nous par exemple de trouver la somme des carrés des p premiers nombres. Il faudra, dans la formule précédente, faire $h=1$ et $n=2$; il viendra alors

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^2 = \frac{(p+1)^3 - 1}{3} - \frac{p(p+1)}{2} - \frac{p}{3},$$

ou bien, réductions faites,

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

La même formule (1) donne ensuite, pour $n=3$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=p} i^3 = {} & \frac{(p+1)^4 - 1}{4} - \frac{3}{2}\,\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\ & - \frac{3.2}{2.3}\,\frac{p(p+1)}{2} - \frac{3.2.1}{2.3.4}p, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, réductions faites,

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2.$$

VIII. — APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A LA SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

Dans les arsenaux, les projectiles emmagasinés sont aujourd'hui de deux espèces : les uns sont destinés aux pièces lisses et sont sphériques; les autres sont destinés aux pièces rayées et ont une forme cylindro-conique.

Nous nous occuperons d'abord de la sommation des piles de projectiles cylindro-coniques; ces piles sont formées d'une première rangée de projectiles se touchant tout le long d'une génératrice cylindrique. Soit n le nombre des projectiles placés dans cette rangée; au-dessus et entre les intervalles laissés par les projectiles de la première rangée, on place une seconde rangée de $n-1$ projectiles; au-dessus de cette rangée, on en place une troisième composée de $n-2$, et ainsi de suite. On forme ainsi une espèce de triangle dans lequel le nombre des projectiles employés est évidemment le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, ou $\frac{n(n+1)}{1.2}$; pour donner plus de solidité à la pile, on place plusieurs rangées verticales, semblables à celle dont nous venons de donner la description, les unes contre les autres. En désignant par p le nombre de ces rangées, le nombre total des boulets sera

$$p\frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc, *pour avoir le nombre des projectiles oblongs*

contenus dans une pile, comptez le nombre des boulets contenus en long et en large à la partie inférieure de la pile; si n désigne le nombre contenu dans le sens du diamètre et p le nombre contenu dans le sens de la longueur des projectiles, $p\frac{n(n+1)}{2}$ *représentera le nombre total des projectiles contenus dans la pile.*

Les boulets sphériques sont rangés le plus souvent sous forme de *piles rectangulaires;* les piles *carrées* ou *quadrangulaires* sont moins fréquemment usitées. Enfin on n'emploie que rarement les *piles triangulaires*, et seulement pour un petit nombre de projectiles, à cause de l'espace qu'elles exigent.

Occupons-nous d'abord de la pile triangulaire. Soit n le nombre des boulets contenus dans le côté du triangle équilatéral qui forme la base de la pile; cette base contient évidemment un nombre total de boulets égal au $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, ou $\frac{n(n+1)}{2}$ boulets; au-dessus de cette base ou première rangée, on en a placé une seconde, en ayant soin de mettre les nouveaux boulets entre les interstices laissés par les premiers. Le côté de cette seconde rangée ne contient que $n-1$ boulets; par conséquent, la rangée elle-même contient un nombre de boulets représenté par le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, et ainsi de suite. Il y aura donc en tout dans la pile un nombre de boulets égal à la somme des n premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire égal au $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal (de là le nom de *nombres pyramidaux* donné aux nombres du troisième ordre).

Donc, *si n désigne le nombre des boulets contenus dans le côté d'une pile triangulaire,*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

représentera le nombre total des boulets contenus dans la pile.

Considérons maintenant une pile quadrangulaire. Dans cette pile, la base est formée de boulets tangents, les points de contact ayant lieu aux extrémités des diamètres rectangulaires; la forme générale de cette base est un carré, en sorte que, si n désigne le nombre des boulets contenus dans le côté, n^2 représentera le nombre total des boulets contenus dans la base. Au-dessus de la base se trouve une rangée de $(n-1)^2$ boulets, et ainsi de suite, en sorte que le nombre total des boulets contenus dans la pile est la somme des carrés des n premiers nombres, ou

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi donc, *n désignant le nombre des boulets contenus dans le côté d'une pile quadrangulaire,*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

représentera le nombre total des boulets contenus dans cette pile.

Considérons enfin une pile rectangulaire; sa base est construite de la même manière que celle de la pile quadrangulaire. Soient a et n les nombres de boulets contenus dans les côtés de la base; au-dessus de la base, on place une rangée rectangulaire ayant $n-1$ et $a-1$ boulets de côté, et ainsi de suite. Posons a [illegible] le nombre total des boulets de la pile sera

[illegible]

c'est-à-dire

[illegible]

ou bien

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}p,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6},$$

ou bien

$$\frac{n(n+1)(3n'-n+1)}{6}.$$

On aurait pu arriver à ce résultat en observant que la pile pouvait se décomposer en une pile quadrangulaire ayant n boulets de côté et en une autre pile analogue aux piles de projectiles oblongs, mais inclinée, et ayant p et n boulets de côté.

Donc, *n et n' désignant le nombre des boulets contenus dans le petit et le grand côté d'une pile rectangulaire, le nombre total des boulets contenus dans la pile sera*

$$\frac{n(n+1)(3n'-n+1)}{6}.$$

Si dans cette formule on fait $n'=n$, on retrouve la formule qui convient aux piles quadrangulaires.

NOTES ET EXERCICES.

1. Dans les problèmes relatifs à l'analyse combinatoire, on est souvent amené à évaluer le produit $1.2.3\ldots n = n!$; quand n est grand, le calcul de ce produit est presque impraticable. Voici une formule (dont nous ne proposons pas la démonstration) que l'on donne dans les Traités de Calcul intégral et qui permet de calculer rapidement $n!$:

$$\log n! = n(\log n - 0,4342945) + 0,3990899 + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{6n}$$

(les logarithmes ont pour base 10). L'erreur commise par l'emploi de cette formule est moindre que $\frac{1}{10n^2}$.

Il ne faut pas oublier que $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$, $A_m^n = \frac{m!}{n!}$, $P_n = n!$.

Exemple. — De combien de manières 100 personnes peuvent-elles se ranger à table? De 100! manières. On a $\log 100! = 157,97131$. Le nombre cherché a donc 158 chiffres; les premiers sont 93598.

2. De combien de manières peut-on écrire les unes à la suite des autres α lettres a et β lettres b?

Rép. $\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} = C_{\alpha+\beta}^{\alpha}$.

3. De combien de manières peut-on écrire les unes à la suite des autres α lettres a, β lettres b, ..., λ lettres l?

Rép. $\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$.

4. Le nombre de manières dont on peut amener le point N avec μ dés à jouer est le coefficient de x^N dans le développement du polynôme $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^\mu$.

5. Trouver le plus grand terme du développement de $(a + b)^m$.

En appelant $\frac{m!}{\alpha!\beta!} a^\alpha b^\beta$ ce terme et en écrivant qu'il est plus grand que celui qui le précède et celui qui le suit, on trouve

$$\frac{\beta+1}{\alpha} > \frac{b}{a} > \frac{\beta}{\alpha+1},$$

d'où l'on tire

$$\alpha < \frac{(m+1)a}{a+b} < \alpha+1.$$

Donc α est le plus grand entier contenu dans $\frac{(m+1)a}{a+b}$.

6. De ce que le nombre des combinaisons de m objets pris n à n est $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$ on peut conclure que le produit de

n entiers consécutifs est divisible par $1.2.3\ldots n$. Par des considérations analogues, prouver que, si $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=m$, le produit $1.2.3\ldots m$ est divisible par

$$1.2.3\ldots\alpha\times 1.2.3\ldots\beta\times\ldots\times 1.2.3\ldots\lambda.$$

7. On a, quels que soient x, x_1, $\ldots$, x_n,

$$(-1)^n\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{x_1x_2x_3\ldots x_n}=1-\frac{x}{x_1}+\frac{x(x-x_1)}{x_1x_2}-\ldots$$
$$\pm\frac{x(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{x_1x_2x_3\ldots x_n}.$$

8. En appelant C_n^m, non plus le nombre des combinaisons de m objets n à n, mais la fraction $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$, où m peut être quelconque, entier ou fractionnaire ou même négatif et incommensurable, on a

$$C_m^n-C_m^1C_m^{n-1}+C_{m+1}^2C_m^{n-2}-C_{m+2}^3C_m^{n-3}+\ldots\pm C_{m+n-1}^n=0.$$

9. Démontrer la formule

$$(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}a(x+b)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a(a-3b)^2(x+3b)^{m-3}+\ldots.$$

(Abel.)

10. On appelle *factorielle* un produit de facteurs en progression arithmétique. On pose, d'après Vandermonde,

$$[a,r]^n=a(a+r)(a+2r)\ldots(a+\overline{n-1}\,r).$$

Kramp remplaçait le signe $[a,r]^n$ par $a^{r/n}$ Cela posé, on demande de prouver que

$$[a,0]^n=a^n,\quad [a,r]^n=[a,r]^{n-i}[a+\overline{n-i}\,r,r]^i,$$
$$A_m^n=[m-n+1,1]^n,\quad P_n=[1,1]^n,$$
$$[a+b,r]^m=[a,r]^m+C_m^1[a,r]^{m-1}[b,r]^1+C_m^2[a,r]^{m-2}[b,r]^2$$
$$+\ldots+C_m^n[a,r]^{m-n}[b,r]^n+\ldots.$$

Cette dernière formule est connue sous le nom de ***binôme de Vandermonde*** ou ***des factorielles***.

11. On a

$$1.2.3\ldots n = n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - \ldots \pm C_n^{n-1}1^n.$$

12. Si $n > i$, on a

$$o = n^i - C_n^1(n-1)^i + C_n^2(n-2)^i - \ldots \pm C_n^{n-1}1^i$$

13. Combien y a-t-il de termes dans un polynôme de degré m? (Un de degré o, $\frac{n}{1}$ du degré 1, $\frac{n(n+1)}{1.2}$ du degré 2, etc.; en tout $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m}$, n désignant le nombre des variables).

14. Avec des dames à jouer on forme une pile comme il suit : à la partie inférieure on forme une sorte d'hexagone régulier en plaçant n dames ayant leurs centres en ligne droite; contre cette rangée on place une seconde rangée contenant $n+1$ dames, puis une troisième en contenant $n+2$, ..., puis une $n^{\text{ième}}$ rangée, en contenant $n+n-1$; après quoi on place une $(n+1)^{\text{ième}}$ rangée contenant une dame de moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait placé une dernière rangée de n dames. Par-dessus cette figure on en place une autre formée de la même façon, mais contenant $n-1$ dames seulement sur son côté, et ainsi de suite, de sorte que la pile contienne une dame à sa supérieure, sept immédiatement au-dessous, puis dix-neuf, etc. Prouver que le nombre total des dames de la pile est n^3.

15. On peut toujours trouver pour A, B, C, ... des nombres rendant identiques les formules

$$n^2 = An(n+1) + B(n-1)n,$$
$$n^3 = A'n(n+1)(n+2) + B'(n-1)n(n+1) + C'(n-2)(n-1)n,$$

....

En conclure les valeurs de Σn^2, Σn^3, etc.

16. On peut toujours déterminer des nombres A, B, C, ... tels que l'on ait identiquement

$$n^i = A + Bn + C\frac{n(n+1)}{1.2} + \cdots + K\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots i}.$$

En profiter pour calculer Σn^i.

17. On a

$$\sqrt{n^n} < 1.2.3\ldots n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

18. L'expression

$$\frac{m^x.1.2.3\ldots m}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)} \quad \text{ou} \quad \frac{m^x}{x C_{x+m}^m},$$

étudiée avec soin par Gauss, se réduit, pour x entier, à

$$1.2.3\ldots(x-1)$$

quand on y suppose $m = \infty$.

19. Combien peut-on mener de diagonales à un polygone de n côtés?

20. Étant donnés n points, on les joint deux à deux de toutes les manières possibles : en combien de points les droites ainsi menées se rencontrent-elles?

21. Étant donnés n points, par tous ces points pris trois à trois on fait passer des cercles : en combien de points tous ces cercles se rencontrent-ils?

22. On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre de cas favorables à l'arrivée de l'événement au nombre total des cas possibles et également possibles qui peuvent se présenter quand on attend l'arrivée de l'événement.

Ainsi la probabilité d'amener le point 6 avec un dé est $\frac{1}{6}$, parce que six cas peuvent se présenter quand un dé est jeté sur un tapis et qu'un seul de ces cas est favorable à l'arrivée du point 6. Cela posé, on propose de résoudre les questions suivantes :

23. Calculer la probabilité d'amener le point 15 avec 3 dés.

Rép. $\frac{5}{108}$.

24. On prend m billets dans une loterie de N lots : quelle est la probabilité de gagner n lots?

Rép. $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$.

25. Une urne contient quatre-vingt-dix numéros, on en tire cinq au sort, on désigne un, deux, trois, quatre ou cinq numéros à l'avance : quelle est la probabilité de deviner juste dans chaque hypothèse

Rép. :

La probabilité pour que	1	des numéros désignés	sorte est	$\dfrac{1}{81}$
»	2	»	»	$\dfrac{2}{801}$
»	3	»	»	$\dfrac{1}{11748}$
»	4	»	»	$\dfrac{1}{511038}$
»	5	»	»	$\dfrac{1}{43949268}$

26. L'expression

$$1-\frac{x^m-1}{x-1}+\frac{x^m-1}{x-1}\,\frac{x^{m-1}-1}{x^2-1}-\frac{x^m-1}{x-1}\,\frac{x^{m-1}-1}{x^2-1}\,\frac{x^{m-2}-1}{x^3-1}+\ldots$$

est nulle si m est impair ; au contraire, elle est égale à

$$(1-x)(1-x^3)\ldots(1-x^{m-1})$$

si m est pair. (GAUSS.)

27. Soit T_n le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire ; le $n^{\text{ième}}$ nombre carré sera $T_{n-1}+T_n$, le $n^{\text{ième}}$ nombre pentagonal sera $2T_{n-1}+T_n$, le $n^{\text{ième}}$ nombre hexagonal $3T_{n-1}+T_n$, ...

CHAPITRE II.

NOTIONS GÉNÉRALES.

I. — INTRODUCTION.

Nous allons maintenant aborder cette partie de l'Algèbre appelée *Analyse algébrique* par Cauchy, *introduction à l'Analyse infinitésimale* par Euler. L'Analyse algébrique a pour but de préparer l'esprit à l'étude des branches élevées de l'Analyse, en ajoutant des conceptions plus philosophiques aux spéculations de l'Algèbre élémentaire.

Dans l'Analyse algébrique, les quantités que l'on considère sont systématiquement variables; l'emploi des lettres devient donc tout à fait indispensable pour les représenter. Les théorèmes sur les limites, la notion de l'infini et de l'infiniment petit reviennent à chaque instant et constituent le véritable fondement de la science que nous allons étudier.

Quelques auteurs ont défini les mots de *constante* et *variable*; nous ne pensons pas pouvoir substituer à ces mots des idées plus claires que celles que l'on y attache immédiatement (*).

(*) « Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eumdem valorem servans.... Quantitas variabilis est quantitas indeterminata, quæ omnes omnino valores determinatos in se complectitur. »

EULER, *Introductio in analysin infinitorum.*)

Lorsque deux quantités dépendent l'une de l'autre de telle sorte que, l'une d'elles variant, l'autre varie aussi, et que, l'une d'elles restant constante, l'autre reste constante aussi, on dit qu'elles sont *fonctions* l'une de l'autre.

Les fonctions d'une quantité x se désignent par les notations $f(x)$, $F(x)$, ..., $\varphi(x)$, ..., $F'(x)$, $F_1(x)$, ... Si y est une fonction $\varphi(x)$ de x, x sera une fonction $\psi(y)$ de y; les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont dites *inverses* l'une de l'autre.

On dit qu'une quantité f est *fonction de plusieurs autres* lorsque, celles-ci restant constantes, à l'exception d'une seule x d'entre elles, f et x sont fonctions l'une de l'autre; on représente les fonctions de plusieurs quantités par les notations $f(x, y, z, \ldots)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y, z)$ ....

« .... Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité; depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. Leibnitz et les Bernoulli l'ont employé les premiers dans cette acception générale.... » (Lagrange, *Équations numériques.*)

II. — RAPPEL DE QUELQUES DÉFINITIONS ET THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont elle approche indéfiniment, de manière à pouvoir en différer d'aussi peu que l'on veut.

La limite d'une somme ou d'un produit de plusieurs quantités variables EN NOMBRE LIMITÉ *est égale à la somme ou au produit des limites de ces quantités.*

La limite d'une différence ou d'un quotient de deux

variables est égale à la différence ou au quotient des limites de ces variables.

Ces théorèmes s'étendent encore au cas où quelques-unes des variables seraient remplacées par des constantes, pourvu que l'on considère ces constantes comme étant à elles-mêmes leurs propres limites.

On dit qu'une quantité *variable est infinie* lorsqu'elle peut croître en valeur absolue au delà de toute limite.

On appelle *valeur d'une fonction pour une valeur infinie de sa variable* la limite vers laquelle tend cette fonction lorsque cette variable croît indéfiniment; ainsi on dira que $\frac{1}{x}$ est égal à zéro pour $x = \infty$.

On appelle *quantité infiniment petite* une quantité variable qui a pour limite zéro; ainsi on pourra dire que $\frac{1}{x}$ est infiniment petit pour x infini. Toutefois, il ne faut pas confondre ou assimiler le zéro à l'infiniment petit; le zéro est constant, l'infiniment petit est variable; il peut donc passer par des valeurs très-considérables avant d'atteindre sa limite zéro.

III. — DE LA CONTINUITÉ.

On dit qu'une quantité *varie d'une manière continue entre deux limites a et b* lorsqu'elle ne peut passer entre ces limites d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

On dit qu'une fonction $f(x)$ de x est continue pour $x = a$, quand ε étant une quantité donnée quelconque, aussi petite que l'on voudra, il existe une quantité finie h telle que, quel que soit θ compris entre -1 et $+1$, 1° $f(a+\theta h)$ reste fini et bien déterminé; 2° on ait $f(a+\theta h) - f(a) < \varepsilon$, en valeur absolue.

On dit qu'une fonction $f(x)$ est continue à partir de a ou (à droite de a) quand ε étant donné arbitrairement, il existe une quantité positive h telle que, quel que soit θ compris entre o et 1, même pour $\theta = 0$, 1° $f(a+\theta h)$ est bien déterminé et fini, 2° $f(a+\theta h) - f(a) < \varepsilon$ en valeur absolue.

La fonction $f(x)$ serait dite continue, jusqu'à a ou à gauche de a, si les mêmes choses avaient lieu en supposant θ compris entre o et -1.

Enfin une fonction est continue entre les limites a et b quand elle est continue à partir de a jusqu'à b, et quand elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.

On peut dire d'une manière abrégée que $f(x)$ est continue pour $x = a$, quand à un accroissement infiniment petit *quelconque* de a correspond un accroissement infiniment petit de $f(a)$.

Théorème I. — *Si une fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de sa variable comprises entre deux limites a et b, elle passera par tous les états de valeur compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*

En effet, subdivisons l'intervalle compris entre a et b en n parties égales à h_1, et, μ désignant une quantité donnée comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, cherchons dans la suite $f(a), f(a+h), \ldots, f(a+\overline{n-1}\,h)$ deux termes consécutifs $f(c_1)$ et $f(c_1+h_1)$ comprenant μ, si aucun d'eux n'est égal à μ. Subdivisons encore l'intervalle compris entre c_1 et c_1+h_1 en n autres égaux à h_2; cherchons dans la suite $f(c_1), f(c_1+h_2), \ldots, f(c_1+\overline{n-1}\,h_2)$ deux termes consécutifs $f(c_2)$ et $f(c_2+h_2)$ comprenant μ, si aucun d'eux n'est égal à μ, et ainsi de suite; les nombres $c_1, c_2, c_3, \ldots$ vont en croissant et les nombres $c_1+h_1, c_2+h_2, \ldots$ en décroissant. Mais $c_1, c_2, \ldots$ sont

tous moindres que b; $c_1 + h_1, c_2 + h_2, \ldots$ sont plus grands que a : donc les uns et les autres ont une limite; cette limite est évidemment la même pour c_i et $c_i + h_i$, car h_i tend vers zéro avec i. J'appelle c cette limite commune; je dis que l'on a précisément $f(c) = \mu$. En effet, il est toujours possible de déterminer la quantité positive H de telle sorte que, pour $h < \mathrm{H}$ en valeur absolue, on ait $f(c+h) - f(c) < \varepsilon$; mais on peut toujours prendre i assez grand pour que c_i et $c_i + h_i$ diffèrent de leur limite c d'une quantité moindre que H, et alors $f(c_i) - f(c)$ sera moindre que ε, $f(c_i + h_i) - f(c)$ également. Donc μ, qui est compris entre $f(c_i + h_i)$ et $f(c_i)$, différera *a fortiori* de $f(c)$ d'une quantité inférieure à ε; donc enfin $f(c) = \mu$.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Si une fonction $f(x)$ ne peut pas passer de la valeur $f(\alpha)$ à la valeur $f(\beta)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires quand x varie d'une manière continue entre α et β, α et β désignant deux nombres quelconques compris entre a et b, si de plus entre α et β la fonction $f(x)$ ne passe qu'un nombre fini de fois par la même valeur* (*) *et possède pour chaque valeur de x une valeur finie et déterminée, elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.*

En effet, soit c une valeur comprise entre a et b; donnons à x une valeur k voisine de c et un peu plus grande que c. Quand x variera entre c et k, $f(x)$ variera entre

(*) Cette condition, que l'on ne mentionne pas ordinairement, est cependant nécessaire : ainsi une fonction égale à $\sin \frac{1}{x}$ pour toutes les valeurs de x différentes de zéro et égale à zéro pour $x = 0$ n'est pas continue pour $x = 0$; elle satisfait cependant aux autres conditions de l'énoncé, et il est clair que $f(h) - f(0)$ ou $f(h) = \sin \frac{1}{h}$ ne tend pas vers zéro avec h.

des limites qui pourront être l'une supérieure et l'autre inférieure à $f(c)$. Supposons, pour fixer les idées, l'une d'elles supérieure à $f(c)$ et égale à $f(c)+\omega$; si l'on pose

$$(1) \qquad f(c+\mathrm{H})-f(c)=\varepsilon \quad \text{ou} \quad f(c)+\mathrm{H}=f(c)+\varepsilon,$$

on trouvera toujours pour H une valeur satisfaisant à cette équation si ε est très petit, parce que $f(x)$, passant par la valeur $f(c)$ et par la valeur $f(c)+\omega$, doit passer par la valeur intermédiaire $f(c)+\varepsilon$. De plus, il n'y a par hypothèse, entre c et k, qu'un nombre limité de valeurs de H satisfaisant à l'équation (1). Si donc nous prenons H égal à la plus petite solution de (1), pour toute valeur de h moindre que H, on aura

$$f(c+h)-f(c)<\varepsilon \quad \text{ou} \quad f(c+h)<f(c)+\varepsilon,$$

sans quoi, $f(c+h)$ pouvant devenir plus grand que $f(c)+\varepsilon$, il passerait entre c et $c+\mathrm{H}$ par la valeur $f(c)+\varepsilon$, et H ne serait pas la plus petite racine de (1).

Si $f(x)$ variait entre deux limites dont l'une soit inférieure à $f(c)$, on prouverait de même qu'il existe une quantité H' telle que pour $h'<\mathrm{H}'$ on aurait

$$f(c)-f(c+h')<\varepsilon.$$

On verrait enfin d'une façon analogue qu'il existe une quantité H_1 telle que toute valeur négative h moindre en valeur absolue que H_1 satisfasse aux inégalités précédentes. La fonction f est donc continue pour $x=c$ compris entre a et b. C. Q. F. D.

Théorème II. — *La somme, la différence, le produit, le quotient de plusieurs fonctions continues sont encore des fonctions continues.*

En effet, prenons, par exemple, le produit de plusieurs fonctions continues $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$, changeons x en

$x+h$: le produit devient

$$f_1(x+h)f_2(x+h)\dots f_n(x+h)$$

lorsque l'on fait tendre h vers zéro ; $f_1(x+h)$, $f_2(x+h)$, ... tendent vers les limites $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... Or la limite du produit

$$f_1(x+h)f_2(x+h)\dots$$

est égale au produit des limites de ses facteurs : donc $f_1(x+h)f_2(x+h)\dots$ a pour limite $f_1(x)f_2(x)$, ... et par conséquent peut en différer d'aussi peu que l'on veut; donc $f_1(x)f_2(x)\dots$ représente une fonction continue.

Il faut bien remarquer que, si $f(x)$ n'était pas continue pour la valeur a de sa variable, $f(a+h)$ n'aurait pas pour limite $f(a)$, ce qui peut arriver de deux manières : 1° la fonction $f(x)$ passe brusquement d'une valeur à une autre lorsque x ne varie pas sensiblement; ces cas sont très-rares : nous en verrons plus loin des exemples; 2° la fonction $f(x)$ existe pour $x=a+h$, mais n'existe plus pour $x=a$; alors, $f(a)$ n'existant pas, $f(a+h)$ n'a pas de limite. Par exemple, la fonction $\frac{1}{x}$ n'existe pas pour $x=0$; elle est discontinue pour $x=0$; la fonction $\sqrt{1-x}$ est discontinue pour $x=1$, etc.

Remarque. — Un quotient de deux fonctions continues cesse d'être continu lorsque le diviseur passe par zéro. En effet, alors le raisonnement exposé plus haut tombe en défaut, car le quotient des limites de deux quantités dont le diviseur est nul n'existe plus.

Théorème III. — *Si $u=f(x)$ est une fonction continue de x pour $x=a$ et si y est une fonction continue de u pour $u=f(a)$, y sera une fonction continue de x pour $x=a$.*

En effet, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de u, à un accroissement infiniment petit de u correspond un accroissement infiniment petit de y : donc, en définitive, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de y; donc y est fonction continue de x.

Théorème IV. — *Si $f(u, v)$ est fonction continue de u et de v, et si u et v sont fonctions continues de x, $f(u, v)$ sera fonction continue de x.*

Mais, pour que ce théorème soit vrai, il ne suffit pas que $f(u, v)$ soit continu pour des valeurs déterminées de u et v, il faut que $f(u, v)$ soit continu pour toutes les valeurs de u comprises entre deux limites fixes $a+\varepsilon$, $a-\varepsilon'$ et de v comprises entre deux autres limites $b+\varepsilon_1$ et $b-\varepsilon'_1$, simultanément, ε, ε', ε_1, ε'_1 désignant des nombres finis. A ce prix seulement, $f(u+\alpha, v+\beta)-f(u, v)$ tendra vers zéro quand les accroissements α et β de u et v produits par l'accroissement très petit de x tendront vers zéro. En effet, cette différence peut s'écrire

$$f(u+\alpha, v+\beta)-f(u+\alpha, v)+f(u+\alpha, v)-f(u, v)$$

et les deux différences dont elle se compose ont pour limite zéro pour $\alpha=0$ et $\beta=0$.

Une somme ou un produit composé d'un nombre illimité de fonctions continues peut fort bien cesser d'être continu. Nous verrons plus loin des exemples de ce fait.

Si l'on a $y=f(x)$, on en conclut $x=\varphi(y)$; les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont alors dites inverses l'une de l'autre; ordinairement une fonction et son inverse sont continues en même temps.

IV. — SUR LA VARIATION DES FONCTIONS.

Une fonction $f(x)$ de x est croissante pour $x=a$ quand il existe une quantité positive h telle que, θ étant

compris entre o et 1, on ait

$$(1)\quad \begin{cases} f(a+\theta h)-f(a)>0, \\ f(a-\theta h)-f(a)<0, \end{cases}$$

quel que soit d'ailleurs θ. Si la première égalité seule est satisfaite, la fonction est croissante à partir de a; si la seconde seule est satisfaite, elle est croissante jusqu'à a.

Les définitions précédentes subsistent en remplaçant le mot *croissante* par *décroissante*, pourvu que dans les formules (1) on remplace le signe $>$ par $<$ et $<$ par $>$.

Il est important de remarquer que, d'après nos définitions, une fonction peut fort bien être continue pour $x=a$, sans être ni croissante ni décroissante; il existe de nombreux exemples de pareilles fonctions.

On dit qu'une fonction $f(x)$ de x passe par un *maximum* pour $x=a$ quand il existe une quantité h, telle que, quel que soit θ compris entre -1 et $+1$, on ait

$$f(x+\theta h)<f(a);$$

au contraire, elle passerait par un *minimum* pour $x=a$ si l'on avait $f(x+\theta h)>f(a)$. On peut dire que le caractère commun au maximum et au minimum est que $f(a+\theta h)-f(a)$ conserve le même signe quand θ varie de -1 à $+1$.

Une fonction de plusieurs variables x, y, z, à savoir $f(x, y, z)$, passe par un *maximum* pour $x=a$, $y=b$, $z=c$ quand il existe des quantités h, k, l telles que θ, λ, μ variant entre -1 et $+1$; on a toujours

$$f(a+\theta h, b+\lambda k, c+\mu l)<f(a, b, c);$$

si l'on avait, au contraire,

$$f(a+\theta h, b+\lambda k, c+\mu l)>f(a, b, c),$$

on dirait que la fonction passe par un *minimum* pour $x=a, y=b, z=c$.

Théorème. — *Toute fonction $f(x)$ continue quand x varie entre a et b qui s'annule pour $x = a$ et $x = b$ et qui ne reste pas constante passe par un maximum ou un minimum pour une valeur de x comprise entre a et b.*

Il paraît que cette proposition n'est pas évidente; voici comment on peut convaincre les esprits difficiles : $f(x)$, étant continu, ne peut devenir infini entre les limites a et b de sa variable : il y aura donc une valeur M suffisamment grande en valeur absolue qu'il ne pourra dépasser; mais (dit-on) il ne pourra peut-être pas l'atteindre, bien qu'il puisse en approcher autant que l'on voudra; il reste donc à prouver que pour une valeur c de x on aura $f(c) = \mathrm{M}$, c étant compris entre a et b. Or $f(x)$, pouvant s'approcher de M tant que l'on voudra, tend vers la limite M pour une valeur de x que nous pouvons appeler c; formons $f(c)$, si l'on n'a pas $f(c) = \mathrm{M}$, il existera entre $f(c)$ et M une différence finie Δ; mais, $f(x)$ étant continu, il existe une quantité h telle que

$$\text{Val abs}[f(c+\theta h) - f(c)] < \frac{\Delta}{2},$$

θ étant compris entre o et 1; mais, quand θh est suffisamment petit, par hypothèse, $f(c+\theta h)$ diffère de M d'aussi peu que l'on veut; donc on peut prendre

$$\text{Val abs}[f(c+\theta h) - \mathrm{M}] < \frac{\Delta}{2},$$

et alors on aurait

$$\text{Val abs}[f(c) - \mathrm{M}] < \Delta,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $f(c) - \mathrm{M} = \Delta$. On a donc bien $f(c) = \mathrm{M}$. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si $f(x)$ est continu et non constant entre les limites a et b de x et si l'on a $f(a) = f(b)$, $f(x)$ passe par un maximum ou un minimum pour une valeur de x comprise entre a et b.*

CHAPITRE III.

DE LA FONCTION SIMPLE ALGÉBRIQUE, DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DES LOGARITHMES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

LEMME I. — *Les puissances successives des nombres plus grands que 1 vont en croissant et peuvent dépasser toute limite.*

LEMME II. — *Les puissances successives des nombres moindres que 1 vont en diminuant et ont zéro pour limite.*

LEMME III. — *Les racines successives des nombres plus grands que 1 vont en diminuant et ont l'unité pour limite.*

LEMME IV. — *Les racines successives d'un nombre moindre que 1 vont en croissant et ont l'unité pour limite.*

Il était indispensable de rappeler ces propositions, déjà établies page 200 (Ire Partie).

II. — DE L'EXPOSANT FRACTIONNAIRE.

Désignons par a un nombre positif : si nous observons que l'on a

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

toutes les fois que m est divisible par n, nous serons conduits naturellement à représenter par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$ l'expression $\sqrt[n]{a^m}$, lors même que le nombre m ne sera plus divisible par n. Mais, pour que cette notation soit logique, il est nécessaire que les règles de l'exposant entier s'appliquent encore à l'exposant fractionnaire ; c'est ce qui a lieu. En effet,

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}.\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

On a donc, pour toutes les valeurs positives et commensurables de α,

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta};$$

on en conclut

$$a^\alpha a^\beta a^\gamma = a^{\alpha+\beta} a^\gamma = a^{\alpha+\beta+\gamma},$$

et, en général,

$$a^\alpha a^\beta a^\gamma \ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

On a aussi, pour toutes les valeurs positives et rationnelles de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$

$$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta},$$

car

$$a^{\alpha-\beta} \times a^\beta = a^\alpha.$$

On a encore

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}.$$

En effet,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}$$
$$= \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}.$$

C. Q. F. D.

Enfin on vérifie aisément que

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad (a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha, \quad \dots.$$

III. — DE L'EXPOSANT INCOMMENSURABLE.

Lemme I. — *Supposons, pour fixer les idées, le nombre a plus grand que l'unité; alors, $\frac{m}{n}$ désignant un nombre commensurable, on aura*

$$a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

En effet, $a^{\frac{m}{n}}$ est égal à $\sqrt[n]{a^m}$; or, a^m est plus grand que 1 : donc $\sqrt[n]{a^m}$ sera aussi plus grand que 1 (p. 35). Au contraire, si a était moindre que 1, on aurait

$$a^{\frac{m}{n}} < 1.$$

Lemme II. — *$a^{\frac{m}{n}}$ croît avec $\frac{m}{n}$ si a est plus grand que 1; il décroît dans le cas contraire.*

En effet,

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Si donc a est plus grand que 1, $a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}$ sera plus grand que $a^{\frac{m}{n}}$; il serait évidemment plus petit dans le cas contraire, ce qui démontre le lemme énoncé.

Lemme III. — *Si le nombre commensurable $\frac{m}{n}$ a pour limite zéro, $a^{\frac{m}{n}}$ aura pour limite l'unité.*

En effet, les racines croissantes de a ont pour limite

l'unité (p. 37) : donc il existera toujours une racine, la $\mu^{\text{ième}}$ par exemple, qui sera telle que

$$1+\delta > a^{\frac{1}{\mu}} > 1-\delta,$$

δ étant une quantité aussi petite que l'on voudra, et, pour toutes les valeurs de $\frac{m}{n}$ inférieures à $\frac{1}{\mu}$, on aura *a fortiori*

$$1+\delta > a^{\frac{m}{n}} > 1-\delta;$$

ceci revient à dire que $a^{\frac{m}{n}}$ a pour limite l'unité.

Ces préliminaires une fois posés, nous pouvons définir l'exposant incommensurable comme il suit.

Soient $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$ une série de fractions ayant pour limite le nombre incommensurable x; la limite vers laquelle tendent les quantités $a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, \ldots$ est ce que nous appellerons a^x. Cette limite existe, car, si l'on suppose $a > 1$ et $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots$ croissants, $a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, \ldots$ seront des nombres croissants inférieurs à a^θ, θ désignant un nombre commensurable supérieur à x; ils auront donc une limite λ. Supposons maintenant que $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots$ tendent vers x d'une manière quelconque : on peut toujours prendre $\frac{p}{q}$ moindre que x, mais assez voisin de x pour que

$$\lambda - a^{\frac{p}{q}} < \frac{\delta}{2},$$

δ désignant un nombre aussi petit que l'on voudra; mais quel que soit $\frac{m}{n}$, pourvu qu'il soit assez voisin de $\frac{p}{q}$ et par

conséquent de x, on pourra toujours poser, en vertu du lemme précédent,

$$\text{val. abs.}\left(a^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{m}{n}}\right) < \frac{\delta}{2},$$

c'est-à-dire

$$\text{val. abs.}\left(\lambda - a^{\frac{m}{n}}\right) < \delta,$$

ce qui prouve que $a^{\frac{m}{n}}$ a pour limite λ, de quelque manière que $\frac{m}{n}$ tende vers x. Nous avons supposé $a > 1$; en supposant $a < 1$, le raisonnement se fait identiquement de la même façon.

Il va sans dire que les règles de l'exposant entier s'appliquent à l'exposant incommensurable; en effet, on a

$$a^x a^z = \lim a^{\frac{m}{n}} \lim a^{\frac{p}{q}},$$

$\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ étant les fractions qui ont pour limites x et z. On tire de là

$$a^x a^z = \lim a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \lim a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}};$$

or, $\lim a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$ est ce que nous avons appelé a^{x+z}, car $x + z$ est la limite de $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$; donc

$$a^x a^z = a^{x+z}.$$

De cette égalité on peut déduire, comme au paragraphe précédent, toutes les propriétés des exponentielles.

IV. — DE L'EXPOSANT NÉGATIF ET NUL.

Si l'on observe que pour $m > n$ on a

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

on est conduit à poser dans tous les cas, comme définition,

$$a^{m-n} = a^m : a^n,$$

et en particulier, si $m = n$,

$$a^0 = 1.$$

Or on a, dans le cas où $m < n$,

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}};$$

on est donc conduit à écrire

$$a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

ou enfin

$$a^{-s} = \frac{1}{a^s}.$$

Les règles de l'exposant négatif sont les mêmes que celles de l'exposant positif. En effet, on a

$$a^{-\alpha} \times a^\beta = a^\beta : a^\alpha = a^{\beta-\alpha},$$

$$a^{-\alpha} \times a^{-\beta} = 1 : (a^\alpha a^\beta) = 1 : a^{\alpha+\beta} = a^{-\alpha-\beta};$$

donc, quel que soit α et quel que soit β,

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

On en conclut, comme à la page 36,

$$a^\alpha a^\beta a^\gamma \ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots},$$

$$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}.$$

Enfin, je dis que l'on a

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

En effet, si α est négatif et égal à $-\alpha'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{-\alpha'})^\beta = \left(\frac{1}{a^{\alpha'}}\right)^\beta = \frac{1}{a^{\alpha'\beta}} = a^{-\alpha'\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

Si β' est négatif et égal à $-\beta'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^\alpha)^{-\beta'} = \frac{1}{(a^\alpha)^{\beta'}} = a^{-\alpha\beta'} = a^{\alpha\beta}.$$

Si α et β sont tous deux négatifs et égaux à $-\alpha'$, $-\beta'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{-\alpha'})^{-\beta'} = 1 : \left(\frac{1}{a^{\alpha'}}\right)^{\beta'} = 1 : \frac{1}{a^{\alpha'\beta'}}$$
$$= 1 : a^{-\alpha'\beta'} = a^{\alpha'\beta'} = a^{\alpha\beta}.$$

C. Q. F. D.

On verrait facilement que

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad (a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha, \quad \ldots.$$

Si l'on considère x comme variable et si m désigne un nombre constant, x^m est ce que l'on appelle la *fonction simple algébrique*. Toutefois, Abel et quelques autres géomètres ne regardent la fonction x^m comme algébrique qu'autant que l'exposant m est commensurable [*voir* Abel, *Sur les fonctions algébriques des différents ordres* (*OEuvres complètes*)].

« .... La position d'une grandeur à la suite d'une autre suffit pour exprimer leur produit; si ces grandeurs sont les mêmes, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais, au lieu de l'écrire deux fois, Descartes imagina de ne l'écrire qu'une fois (*), en lui donnant le nombre 2 pour exposant, et il exprima les puissances successives en augmentant successivement cet exposant d'une unité. Cette notation, en ne la considé-

(*) Étienne de Laroche avait eu avant Descartes l'idée des exposants, mais si Descartes n'a pas inventé les exposants il en a vulgarisé l'usage.

rant que comme une manière abrégée de représenter ces puissances, semble peu de chose; mais tel est l'avantage d'une langue bien faite, que ses notations les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes, et c'est ce qui a eu lieu pour les exposants de Descartes. Wallis, qui s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, a été conduit par ce moyen à exprimer les puissances radicales par des exposants fractionnaires.... Wallis supposa généralement que l'exposant $-\frac{m}{n}$ exprime l'unité divisée par la racine $n^{\text{ième}}$ de la grandeur élevée à la puissance m. Ce fut dans son Ouvrage intitulé *Arithmetica infinitorum* que Wallis exposa ces remarques.... » (LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités,* Ire Partie, Livre I.)

V. — DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Lorsque a désigne un nombre positif constant et x un exposant variable, la fonction a^x est ce que l'on appelle la *fonction exponentielle simple*. « .... L'extension la plus importante que cette notation (celle des exposants) ait reçue est celle des exposants variables, ce qui constitue le Calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'Analyse moderne. Leibnitz a indiqué le premier, dans les *Actes de Leipsick* pour 1682, les transcendantes à exposants variables.... » (LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités,* Ire Partie, Livre II.)

VI. — CONTINUITÉ DE LA FONCTION ALGÉBRIQUE ET DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

THÉORÈME I. — *La fonction x^α, dans laquelle α désigne un exposant constant quelconque, est croissante et continue pour toutes les valeurs positives de sa variable.*

Faisons varier x entre les limites a et b; x^α prendra des valeurs comprises entre a^α et b^α. En effet, x^α croît avec x si α est positif; il décroît dans le cas contraire. Pour le démontrer, il suffit d'observer que, si par exemple α est positif et si l'on pouvait avoir

$$(x+h)^\alpha < x^\alpha,$$

on en déduirait

$$\frac{(x+h)^\alpha}{x^\alpha} < 1$$

ou

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha < 1,$$

ce qui est impossible, puisque les puissances entières et les racines d'un nombre plus grand que 1 sont plus grandes que 1.

En second lieu, si μ est compris entre a^α et b^α, il est facile de voir que x^α passera par la valeur μ. En effet, il suffit pour cela de faire $x=\mu^{\frac{1}{\alpha}}$; donc x^α ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires; il ne passe d'ailleurs qu'une fois par la même valeur p; x^α est donc une fonction continue pour les valeurs positives de x.

Quand on donne à x des valeurs négatives, la continuité peut être interrompue; il y a plus, la fonction x^α est alors mal définie, car $(-8)^{\frac{1}{3}}$ et $(-8)^{\frac{2}{6}}$, dans lesquelles l'exposant est le même, représentent respectivement $\sqrt[3]{-8}$ ou -2 et

$$\pm\sqrt[6]{(-8)^2} = \pm\sqrt[6]{8^2} = \pm\sqrt[3]{8} = \pm 2.$$

Il est impossible de se faire une idée de la valeur d'une

expression telle que $(-1)^{\sqrt{2}}$. Enfin, si le nombre α est une fraction telle que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, ..., x^α n'existe pas.

Théorème II. — *La fonction a^x, dans laquelle a est constant et x variable, croît avec x si a est plus grand que* 1; *elle décroît dans le cas contraire; de plus, elle est continue.*

En effet, supposons, pour fixer les idées, $a > 1$; pour démontrer que a^x croît avec x, il suffit d'établir que l'on a

$$a^m > a^n \quad \text{pour} \quad m > n.$$

Si m et n sont commensurables et de la forme $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$, p, q, r, s désignant des nombres entiers, on a

$$(1) \qquad \begin{cases} a^m = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{sp}{sq}} = \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp}, \\ a^n = a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{rq}{sq}} = \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{rq}. \end{cases}$$

Mais

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \quad \text{ou} \quad sp > rq.$$

Or $a^{\frac{1}{sq}}$ est plus grand que 1, puisque $a > 1$; donc

$$\left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp} > \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{rq},$$

ou, en vertu des formules (1),

$$a^m > a^n.$$

Supposons maintenant l'une des quantités m ou n incommensurable; soit l un nombre commensurable compris entre m et n, de telle sorte que

$$m > l > n.$$

Faisons tendre l vers m, par exemple, en le faisant croître et passer par des valeurs commensurables; a^l ira en croissant, et la limite de a^l est ce que nous avons appelé a^m; cette limite est le plus petit des nombres auxquels a^l reste inférieur; donc, que m soit commensurable ou non, on a toujours

$$a^l < a^m.$$

On verrait de même que

$$a^l > a^n;$$

donc

$$a^m > a^n.$$

C. Q. F. D.

Donnons maintenant à x un accroissement infiniment petit h; a^x prendra l'accroissement

$$k = a^{x+h} - a^x.$$

Il est facile de prouver que cet accroissement est infiniment petit. En effet, on a

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Mais a^h a pour limite l'unité quand h tend vers zéro. Cette proposition a été établie pour les valeurs commensurables de h (p. 35); mais, comme a^h décroît avec h, il en résulte que la limite de a^h est encore l'unité pour les valeurs incommensurables de h, ce qui revient à dire que k a pour limite zéro; donc a^x est une fonction continue.

C. Q. F. D.

Nous avons supposé $a > 1$; la démonstration se fait de la même façon dans le cas contraire : il est bien entendu, du reste, que a est censé positif, la fonction a^x n'ayant été définie que dans ce cas.

VII. — SUR LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE L'EXPONENTIELLE.

Si l'on pose $a^x = \varphi(x)$, on aura

(1) $$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y);$$

réciproquement, il est facile de prouver que toute fonction $\varphi(x)$ continue satisfaisant à cette formule est de la forme a^x.

En effet, si l'on multiplie par $\varphi(z)$ les deux membres de (1), on a

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = \varphi(x+y)\varphi(z) = \varphi(x+y+z).$$

En multipliant par $\varphi(t)$ les deux membres de cette nouvelle formule, on aurait

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(t) = \varphi(x+y+z+t),$$

et ainsi de suite. Donc, m étant entier, on trouvera

(2) $$\varphi(x)^m = \varphi(mx),$$

en faisant $x = y = z = \ldots$. Je dis que cette formule a lieu pour les valeurs fractionnaires de m; on a, en effet, en supposant p et q entiers,

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right)^q = \varphi\left(q\frac{x}{q}\right) \quad \text{ou} \quad = \varphi(x),$$

d'où

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = \varphi(x)^{\frac{1}{q}},$$

et, en élevant les deux membres à la puissance p, en vertu de la règle (2),

$$\varphi\left(\frac{px}{q}\right) = \varphi(x)^{\frac{p}{q}}.$$

Si la fonction φ est continue, la formule (2), qui a lieu pour les valeurs fractionnaires de m, aura encore lieu pour les valeurs incommensurables de cette lettre.

Si dans (1) on fait $y = -x$, on a

$$\varphi(x)\varphi(-x) = \varphi(0),$$

et, en faisant $x = 0$,

$$\varphi(0)^2 = \varphi(0),$$

d'où l'on conclut, $\varphi(x)$ n'étant pas toujours nul, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, et par suite, en élevant à la puissance positive m,

$$\varphi(-mx) = \frac{1}{\varphi(x)^m} = \varphi(x)^{-m}.$$

La formule (1) est donc générale. On en conclut

$$\varphi(x)^m = \varphi(mx) = \varphi(m)^x,$$

et par suite

$$\varphi(x)^{\frac{1}{x}} = \varphi(m)^{\frac{1}{m}},$$

quels que soient m et x; donc $\varphi(x)^{\frac{1}{x}}$ est une constante a, et, par suite, $\varphi(x) = a^x$. C. Q. F. D.

VIII. — DES LOGARITHMES.

La fonction x^a reproduit une fonction algébrique quand on en prend l'inverse; la fonction inverse de a^x est ce que l'on appelle le *logarithme* de x pris dans la base a : on la désigne par le symbole

$$\log_a x.$$

Lorsque $a = 10$, on écrit simplement

$$\log x.$$

Ainsi le *logarithme* d'un nombre peut se définir : l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre constant appelé *base* pour reproduire le nombre proposé.

Théorème I. — *Tout nombre positif a un logarithme; les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.*

En effet, si l'on désigne par x un nombre positif et si l'on pose

$$a^y = x, \tag{1}$$

y sera ce que nous avons appelé le logarithme de x. Or, si nous faisons varier y d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, a^y variera d'une manière continue (p. 44) entre zéro et $+\infty$; donc il passera par la valeur x; donc le nombre x a un logarithme. De plus, on voit qu'il n'en aura qu'un seul.

Si l'on avait supposé x négatif, on n'aurait pas pu satisfaire à l'équation (1), puisque a^y est toujours positif; donc les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.

Remarques. — On a toujours

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{car} \quad a^0 = 1,$$

$$\log_a 0 = -\infty \quad \text{pour } a > 1, \quad \text{car alors } a^{-\infty} = 0,$$

$$\log_a 0 = +\infty \quad \text{pour } a < 1, \quad \text{car alors } a^{+\infty} = 0,$$

. . . .

Théorème II. — *Le logarithme est une fonction qui croît avec sa variable lorsque la base est plus grande que* 1; *elle décroît lorsque sa variable croît, dans le cas contraire.*

Théorème III. — *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

En effet, si l'on pose

(1) $y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2, \quad \ldots, \quad y_n = \log_a x_n,$

on a, par définition,

(2) $x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a^{y_n};$

donc

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = a^{y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n},$$

c'est-à-dire

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \log_a x_1 . x_2 \ldots x_n,$$

ou bien

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots = \log_a x_1 . x_2 \ldots x_n.$$

C. Q. F. D.

Des formules (2) on tire $x_1 : x_2 = a^{y_1 - y_2}$; $y_1 - y_2$ est donc le logarithme de $x_1 : x_2$. Donc :

Théorème IV. — *Le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

On a également $x_1^m = a^{my_1}$. Donc my_1 ou $m \log x_1$ est le logarithme de x_1^m; donc enfin :

Théorème V. — *Le logarithme d'une puissance quelconque de x est égal au logarithme de x multiplié par l'exposant de cette puissance.*

Théorème VI. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction continue de x; si l'on a*

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy),$$

la fonction $\varphi(x)$ sera un logarithme de x.

Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration (*voir* p. 46).

IX. — CONCORDANCE DE LA DÉFINITION NÉPÉRIENNE DES LOGARITHMES AVEC LA DÉFINITION NOUVELLE.

Neper définissait, comme l'on a vu, les logarithmes au moyen des deux progressions

$$1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots,$$
$$0, r, 2r, \ldots, nr, \ldots.$$

nr était, d'après lui, le logarithme de q^n; cette définition s'accorde avec celle que nous avons donnée dans ce Chapitre. En effet, on a

$$q^n = \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^{nr};$$

nr, logarithme de q^n d'après Neper, est donc bien *l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre constant* $q^{\frac{1}{r}}$ *pour avoir* q^n. Du reste, $q^{\frac{1}{r}}$ a bien pour logarithme 1 : c'est la base.

Réciproquement, si nous considérons des nombres en progression géométrique α, α^2, α^3, ..., leurs logarithmes dans la base a quelconque seront $\log\alpha$, $2\log\alpha$, $3\log\alpha$,..., c'est-à-dire seront en progression arithmétique.

X. — DU MODULE D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES.

Il est souvent utile de savoir passer d'un système de logarithmes à un autre. Ainsi, par exemple, les premiers logarithmes calculés par les soins de Neper n'avaient pas pour base 10. Pour les calculer dans la nouvelle base, il suffit de les multiplier par un nombre constant : c'est ce que nous allons établir.

Soient x le logarithme de N dans la base a et y le loga-

rithme du même nombre dans la base b; on aura

$$N = a^x;$$

en prenant les logarithmes des deux nombres dans la base b, on a

$$\log_b N = x \log_b a$$

ou bien

$$(1) \qquad \log_b N = \log_a N . \log_b a.$$

De là le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Le logarithme d'un nombre pris dans le nouveau système s'obtient en multipliant le logarithme de ce nombre dans l'ancien système par le logarithme de l'ancienne base dans le nouveau système.*

Si l'on fait $N = b$ dans la formule (1), on a

$$1 = \log_a b . \log_b a \quad \text{ou} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b};$$

donc :

THÉORÈME II. — *Le logarithme de l'ancienne base dans le nouveau système et celui de la nouvelle base dans l'ancien système sont inverses l'un de l'autre.*

Le nombre constant $\log_b a$ ou $1 : \log_a b$ est ce que l'on appelle le *module* qui sert à passer du système dont la base est b au système dont la base est a.

Lorsque Neper eut inventé les logarithmes, il ne tarda pas à s'apercevoir que, si α représente un nombre très-petit et si β est le logarithme de $1 + \alpha$, le logarithme de $1 + 2\alpha$, qui diffère fort peu de $1 + 2\alpha + \alpha^2 = (1 + \alpha)^2$, différera fort peu de 2β; de même, 3β, logarithme de $(1 + \alpha)^3$, différera fort peu du logarithme de $1 + 3\alpha \ldots$; donc les nombres très-voisins de l'unité croissent propor-

tionnellement à leurs logarithmes. La limite du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ pour $\alpha = 0$ était ce que Neper appelait le *module* d'un système de logarithmes. Neper crut faire l'hypothèse la plus simple en posant

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Il obtint alors un système de logarithmes que l'on a appelés *naturels, népériens* ou *hyperboliques*. Effectivement, les logarithmes népériens sont ceux que l'on rencontre le plus fréquemment en Analyse. Proposons-nous de calculer la base.

La base est le nombre qui a pour logarithme 1; or, $1 + \alpha$ ayant pour logarithme β, $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ aura pour logarithme $\frac{\beta}{\beta}$ ou 1; si donc nous supposons $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, on aura, en appelant e la base des logarithmes naturels,

$$e = \lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

ou

$$e = \lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{\beta}} = \lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nous calculerons plus loin la limite de l'expression $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Elle est égale à 2,718281828459045....

Cherchons maintenant le module qui sert à passer des logarithmes naturels aux logarithmes pris dans la base a. Ce module sera $1 : \log_e a$. Soit β le logarithme de $1 + \alpha$ dans la base a; on aura

$$a = \lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{pour} \quad \alpha = 0,$$

ou bien

$$\log_e a = \lim \left[\frac{1}{\beta} \log_e (1 + \alpha) \right].$$

Or, pour α très-petit, on a $\log_e(1+\alpha)=\alpha$, ou, pour être plus rigoureux, $\log(1+\alpha)$ est un nombre qui, divisé par α, donne 1 pour quotient lorsque l'on passe aux limites et que l'on fait $\alpha = 0$; on en conclut

$$\text{og}_e a = \lim\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{\log_e(1+\alpha)}{\alpha}\right] = \lim\frac{\alpha}{\beta}.$$

$\log_e a$ est donc ce que Neper appelait le *module*. Aujourd'hui c'est $\log_a e$ ou $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ que l'on appelle le *module* d'un système de logarithmes; c'est, d'après ce que nous avons vu, le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes naturels pour avoir ceux du système dont la base est a.

EXERCICES ET NOTES.

1. Supposons que la somme a soit placée au taux r. Au bout du temps θ très-petit, qui sera, si l'on veut, $\frac{1}{n}$ d'année, elle deviendra $a\left(1+\frac{r}{n}\right)$; si on la retire alors pour la replacer au même taux, elle deviendra, après un nouvel intervalle de temps $\frac{1}{n}$, égale à $a\left(1+\frac{r}{n}\right)^2$; au bout du temps 3θ elle deviendra $a\left(1+\frac{r}{n}\right)^3$, ..., au bout du temps $t = m\theta = \frac{m}{n}$ elle deviendra $a\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{m}{n}n} = a\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{tr}$. Or, pour $\alpha = 0$, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la limite $e = 2{,}7182845\ldots$ (nous l'avons admis, sauf à le démontrer rigoureusement plus loin). On a donc pour la valeur acquise par le capital a placé pendant le temps t, quand on suppose n indéfiniment croissant, ae^{rt}. On pose $e^r=(1+i)$ ou $r=\log(1+i)$; en appelant alors A la valeur du capital a au bout du temps t, on a

$$A = a(1+i)^t$$

C'est la formule dont les financiers font usage. Cette autre,

$$A = a(1+i)^n(1+if),$$

où n est entier et où $t = n + f$, n'est pas usitée dans les affaires. i est dit le *taux instantané*.

2. Résoudre les équations

$$e^x + e^{-x} = 2,$$
$$10^{x^2-3x+2} = 7.$$

3. Trouver des fonctions φ, χ, ψ continues telles que l'on ait

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy),$$
$$\chi(x) + \chi(y) = \chi(x+y),$$
$$\psi(x) \times \psi(y) = \psi(xy).$$

4. Lorsque a est positif et moindre que 1, l'expression $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot}}}}$ tend vers une racine de l'équation $a^x = x$. (EISENSTEIN).

5. Dans un système de logarithmes, dont la base est entière, il n'y a que les puissances commensurables de la base qui ont des logarithmes commensurables.

6. On a construit des Tables qui, étant donné $\log x$, font connaître $\log(1+x)$ et $\log(1-x)$; à l'aide de ces Tables, on calcule facilement $\log(a+b)$, connaissant $\log a$ et $\log b$, ainsi :

$$\log(a \pm b) = \log a + \log\left(1 \pm \frac{b}{a}\right);$$

ces Tables portent le nom de *Tables de Gauss*.

CHAPITRE IV.

DES IMAGINAIRES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Lorsque l'on cherche à résoudre une équation du second degré, telle que

$$(1) \qquad x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

et qui n'a pas de racines, on est conduit, en appliquant la formule générale, à un résultat impossible,

$$x = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2)} = \alpha \pm \sqrt{-\beta^2},$$

et en l'écrivant ainsi

$$(2) \qquad x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$

on arrive à ce résultat singulier que, si l'on remplace dans la formule (1) x par sa valeur (2), en traitant le signe absurde $\sqrt{-1}$ comme une lettre dont on remplacerait le carré par -1, cette équation (1) se trouve satisfaite; en effet, on a

$$\begin{aligned}(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})^2 - 2\alpha(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) + \alpha^2 + \beta^2 \\ = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta\sqrt{-1} + \beta^2(\sqrt{-1})^2 - 2\alpha^2 \\ \mp 2\alpha\beta\sqrt{-1} + \alpha^2 + \beta^2.\end{aligned}$$

Si l'on efface les termes qui se détruisent dans le second

membre et si l'on remplace $(\sqrt{-1})^2$ par -1, on trouve bien zéro.

L'introduction du signe $\sqrt{-1}$ dans les calculs a souvent conduit à la découverte de résultats nouveaux et importants, reconnus exacts *a posteriori;* les géomètres se sont alors crus autorisés à faire usage de ce signe $\sqrt{-1}$, en le traitant comme une quantité dont le carré serait -1. Mais on sent tout ce qu'une pareille convention a de contraire à l'esprit de rigorisme qui caractérise les sciences mathématiques, et l'on a dû chercher si l'emploi du signe $\sqrt{-1}$ devait *nécessairement* ou seulement *accidentellement* conduire à des résultats exacts. Dans le premier cas, il y a toute une théorie nouvelle à édifier; dans le second, il faut renoncer à classer dans le domaine des faits acquis ceux que l'emploi du signe en question aura fait apparaître.

II. — EXPLICATION D'UN PARADOXE.

Reprenons l'équation (1) du paragraphe précédent.

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

ou

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + \beta^2 = 0.$$

Il est clair que l'on ne peut y satisfaire si β n'est pas nul; mais, au problème impossible qui consisterait à résoudre l'équation (1), essayons de substituer un autre problème qui n'en diffère pas beaucoup et qui soit pour ainsi dire la rectification de son énoncé (c'est ainsi que l'on agit pour l'interprétation des solutions négatives des problèmes). On a vu que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, mis à la place de x, satisfaisait à l'équation quand on remplaçait $(\sqrt{-1})^2$ par -1, en traitant $\sqrt{-1}$ comme une quantité ordinaire. Au lieu de rem-

placer x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, remplaçons-le par $\alpha + \beta i$, i désignant une indéterminée; on aura

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2 = \beta^2 i^2 + \beta^2 = \beta^2(1 + i^2).$$

Le premier membre de (1) devient, comme l'on voit, divisible par $1 + i^2$, en sorte que, si $1 + i^2$ pouvait s'annuler pour une certaine valeur de i, cette valeur de i fournirait pour $x = \alpha + \beta i$ une valeur satisfaisant à l'équation (1). Cette remarque nous permet de rectifier comme il suit le problème qui consiste à résoudre l'équation (1) :

Étant donné le polynôme $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, trouver une expression de la forme $a + bi$ qui, substituée à la place de x rende ce polynôme divisible par $i^2 + 1$ ou, ce qui revient au même, égal à zéro, à un multiple de $i^2 + 1$ près.

On trouve alors, comme nous l'avons vu, la solution $\alpha + \beta i$. Mais négliger $i^2 + 1$ dans les calculs, c'est regarder i^2 comme égal à -1 : on voit ici le germe d'un nouveau genre de calcul, qu'il importe de régulariser.

III. — DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Désignons par i une variable susceptible de passer par tous les états de valeur entre $-\infty$ et $+\infty$. Tout polynôme entier en i est ce que nous appellerons une *imaginaire*. Nous conviendrons de regarder deux imaginaires comme égales entre elles quand elles ne différeront que par un multiple de $i^2 + 1$ ou quand les restes de leur division par $i^2 + 1$ seront effectivement égaux; cette convention n'aura rien d'absurde si l'on sous-entend toujours dans l'un des membres de l'égalité un multiple de $i^2 + 1$; et dans l'égalité

$$A = B + \text{multiple de } (i^2 + 1),$$

on peut sans inconvénient effacer ces mots *multiple de* (i^2+1), s'il est bien convenu, une fois pour toutes, qu'ils devraient y être écrits, ou que dans le langage ils doivent être sous-entendus.

D'après cela, *toute quantité imaginaire peut être ramenée à la forme* $a+bi$, *a et b désignant deux quantités indépendantes de i.*

En effet, dire qu'une imaginaire est égale à $a+bi$, c'est une manière abrégée de dire qu'elle est égale à $a+bi$ augmenté d'un multiple de i^2+1. Or soit P l'imaginaire en question; en la divisant par i^2+1, on obtient un reste du premier degré. Appelons-le $a+bi$, on aura rigoureusement, en appelant Q le quotient,

$$P = Q(i^2+1) + a + bi.$$

Donc, en négligeant ou en sous-entendant un multiple de i^2+1,

$$P = a + bi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Les quantités indépendantes de i s'appellent *quantités réelles.*

Une quantité imaginaire quelconque se ramenant à la forme $a+bi$ en la remplaçant par le reste de sa division par i^2+1, il importe de montrer comment on peut trouver le reste de la division de $f(i)$ par i^2+1.

Pour trouver le reste de la division d'un polynôme par i^2+1, *il suffit d'y remplacer* i^2 *par* -1, i^3 *par* $-i$, i^4 *par* 1, i^5 *par* i, ..., *en général* i^{4n} *par* 1, i^{4n+1} *par* i, i^{4n+2} *par* -1 *et* i^{4n+3} *par* $-i$ (*c'est-à-dire d'y regarder i comme une quantité dont le carré serait* -1).

En effet, soit $f(i)$ un polynôme en i. En appelant $\varphi(i^2)$ l'ensemble des termes de degré pair et $i\psi(i^2)$ l'ensemble

des termes de degré impair, on aura rigoureusement

$$(1) \qquad f(i) = \varphi(i^2) + i\psi(i^2).$$

Mais, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $x + 1$ s'obtenant en remplaçant, dans $\varphi(x)$, x par -1, on a, quel que soit x,

$$\varphi(x) = Q(x)(x+1) + \varphi(-1),$$

Q désignant un polynôme entier en x. Cette formule ayant lieu quel que soit x, on peut y faire $x = i^2$, et l'on a

$$\varphi(i^2) = Q(i^2)(i^2+1) + \varphi(-1);$$

on aurait de même

$$\psi(i^2) = Q'(i^2)(i^2+1) + \psi(-1),$$

et, en vertu de (1),

$$f(i) = (Q + Q'i)(i^2+1) + \varphi(-1) + i\psi(-1).$$

Le reste de la division de $f(i) = \varphi(i^2) + i\psi(i^2)$ par $i^2 + 1$ est donc $\varphi(-1) + i\psi(-1)$; on l'obtient bien en remplaçant i^2 par -1 dans $f(i)$. C. Q. F. D.

IV. — DES QUATRE OPÉRATIONS.

D'après nos conventions :

1° *Toute égalité de la forme*

$$(1) \qquad a + bi = c + di,$$

où a, b, c, d sont réels, entraînera, puisque i est arbitraire (c'est-à-dire puisque cette égalité doit avoir lieu quel que soit i),

$$(2) \qquad a = c, \quad b = d,$$

en sorte que la formule (1) sera une manière abrégée d'écrire les deux formules (2) (*).

2° *Le produit de deux imaginaires $a + bi$, $c + di$ sera*

$$(3) \qquad ac - bd + i(bc + ad),$$

car, rigoureusement, il est $ac + bdi^2 + i(bc + ad)$; et, en remplaçant i^2 par -1, ce qui revient à négliger un multiple de $i^2 + 1$, on trouve bien l'expression (3).

3° *Le produit de plusieurs imaginaires est indépendant de l'ordre des facteurs; la somme de plusieurs imaginaires est indépendante de l'ordre dans lequel on écrit les parties,* etc.

4° *Pour qu'un produit de plusieurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'une de ces imaginaires soit nulle.*

Le sens de ce théorème est celui-ci : *Pour que le produit de plusieurs quantités telles que $a + bi$, $c + di$, ..., en nombre n, soit multiple de $i^2 + 1$, il faut que l'une d'elles soit nulle.* Supposons que l'on ait

$$(a + bi)(c + di)\ldots = (i^2 + 1)X,$$

X désignant un polynôme entier en i. Le premier membre de cette formule est de degré n en i; le second doit être du même degré : donc X est de degré $n - 2$. Or le premier membre s'annule pour $i = -\frac{a}{b}, -\frac{c}{d}, \ldots$, en tout pour

(*) Il faut bien remarquer que cette conclusion est vraie lors même que la formule (1) est une manière abrégée d'écrire

$$a + bi = c + di + \text{multiple de } (i^2 + 1),$$

en sorte que cette formule exige que le multiple de $i^2 + 1$ soit nul aussi; en effet quand deux polynômes sont égaux, les restes de leur division $a + bi$ et $c + di$ par $i^2 + 1$ ou par un diviseur quelconque sont égaux (t. I, p. 50, ligne 20.)

n valeurs de i. Mais, i^2+1 ne s'annulant jamais, il faut que X s'annule pour les n valeurs de i, $-\frac{a}{b}$, $-\frac{c}{d}$, ... Or il est de degré $n-2$: donc il est identiquement nul; donc enfin on a *rigoureusement*

$$(a+bi)(c+di)\ldots=0,$$

qui exige que l'un des facteurs $a+bi$, $c+di$, ... soit nul.

Théorème. — *Il existe toujours une imaginaire qui, multipliée par une imaginaire donnée, appelée* diviseur, *reproduit une autre imaginaire donnée, appelée* dividende (à un multiple de i^2+1 près).

En effet, soit $a+bi$ le dividende, $c+di$ le diviseur; si l'on pose

$$a+bi=(c+di)(x+yi),$$

on en conclut

$$a+bi=cx-dy+i(dx+cy),$$

ce qui exige que l'on ait

$$a=cx-dy, \quad b=dx+cy.$$

Ces deux équations donnent pour x et pour y les valeurs finies et bien déterminées

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Si c^2+d^2 est différent de zéro, c'est-à-dire si c et d ne sont pas nuls à la fois, en d'autres termes si le diviseur $c+di$ n'est pas nul. On a donc

$$x+iy=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Ce résultat, qui est ce que l'on appelle le *quotient* de $a + bi$ par $c + di$, peut s'obtenir, comme il est facile de le vérifier, en effectuant les opérations dans l'expression

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

Théorème. — *Le quotient de deux imaginaires* D *et* d *ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par une même quantité réelle ou imaginaire.*

En effet, en appelant q le quotient, on a

$$D = dq;$$

en multipliant par m, on a

$$Dm = dmq.$$

Donc q est le quotient de Dm par dm.

Si nous convenons de représenter par $\frac{D}{d}$ le quotient de D par d, on voit que l'on aura

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2},$$

comme tout à l'heure.

Nous appellerons *racine carrée* d'une imaginaire $a + bi$ l'expression imaginaire $x + iy$, qui, élevée au carré, reproduit $a + bi$ (à un multiple de $i^2 + 1$ près). Bornons-nous pour le moment à chercher la racine carrée de -1, nous réservant de revenir plus loin sur le cas général. En appelant $x + iy$ cette racine, si elle existe, on aura

$$(x+iy)^2 = -1$$

(à la rigueur, on devrait écrire dans le second membre un multiple de $i^2 + 1$, ce qui ne présente rien d'absurde *a*

priori). L'égalité précédente revient à

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -1,$$

ce qui exige que l'on ait (p. 59, ligne 18) rigoureusement

$$x^2 - y^2 = -1, \quad 2xy = 0.$$

Il faut donc que x ou y soit nul; or on ne peut pas supposer y nul, car on aurait $x^2 = -1$, équation absurde; on doit donc prendre $x = 0$, et l'on a alors $y^2 = 1$ ou $y = \pm 1$. Ainsi la racine cherchée $x + iy$ a deux valeurs $\pm i$; cela justifie les formules

$$i = \sqrt{-1}, \quad -i = -\sqrt{-1},$$

et dorénavant i sera toujours remplacé par le signe $\sqrt{-1}$. Toute imaginaire $a + bi$ pourra donc s'écrire $a + b\sqrt{-1}$. Quelques géomètres ne font pas usage du signe $\sqrt{-1}$ et conservent la lettre i dans les calculs.

En résumé :

1° $\sqrt{-1}$ *représente une quantité qui peut recevoir toutes les valeurs possibles entre* $-\infty$ *et* $+\infty$ *dans toutes les égalités dans lesquelles il se trouve écrit*, et 2° *dans ces égalités il faut toujours sous-entendre que l'on a écrit dans l'un des membres un multiple de* $(\sqrt{-1})^2 + 1$. Ce multiple peut d'ailleurs être nul.

V. — DU MODULE ET DE L'ARGUMENT.

Toute quantité imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ peut être mise sous la forme suivante :

$$(1) \quad x + y\sqrt{-1} = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Si l'on remarque alors que la somme des carrés des quantités $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est égale à l'unité, on pourra poser

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\theta.$$

Si l'on pose, en outre,

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

l'égalité (1) pourra s'écrire

$$x+y\sqrt{-1}=r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).$$

La quantité r est ce que l'on appelle le *module* de l'expression $x+y\sqrt{-1}$; l'angle θ est son *argument*.

On convient de prendre le module toujours positif; quant à l'argument, il peut varier entre $-\infty$ et $+\infty$, en sorte que, cet argument n'étant absolument donné que par son sinus et son cosinus, sa valeur se trouve indéterminée et comprise dans la formule

$$\theta_1+2k\pi,$$

θ_1 désignant le plus petit argument positif répondant à l'imaginaire en question, et k pouvant prendre toutes les valeurs entières comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Deux imaginaires qui ont le même module et qui ne diffèrent que par le signe de leur argument, en d'autres termes deux imaginaires de la forme

$$x+y\sqrt{-1}, \quad x-y\sqrt{-1}$$

sont dites *conjuguées* (*). Une imaginaire dont le module

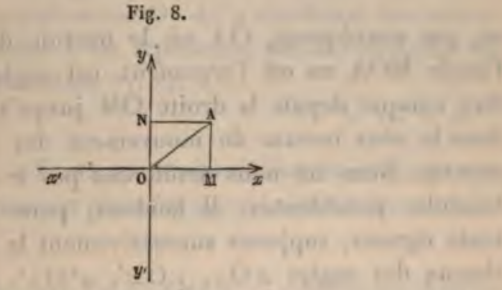
(*) Le produit de deux imaginaires conjuguées $x+y\sqrt{-1}$ et $x-y\sqrt{-1}$ est égal à x^2+y^2, c'est-à-dire au carré de leur module commun.

est l'unité est ce que l'on appelle une *expression réduite;* la forme la plus générale des expressions réduites est

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta.$$

Traçons dans un plan deux droites rectangulaires xOx', yOy' (*fig.* 8); donnons-leur le nom d'*axe des x* et d'*axe des y*.

Fig. 8.



Cela posé, considérons l'imaginaire

$$x + y\sqrt{-1}.$$

Prenons sur $x'x$, à partir du point O, une longueur OM égale en valeur absolue à x, dans le sens Ox si x est positif, dans le sens Ox' s'il est négatif; prenons de même ON égal à la valeur absolue de y et dans le sens Oy si y est positif, dans le sens Oy' si y est négatif. Construisons enfin un rectangle sur ON et OM; le sommet A de ce rectangle sera déterminé toutes les fois que l'on se donnera x et y, ou, ce qui revient au même, $x + y\sqrt{-1}$. Réciproquement, à tout point A du plan correspondra une imaginaire déterminée, et une seule, dont la partie réelle sera l'x du point A et dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera l'y.

En sorte que nous confondrons souvent dans le langage les expressions *point* et *quantité imaginaire.* Si nous

menons la diagonale OA, nous aurons

$$\mathrm{OA} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \mathrm{MOA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \mathrm{MOA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

et, par conséquent, OA est le module de $x + y\sqrt{-1}$, l'angle MOA en est l'argument, cet angle MOA devant être compté depuis la droite OM jusqu'à la droite OA dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre. Nous ne nous arrêterons pas à généraliser les formules précédentes; il faudrait, pour les établir en toute rigueur, supposer successivement le point M dans chacun des angles $x\mathrm{O}y$, $y\mathrm{O}x'$, $x'\mathrm{O}y'$, $y'\mathrm{O}x$, et discuter les signes de x et de y. Nous laissons au lecteur le soin de compléter cette démonstration.

Voici un autre mode de représentation des quantités imaginaires, proposé par Mourey dans un excellent Ouvrage publié sur cette théorie.

A partir du point O, que l'on appelle *origine* des imaginaires, traçons une droite OA ayant pour longueur le module de l'imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ et faisant avec $\mathrm{O}x$ un angle égal à l'argument de cette imaginaire; la droite OA représentera l'imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ aussi bien que le point A.

Théorème I. — *La somme de plusieurs imaginaires est représentée par la résultante des droites qui représentent les imaginaires en question.*

En effet, considérons les imaginaires

$$z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}, \quad z_2 = x_2 + y_2\sqrt{-1}, \quad z_3 = x_3 + y_3\sqrt{-1}, \quad \ldots;$$

leur somme est

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + (y_1 + y_2 + \ldots)\sqrt{-1}.$$

Or x_1, x_2, ... représentent les projections sur l'axe des x des droites qui représentent respectivement z_1, z_2, z_3, ... ; donc $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ représente la projection de la résultante de ces droites sur Ox, $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$ représente la projection sur Oy de la résultante des mêmes droites; donc enfin Z est représenté par la résultante des droites qui représentent z_1, z_2, ...

C. Q. F. D.

Corollaire. — De là résulte immédiatement que *le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties.*

Théorème II. — 1° *Le module d'un produit est égal au produit des modules de ses facteurs;* 2° *l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments de ses facteurs.*

En effet, considérons les imaginaires

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \text{ et } r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta');$$

si nous en faisons le produit, il vient, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$rr'(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta'),$$

ou bien

$$rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \sqrt{-1}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right],$$

c'est-à-dire

$$rr'\left[\cos(\theta + \theta') + \sqrt{-1}\sin(\theta + \theta')\right].$$

Mais, en multipliant ce résultat par une nouvelle imagi-

naire $r''(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\sin\theta'')$, on trouvera

$$rr'r''\left[\cos(\theta+\theta'+\theta'') + \sqrt{-1}\sin(\theta+\theta'+\theta'')\right],$$

et ainsi de suite, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème III. — *Lorsqu'un produit de plusieurs facteurs est nul, l'un de ses facteurs est forcément égal à zéro.*

En effet, le module d'un produit étant égal au produit des modules de ses facteurs, si le produit est nul, son module sera nul, et par conséquent le module de l'un des facteurs au moins devra être égal à zéro. Mais une imaginaire dont le module est zéro est évidemment nulle; donc, etc., comme on l'a prouvé plus haut (p. 60).

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Le module d'un quotient est égal au quotient des modules du dividende et du diviseur. L'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments du dividende et du diviseur.*

En effet, soient $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ le dividende, $\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ le diviseur; le quotient sera donné par la formule

$$\frac{r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}{\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{r}{\rho}\,\frac{(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)}{(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r}{\rho}\left[\cos(\theta-\omega) + \sqrt{-1}\sin(\theta-\omega)\right],$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

REMARQUE. — Le quotient de 1 par une expression réduite est l'imaginaire conjuguée de cette expression réduite; on a, en effet,

$$\frac{1}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega} = \cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega.$$

VI. — THÉORIE DES RADICAUX ALGÉBRIQUES.

Jusqu'ici, nous avons pu remarquer une analogie complète entre le calcul des imaginaires et le calcul des quantités réelles; cette analogie cesse dès que l'on essaye de généraliser la notion de radical ou d'exposant, ainsi que nous allons le cônstater.

Si nous représentons par le symbole

$$(x + y\sqrt{-1})^n$$

et si nous appelons *puissance* $n^{\text{ième}}$ de $x + y\sqrt{-1}$ le produit de n facteurs égaux à cette imaginaire, nous aurons, en vertu du théorème II (p. 67),

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta).$$

Si l'on suppose en particulier $r = 1$, on obtient la formule suivante,

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta,$$

restée célèbre sous le nom de *formule de Moivre*, du nom du géomètre français qui l'a découverte ([1]).

([1]) Que signifie au fond la formule de Moivre? En toute rigueur, il faudrait écrire

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m - (\cos m\theta + i\sin m\theta) = \text{multiple de } (i^2 + 1);$$

ainsi elle signifie que $(\cos\theta + i\sin\theta)^m - (\cos m\theta + i\sin m\theta)$ est divisible

On appelle *racine $n^{ième}$* d'une imaginaire A une quantité qui, élevée à la puissance n, reproduit A.

Théorème I. — *Toute imaginaire a n racines $n^{ièmes}$.*

En effet, considérons l'imaginaire

$$R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta);$$

désignons par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ sa racine $n^{ième}$; nous aurons, par définition,

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^n = R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule de Moivre,

$$r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta) = R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta).$$

Cette égalité se décompose en deux autres :

$$(1) \qquad \begin{cases} r^n \cos n\theta = R\cos\Theta, \\ r^n \sin n\theta = R\sin\Theta; \end{cases}$$

si l'on élève au carré ces deux égalités et si l'on ajoute, on trouve

$$r^{2n} = R^2,$$

---

par i^2+1 : ce que l'on prouverait directement par les procédés ordinaires de l'Algèbre, en écrivant i au lieu de $\sqrt{-1}$ et en rétablissant partout le multiple de i^2+1 dans les formules du texte où il a été omis.

Si l'on réduit le premier membre de la formule de Moivre à la forme $a + b\sqrt{-1}$ en faisant usage de la formule du binôme, a devra être égal à $\cos m\theta$ et b à $\sin m\theta$; on trouve ainsi

$$\cos m\theta = \cos^m\theta - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + \ldots,$$

$$\sin m\theta = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \ldots;$$

mais l'étude de ces formules trouvera sa place dans la Trigonométrie et nous ne nous y arrêterons pas.

et, en observant que r doit être un nombre essentiellement positif ou nul,

$$(2)\qquad r^n = R \quad \text{ou} \quad r = \sqrt[n]{R};$$

les formules (1) donnent alors

$$\cos n\theta = \cos\Theta, \quad \sin n\theta = \sin\Theta,$$

et par suite

$$n\theta = \Theta + 2k\pi,$$

k désignant un entier quelconque, c'est-à-dire

$$\theta = \frac{\Theta + 2k\pi}{n}.$$

Si l'on désigne alors, avec Cauchy, par le symbole $\sqrt[n]{((A))}$ la racine $n^{\text{ième}}$ de l'imaginaire A, on voit que la racine $n^{\text{ième}}$ de $R\left(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta\right)$ aura n valeurs données par la formule

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt[n]{((R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)))} \\ &\quad = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\Theta + 2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\Theta + 2k\pi}{n}\right), \end{aligned}\right.$$

formule dans laquelle il suffira de faire k successivement égal à $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. En effet, si l'on fait k égal à $ni + j$, j désignant un entier compris entre 0 et $n-1$ inclusivement, et i désignant un entier quelconque positif ou négatif, on obtient, pour la racine $n^{\text{ième}}$ de

$$R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta),$$

une valeur dont l'argument ne diffère de $\frac{\Theta + 2j\pi}{n}$ que d'un multiple entier de la circonférence, c'est-à-dire une valeur déjà comprise parmi celles que l'on obtient en faisant k

égal à o, 1, 2, 3, ..., $n-1$ dans la formule (3); donc enfin la racine $n^{\text{ième}}$ d'une imaginaire a n valeurs, comme nous l'avions annoncé.

Au surplus, il est facile de voir que ces n valeurs sont toutes différentes, car les arcs compris dans les formules

$$\frac{\Theta}{n},\ \frac{\Theta+2\pi}{n},\ \frac{\Theta+4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\Theta+2\overline{n-1}\pi}{n}$$

diffèrent de moins d'une circonférence; deux quelconques d'entre eux ne sauraient donc avoir à la fois même sinus et même cosinus.

Remarque I. — Si, dans la formule (3), on suppose $\Theta = 0$, on trouve

$$(4)\qquad \sqrt[n]{((\mathrm{R}))} = \sqrt[n]{\mathrm{R}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Remarque II. — La formule (3) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{((\mathrm{R}(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)))}\\ &\quad=\left[\sqrt[n]{\mathrm{R}}\left(\cos\frac{\Theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\Theta}{n}\right)\right]\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Or, en vertu de la formule (4), dans laquelle on peut supposer $\mathrm{R}=1$, $\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$ désigne une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; Θ peut être censé représenter l'un quelconque des arguments de

$$\mathrm{R}(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)$$

La formule précédente nous montre donc que les n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'une imaginaire quelconque peuvent s'obtenir en multipliant l'une quelconque d'entre elles successivement par chacune des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Dorénavant, lorsque nous ne spécifierons pas la valeur

d'une racine $n^{\text{ième}}$, nous la représenterons par le symbole $\sqrt{((\ ))}$; au contraire, lorsqu'il sera question d'une valeur bien déterminée de cette racine, par exemple lorsqu'il s'agira de celle qui a le plus petit argument positif, nous ferons usage du signe $\sqrt{\ }$ sans doubles parenthèses.

VII. — CALCUL DES RADICAUX ALGÉBRIQUES.

Théorème I. — *Si l'on multiplie chacune des valeurs de $\sqrt[n]{((\mathrm{A}))}$ par chacune des valeurs de $\sqrt[n]{((\mathrm{B}))}$, on reproduit chacune des valeurs de $\sqrt[n]{((\mathrm{AB}))}$.*

En effet, soit

$$\mathrm{A} = r_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1),$$
$$\mathrm{B} = r_2(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2);$$

on aura

$$\sqrt[n]{((\mathrm{A}))} = r_1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_1 + 2k_1\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1 + 2k_1\pi}{n}\right),$$
$$\sqrt[n]{((\mathrm{B}))} = r_2^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_2 + 2k_2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta_2 + 2k_2\pi}{n}\right),$$

et par suite

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt[n]{((\mathrm{A}))} \times \sqrt[n]{((\mathrm{B}))} = r_1^{\frac{1}{n}} r_2^{\frac{1}{n}} \Bigg[&\cos\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2(k_1 + k_2)\pi}{n} \\ &+ \sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2(k_1 + k_2)\pi}{n}\Bigg], \end{aligned} \right.$$

formules dans lesquelles k_1 et k_2, et par suite $k_1 + k_2$, désignent des entiers tout à fait quelconques. D'un autre côté, on a

$$\mathrm{AB} = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2)],$$
$$\sqrt[n]{((\mathrm{AB}))} = r_1^{\frac{1}{n}} r_2^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2i\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2i\pi}{n}\right],$$

i désignant un entier quelconque. De la comparaison de cette formule avec la précédente on déduit

$$\sqrt[n]{((A))} \times \sqrt[n]{((B))} = \sqrt[n]{((AB))}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on voulait supprimer les doubles parenthèses, on le pourrait; mais il faudrait choisir convenablement les valeurs des radicaux.

Théorème II. — *Si l'on divise chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$ *par chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((B))}$, *on obtient n résultats différents qui sont les n valeurs de* $\sqrt[n]{((A:B))}$.

Théorème III. — *Si l'on élève à la puissance m les valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$, *on obtient les valeurs de* $\sqrt[n]{((A^m))}$.

Théorème IV. — *Si l'on extrait les racines $m^{\text{ièmes}}$ des n valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$, *on obtient les valeurs de* $\sqrt[mn]{((A))}$.

Remarque. — Quand on a un radical de la forme

$$\sqrt[mn]{((A^m))},$$

il faut éviter de le simplifier et d'écrire

$$\sqrt[mn]{((A^m))} = \sqrt[n]{((A))};$$

en effet, le premier membre de cette formule a mn valeurs, le second n'en a que n; quand on n'agit pas avec précaution dans le calcul des radicaux imaginaires, on s'expose souvent à tomber dans de grossières erreurs; il ne faut pas en accuser l'emploi des symboles imaginaires, dont le calcul n'est pas tout à fait soumis aux mêmes règles que celui des quantités réelles. Ainsi, par exemple, on raisonnerait mal en écrivant

$$(1) \qquad \sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = \sqrt[2]{(-2)(-2)} = \sqrt[2]{4} = 2,$$

puis

(2) $$\sqrt[2]{-2}\times\sqrt[2]{-2}=(\sqrt[2]{-2})^2=-2,$$

d'où l'on déduirait

$$2=-2.$$

En effet, dans la formule (1), $\sqrt[2]{-2}$ désigne une valeur particulière de $\sqrt[2]{((-2))}$, $\sqrt[2]{(-2)(-2)}$ désigne une valeur particulière de $\sqrt[2]{((4))}$; on ne peut, sans examen, égaler ces deux valeurs; et en effet, on a

$$\sqrt[2]{((-2))}=\sqrt[2]{2(\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi)}$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right]$$

ou

$$\sqrt[2]{((-2))}=\pm\sqrt{2}\sqrt{-1}.$$

Prenons les radicaux avec le signe +; on voit que l'on n'aura pas

$$\sqrt[2]{-2}\times\sqrt[2]{-2}=\sqrt[2]{4},$$

mais bien

$$\sqrt[2]{-2}\times\sqrt[2]{-2}=\sqrt{2}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{2}\times\sqrt{-1}=-2.$$

Si l'on prend les radicaux avec le signe —, on arrive encore au même résultat. Donc la formule (1) est toujours fausse si $\sqrt[2]{-2}$ y représente toujours la même valeur de $\sqrt[2]{((-2))}$.

VIII. — SUR LES ÉQUATIONS EN GÉNÉRAL.

Les règles de la multiplication et de la division algébriques s'appliquent évidemment aux quantités imaginaires

comme aux quantités réelles; il en est de même de la formule du binôme.

On peut former des équations à l'aide de quantités réelles et imaginaires, et chercher s'il n'existe pas des quantités imaginaires satisfaisant à ces équations; les principes fondamentaux que nous avons démontrés sur la résolution des équations, dans la première Partie de cet Ouvrage, sont encore applicables aux cas où l'on considérerait des égalités entre quantités imaginaires; ces principes ne dépendent absolument que des quatre premières opérations de l'Algèbre, reconnues applicables aux quantités imaginaires. Ainsi, il n'y a rien à ajouter à la théorie des équations du premier degré et à la théorie des déterminants. Il n'en est pas de même des équations du second degré où interviennent des questions sur les radicaux; il y a donc lieu d'examiner de nouveau la théorie des équations du second degré : c'est ce que nous allons faire.

IX. — SUR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Nous conviendrons de ne pas écrire l'indice d'un radical lorsque cet indice sera 2.

Cela posé, cherchons la racine carrée de $a+b\sqrt{-1}$; désignons cette racine par $x+y\sqrt{-1}$, nous aurons

$$(x+y\sqrt{-1})^2=a+b\sqrt{-1}$$

ou bien

$$x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}.$$

Cette équation équivaut aux deux suivantes :

$$(1)\qquad x^2-y^2=a,$$

$$(2)\qquad 2xy=b;$$

la dernière peut s'écrire, en la généralisant un peu,

$$(3) \qquad -x^2y^2 = -\frac{b^2}{4}.$$

A l'inspection des équations (1) et (3), on reconnaît immédiatement que x^2 et $-y^2$ sont racines de l'équation en u

$$u^2 - au - \frac{b^2}{4} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$u = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

c'est-à-dire, en observant que y^2 doit être positif,

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a).$$

On déduit de là

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}.$$

L'équation (2) montre avec quels signes on doit prendre x et y; si, par exemple, b est positif, on prendra x et y de même signe, en sorte que l'on aura

$$\sqrt{((a + b\sqrt{-1}))} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}\sqrt{-1}\right];$$

si b est négatif, on aura, au contraire,

$$\sqrt{((a+b\sqrt{-1}))}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\sqrt{-1}\right].$$

Si l'on fait $b=0$, on trouve : en supposant $a>0$,

$$\sqrt{((a))}=\pm\sqrt{a};$$

en supposant $a<0$,

$$\sqrt{((a))}=\pm\sqrt{-a}\sqrt{-1},$$

ou, en explicitant les signes,

$$\sqrt{((-\alpha^2))}=\pm\alpha\sqrt{-1}.$$

Une équation du second degré a toujours deux racines lorsque l'on admet pour l'inconnue des valeurs imaginaires : voici comment il faut entendre cette proposition. Considérons l'équation

$$x^2+px+q=0.$$

Supposons $\frac{p^2}{4}-q<0$; on peut se proposer de chercher s'il existe pour x des valeurs de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ vérifiant cette équation, c'est-à-dire en sous-entendant dans le second membre un multiple de $(\sqrt{-1})^2+1$. On trouve alors successivement

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

X. — DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES.

Tout polynôme entier en $z = x + y\sqrt{-1}$ est ce que l'on appelle une fonction *entière* de z.

Soit $f(u, z)$ une fonction entière de u et z; toute expression de la forme $X + \sqrt{-1}Y$ qui, mise à la place de u dans l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

y satisfait, est ce que l'on appelle une fonction *algébrique* de z, mais il faut encore pour cela que X et Y soient des fonctions de x et y (*).

En général, toute expression qui peut être ramenée à la forme $X + Y\sqrt{-1}$ ou qui est définie par cette forme, X et Y désignant des fonctions de x et y, est ce que l'on appelle une fonction de $x + \sqrt{-1}y$. Toutes les fonctions qui ne sont pas algébriques sont *transcendantes*.

Une fonction $X + Y\sqrt{-1}$ de $x + y\sqrt{-1}$ est *continue* lorsqu'à un accroissement infiniment petit quelconque de $x + y\sqrt{-1}$ correspond un accroissement infiniment petit de $X + Y\sqrt{-1}$, et nous appelons ici *accroissement d'une quantité* la différence entre deux valeurs de cette quantité.

Pour qu'une fonction $X + Y\sqrt{-1}$ de $x + y\sqrt{-1}$ soit continue, il faut et il suffit évidemment que X et Y soient des fonctions continues de x et de y; il faut et il suffit aussi que son module et son argument soient des fonctions continues du module et de l'argument de sa variable. Ces

---

(*) PUISEUX, *Mémoire sur les fonctions algébriques* (*Journal de Liouville*, t. XV); BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques*, sont peut-être les premiers qui aient adopté cette définition, aujourd'hui admise par tous les savants.

propositions deviennent évidentes si l'on représente les imaginaires à l'aide de points, comme il a été expliqué plus haut.

XI. — DÉFINITION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Nous avons défini le symbole

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de x, comme étant le produit de x facteurs égaux à $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$; nous en avons déduit la formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x = r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x).$$

Nous pouvons maintenant nous servir de cette formule pour définir le symbole $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ lorsque x sera fractionnaire, incommensurable ou négatif. Ainsi $r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x)$ est ce que nous appellerons dorénavant la $x^{\text{ième}}$ puissance de $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$.

La puissance $x^{\text{ième}}$ de $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ n'a qu'une seule valeur lorsque x est entier; mais il n'en est pas de même dans les autres cas. En effet, l'expression $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ ne change pas quand on remplace θ par $\theta + 2k\pi$, k désignant un entier quelconque; ainsi les valeurs de $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ seront données par la formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$$
$$= r^x[\cos(\theta x + 2k\pi x) + \sqrt{-1}\sin(\theta x + 2k\pi x)].$$

Si x est incommensurable, les arcs compris dans la formule

$$\theta x + 2k\pi x$$

auront pour sinus et cosinus une infinité de nombres différents, en sorte que la puissance $x^{\text{ième}}$ d'une quantité imaginaire a en général une infinité de valeurs.

Le lecteur se demandera sans doute pourquoi nous n'avons pas défini la puissance fractionnaire $\frac{p}{q}$ de $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ à l'aide de la formule

$$(1)\quad [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^p},$$

pourquoi enfin nous n'avons pas suivi dans la définition des puissances de quantités imaginaires la même marche que dans la définition des puissances de quantités positives. La raison en est simple : d'après notre définition, $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ est une quantité qui possède plusieurs valeurs, il est vrai, mais dont le nombre des valeurs ne change qu'avec la valeur et non avec la forme de x; ainsi nous avons

$$(2)\quad [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{3}{2}} = [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{6}{4}} = \ldots.$$

Au contraire, en partant de l'équation (1) pour définir les puissances fractionnaires, on voit que

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{p}{q}}$$

aurait q valeurs, et par conséquent varierait avec la forme de la fraction $\frac{p}{q}$, en sorte que, par exemple, la formule (2) serait inexacte. De la définition que nous venons de donner résulte la généralisation de la formule de Moivre, à savoir

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^x = \cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x.$$

Une quantité réelle étant assimilable à une imaginaire,

on voit qu'une quantité réelle peut avoir une infinité de puissances $x^{\text{ièmes}}$ dont une seule est toujours réelle.

Les règles des exposants s'appliquent encore aux imaginaires, avec certaines restrictions toutefois; ainsi on a

$$\begin{aligned}
&[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{x'} \\
&\quad = r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x)r^{x'}(\cos\theta x' + \sqrt{-1}\sin\theta x') \\
&\quad = r^{x+x'}[\cos\theta(x+x') + \sqrt{-1}\sin\theta(x+x')] \\
&\quad = [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{x+x'}.
\end{aligned}$$

Les autres propriétés des exposants se démontreraient d'une manière semblable.

Théorème I. — *La fonction a^x est continue, lors même que l'on suppose a imaginaire.*

Cela résulte évidemment de la formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x = r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x),$$

dans laquelle r^x, $\cos\theta x$ et $\sin\theta x$ sont des fonctions continues. Nous verrons plus loin comment on peut encore généraliser davantage la fonction exponentielle, en supposant sa variable imaginaire, et nous verrons qu'alors encore elle reste continue.

Théorème II. — *Si l'on a pour toutes les valeurs réelles de x et de y*

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y),$$

et si la fonction $\varphi(x)$ est continue, on a nécessairement

$$\varphi(x) = a^x,$$

a désignant une quantité réelle ou imaginaire.

En effet, en répétant le raisonnement de la page 46, on trouve que $\varphi(x)^{\frac{1}{x}}$ est une constante réelle ou imaginaire a.

EXERCICES ET NOTES.

1. On a

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha')(a+b\alpha'+c\alpha)=a^3+b^3+c^3-3abc,$$

et α' désignant deux racines imaginaires de $x^3-1=0$.

2. Résoudre l'équation $(x+1)^5-x^5=1$.

3. Calculer et mettre sous la forme $a+b\sqrt{-1}$ les expressions

$$\sqrt{\sqrt{-1}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}},\ \ldots.$$

4. Quelles sont les racines cubiques de $\sqrt{-1}$?

5. La théorie des imaginaires remonte aux premiers travaux des modernes sur la théorie des équations, mais elle n'a été assise sur des bases solides que dans ces derniers temps, grâce aux recherches de Français, Argand, Vallès, Mourey, Truel et Cauchy. La théorie exposée dans le texte a été ébauchée par Cauchy.

Mourey, dans sa *Vraie théorie*, etc., a présenté comme il suit la théorie des imaginaires :

Appelons *quantité imaginaire* une droite située dans un plan sur lequel est tracé un axe fixe de direction donnée. La longueur r de cette droite sera ce que nous appellerons son module; l'angle θ qu'elle fait avec l'axe fixe, compté comme on compte les angles en Trigonométrie, sera ce que nous appellerons son *argument*.

La droite en question sera representée par la notation r_θ et l'on convient de ne pas écrire l'argument quand il est nul, ainsi $a_0=a$. La résultante de r_θ, $r'_{\theta'}$, $r''_{\theta''}$, ... s'appellera aussi leur somme et sera représentée par $r_\theta+r'_{\theta'}+r''_{\theta''}+\ldots.$ La différence de deux imaginaires se définira comme plus haut. Le produit de deux imaginaires r_θ et R_Θ sera, par définition, l'imaginaire ayant pour module rR et pour argument $\theta+\Theta$. Ce produit existe et est bien défini. Le carré de r_θ sera $r^2_{2\theta}$. D'après cela, on voit que $1_{\frac{\pi}{2}}$ a pour carré $1_\pi=0-1$ ou -1. Ainsi l'on

peut dire que la droite 1_π ou -1 est le carré de $1_{\frac{\pi}{2}}$, que l'on peut alors représenter par $\sqrt{-1}$. Toute droite pouvant être considérée comme la résultante de deux autres, l'une, a ou a_0, parallèle à l'axe fixe, et l'autre, $b_{\frac{\pi}{2}} = b_0 . 1_{\frac{\pi}{2}} = b\sqrt{-1}$, perpendiculaire à cet axe; elle pourra être représentée par un symbole tel que

$$a + b\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

Hamilton (*Lectures on quaternions*) a essayé d'étendre ces notions à la Géométrie de l'espace. M. Despeyrous (*Mémoires de l'Académie de Toulouse*) a fait une tentative du même genre. Les imaginaires de M. Despeyrous sont jusqu'ici la généralisation la plus naturelle des imaginaires de Mourey; les quaternions d'Hamilton sont soumis à des règles bizarres : ainsi le produit de deux quaternions peut changer avec l'ordre des facteurs.

6. Une droite étant déterminée par ses deux extrémités, on propose de trouver son milieu en faisant usage d'un compas, mais sans se servir de la règle. (MASCHERONI.)

Les propriétés de l'hexagone régulier et la théorie de Mourey permettent de donner un grand nombre de solutions de ce problème. (*Voir* MASCHERONI, *la Géométrie du compas*. Napoléon I[er] faisait, paraît-il, grand cas de cet Ouvrage.)

7. Consulter la théorie des équipollences de Bellavitis, traduite par Laisant, député.

CHAPITRE V.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SÉRIES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *série* une suite illimitée de termes qui se forment et se suivent d'après une loi déterminée. On appelle encore les séries *suites infinies*.

Une série est dite *convergente* si la somme de ses n premiers termes tend vers une limite déterminée, lorsque n augmente indéfiniment, en suivant du reste une loi quelconque; cette limite est ce que l'on appelle la *valeur* de la série ou la *somme de ses termes* (*).

Une série qui n'est pas convergente est appelée *divergente*. La série

$$(\alpha_0-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+\ldots+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)+\ldots,$$

dans laquelle α_n désigne un nombre qui a pour limite zéro, lorsque n augmente indéfiniment, est convergente, car la somme de ses n premiers termes est $\alpha_0-\alpha_n$, et cette quantité a pour limite α_0 pour $n=\infty$.

(*) Quel est l'inventeur de la théorie des séries? C'est une question difficile à trancher; Archimède a sommé les progressions géométriques, Newton, Wallis, Leibnitz, Mercator, Maclaurin, Stirling, les Bernoulli, Euler, Lagrange, etc., ont sommé bien des séries, mais leurs raisonnements manquent en général de rigueur; Abel et Cauchy paraissent être les premiers qui aient raisonné juste dans cette branche de l'Analyse. (Lire l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla.)

Au contraire, la série

$$+1-1+1-1+1-\ldots+1-1+\ldots$$

est divergente, car la somme de ses n premiers termes est alternativement zéro et 1; elle ne tend par conséquent pas vers une limite déterminée lorsque n croît d'une manière quelconque.

On comprend difficilement comment d'illustres analystes ont pu écrire des formules telles que

$$(A) \qquad +1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

(Leibnitz, *Lettre à Christian Wolff*. — Euler, *Institutiones Calculi differentialis et integralis,* Pars posterior, Cap. I, etc.).

Une série divergente ne saurait représenter $\frac{1}{2}$. En effet, quelle idée peut-on se faire d'une somme composée d'un nombre illimité de parties? En toute rigueur, on n'a pas même le droit d'écrire

$$(1) \qquad \alpha_0=(\alpha_0-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+(\alpha_n-\alpha_{n+1})+\ldots$$

lorsque α_n tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque la série est convergente. On le fait cependant, mais seulement en vertu d'une convention qui consiste à séparer une série convergente de la limite vers laquelle tend la somme de ses termes par le signe =. Ainsi la formule (1) est une manière abrégée d'écrire

$$\alpha_0=\lim[(\alpha_0-\alpha_1)+\ldots+(\alpha_n-\alpha_{n+1})] \text{ pour } n=\infty.$$

La formule (A) est donc complétement absurde, puisque la limite de la somme de ses n premiers termes n'existe pas : elle n'est donc pas égale à $\frac{1}{2}$.

Si nous insistons sur ce point, c'est que malheureusement on trouve dans d'excellents auteurs, parmi les princes de la Science, des fautes analogues à celle dont nous venons de parler. Abel s'en plaint amèrement dans une de ses Lettres à Holmboë (voir *OEuvres complètes*).

II. — THÉORÈMES SUR LA CONVERGENCE.

THÉORÈME I. — *Pour qu'une série soit convergente, il faut que ses termes diminuent indéfiniment.*

En effet, soit la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

et en général s_n la somme des n premiers termes; on a

$$s_{n+1} - s_n = u_n. \tag{1}$$

Si l'on suppose la série proposée convergente et si l'on désigne sa valeur par s, on aura

$$\lim s_{n+1} = s,$$
$$\lim s_n = s;$$

donc

$$\lim s_{n+1} - \lim s_n = \lim(s_{n+1} - s_n) = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (1),

$$\lim u_n = 0.$$

REMARQUE I. — La démonstration que nous venons d'employer, comme du reste toutes celles que nous emploierons dans l'exposition de ces principes, est basée sur le calcul des limites; elle précise le sens que nous devons attribuer à la locution *diminuer indéfiniment*. Quand nous disons que u_n doit diminuer indéfiniment, nous devons

entendre par là que cette quantité, réelle ou imaginaire, doit avoir zéro pour limite, rien de plus : ainsi u_n peut tendre comme on veut vers zéro ; il n'est nullement nécessaire, par exemple, que l'on ait

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > \cdots.$$

Remarque II. — On aurait également pu écrire les équations suivantes,

$$\lim s_{n+p} = s,$$
$$\lim s_n = s,$$

d'où, retranchant la deuxième de la première,

$$\lim (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1}) = 0,$$

résultat que nous énoncerons ainsi :

Pour qu'une série soit convergente, il faut que la somme des p termes qui suivent le $n^{ième}$ diminue indéfiniment quand n augmente indéfiniment, quel que soit du reste p.

Remarque III. — Il existe des séries dans lesquelles u_n peut tendre vers zéro sans que la série à laquelle appartient ce terme soit convergente ; par exemple, considérons la série suivante, appelée série *harmonique :*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots.$$

Il est facile de s'assurer que cette série est divergente, car, si l'on prend n termes après le $n^{ième}$, la somme

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est plus grande que $\frac{1}{2n}$ répété n fois, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}$. Si

donc on groupe les termes de la série harmonique ainsi qu'il suit,

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)+\dots,$$

on voit que la somme de ses $2n$ premiers termes est plus grande que $\frac{1}{2}$ répété autant de fois que l'on veut, en prenant n suffisamment grand. La somme de ces $2n$ premiers termes croît donc au delà de toute limite; donc la série est divergente. C. Q. F. D.

Il arrive souvent que l'on rend une série convergente par un simple changement des signes de quelques-uns de ses termes. Ainsi la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\pm\frac{1}{n}\mp\frac{1}{n+1}\pm\dots$$

est convergente. En général :

Théorème II. — *Si dans une série les termes sont, à partir de l'un d'eux, indéfiniment décroissants et alternativement positifs et négatifs, cette série est convergente.*

En effet, considérons la série

$$u_1+u_2+\dots+u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\dots+u_{n+2p}-u_{n+2p+1}\pm\dots,$$

dans laquelle les termes sont indéfiniment décroissants et alternativement positifs et négatifs à partir de u_n.

Appelons en général S_m la somme des m premiers termes de la série. Si nous remarquons que les termes

vont constamment en diminuant, les quantités

$$u_n - u_{n+1},\ u_{n+2} - u_{n+3},\ \ldots,\ u_{n+2p} - u_{n+2p+1}$$

seront toutes positives, et, par conséquent,

(1) $$S_{n+1} < S_{n+3} < S_{n+5} < \ldots < S_{n+2p+1} < \ldots.$$

Les quantités $-u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots, -u_{n+2p-1} + u_{n+2p}, \ldots$ seront toutes négatives, et, par suite,

(2) $$S_{n+2} > S_{n+4} > S_{n+6} > \ldots > S_{n+2p} > \ldots.$$

Or

$$S_{n+2p} = S_{n+2p-1} + u_{n+2p}.$$

Donc S_{n+2p} est plus grand que S_{n+2p-1}, et, à cause de la suite d'inégalités (1), plus grand que S_{n+1}. Ainsi donc une somme quelconque comprise dans la suite S_{n+2}, S_{n+4}, $S_{n+6}, \ldots$ est plus grande que S_{n+1}; il en résulte que ces sommes, allant constamment en décroissant et restant supérieures à S_{n+1}, qui est fixe, ont une limite S. Or on a

$$S_{n+2p} - u_{n+2p+1} = S_{n+2p+1}.$$

Faisons croître p indéfiniment; le premier membre de cette équation a pour limite S, car u_{n+2p+1} a pour limite zéro; donc S_{n+2p+1} a pour limite S également; donc, de quelque manière que croisse l'entier m, S_m a une limite, ce qui revient à dire que la série proposée est convergente.

Corollaire. — On voit que, la valeur de la série étant comprise entre S_n et S_{n+1}, l'erreur commise en prenant S_n pour valeur de la série est moindre en valeur absolue que u_{n+1}.

Théorème III. — *Quand une série à termes positifs a ses termes respectivement plus petits que ceux d'une autre*

série également à termes positifs et de plus convergente, la première série est aussi convergente.

Soient, en effet,

(1) $$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

la série convergente donnée (on représente ordinairement une série convergente en séparant la somme d'un certain nombre de termes de sa valeur par le signe =, on supprime le mot *lim*) et

(2) $$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

la série proposée. Soit s_n la somme des n premiers termes de la série (1), t_n la somme des n premiers termes de la série (2); comme $v_0 < u_0$, $v_1 < u_1, \ldots, v_n < u_n$, on a évidemment

$$t_n < s_n;$$

donc, *a fortiori*,

$$t_n < s.$$

Or, n croissant, t_n croît, mais t_n reste constamment inférieur à s; donc, en vertu d'un principe déjà invoqué, t_n a une limite; la série (2) est convergente.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Une série à termes positifs et négatifs est convergente lorsque la série des valeurs absolues de ses termes est convergente.*

En effet, considérons à part les séries des termes positifs et des termes négatifs pris dans l'ordre dans lequel ils se succèdent dans la série proposée.

Soient

(1) $$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots$$

la série des termes positifs et

$$(2) \qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots$$

celle des termes négatifs pris chacun en valeur absolue.

Soient x_i la somme des i premiers termes de la série (1), y_k la somme des k premiers termes de la série (2), et s_n la somme des n premiers termes de la série proposée. Nous pouvons toujours supposer que $a_0, a_1, \ldots, a_i$ soient les termes positifs de s_n, et $b_0, b_1, \ldots, b_k$ les termes négatifs; alors on a, en appelant s'_n la somme des n premiers termes de la série proposée rendus positifs,

$$(3) \qquad s'_n = x_i + y_k,$$

$$(4) \qquad s_n = x_i - y_k.$$

L'équation (3) montre que s'_n est plus grand que x_i et que y_k; donc, *a fortiori*, la limite de s'_n, qui par hypothèse existe, est supérieure à x_i et à y_k. Or x_i et y_k sont des nombres croissant avec i et k, mais constamment inférieurs à la limite de s'_n; donc ils ont une limite chacun; donc les séries (1) et (2) sont convergentes. L'équation (4) montre que s_n a une limite égale à la différence des limites de x_i et y_k, c'est-à-dire que la série proposée est convergente et a une valeur égale à la différence des valeurs des séries de ses termes positifs et de ses termes négatifs.

Théorème V. — *Quand une série ne perd pas sa convergence lorsque l'on rend tous ses termes positifs, on peut, sans altérer sa valeur, intervertir l'ordre de ses termes.*

En effet, considérons d'abord une série convergente à termes positifs :

$$(1) \qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots.$$

Intervertissons l'ordre de ses termes, et soit

$$(2)\qquad v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

la nouvelle série obtenue après ce changement. Soient s'_n la somme des n premiers termes de la série (2), s_m la somme des m premiers termes de la série proposée; on pourra toujours choisir m de telle sorte que tous les termes de s'_n soient contenus dans les m premiers termes de la série (1). On aura alors

$$s'_n \leqq s_m \text{ et } s'_n < \lim s_m \text{ ou } < s.$$

Nous voyons par là :

1° Que la série (2) est convergente, puisque s'_n croît avec n sans dépasser s;

2° Que la valeur $s' = \lim s'_n$ de la série (2) ne saurait surpasser s. Or on démontrerait de la même manière que la valeur s de la série (1) ne saurait surpasser s'; donc on doit avoir

$$s = s',$$

donc la série (1) n'a pas changé de valeur.

Supposons actuellement la série

$$(1)\qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

à termes quelconques.

Soient

$$(3)\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_l + \ldots$$

la série de ses termes positifs pris dans le même ordre que dans la série (1),

$$(4)\qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots$$

la série de ses termes négatifs également pris dans l'ordre

où ils se trouvent dans l'équation (1). Supposons que la série (1) conserve sa convergence quand on rend ses termes positifs. Les séries (3) et (4) sont convergentes, et, si x et y désignent les valeurs respectives de ces séries, on a

$$(5) \qquad s = x - y.$$

Cela posé, changeons l'ordre des termes de la série (1); la série de ses termes positifs sera encore la série (3), à l'ordre des termes près. Or, cette série est à termes positifs; donc elle conserve sa valeur. Même observation pour la série des termes négatifs et pour la série des valeurs absolues des termes de la série (1). Il en résulte, d'après le théorème IV, que la valeur de la série (1) transformée est encore $x - y$; donc la série (1) ne change pas de valeur quand on change l'ordre de ses termes.

C. Q. F. D.

Remarque. — Toute cette démonstration repose sur l'égalité (5); lors donc que x ou y n'existeront pas, c'est-à-dire quand dans la série proposée les termes positifs et négatifs ne formeront pas des séries convergentes, la démonstration précédente tombera en défaut. Il est facile, du reste, de donner un exemple dans lequel on voit une série changer de valeur quand on change l'ordre de ses termes.

Considérons, par exemple, la série convergente

$$(1) \qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \frac{1}{n+1} \pm \ldots$$

Remarquons que la série des valeurs absolues de ses termes est identique avec la série harmonique qui est divergente.

Posons

$$f(n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n},$$

et considérons la série

$$(2)\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

Arrêtons-nous au terme $\frac{1}{2n}$; cette série, comme on voit, renferme les mêmes termes que la série proposée; leur ordre est différent, et l'on prend d'abord deux termes positifs, puis un terme négatif, puis deux termes positifs, puis un terme négatif, ...; nous aurons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\\ &\quad=f(n)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{4n-1}.\end{aligned}\right.$$

La quantité qui suit $f(n)$, composée de n termes, est évidemment plus grande que $n\times\frac{1}{4n-1}$ ou que $\frac{1}{4-\frac{1}{n}}$. On a donc

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}>f(n)+\frac{1}{4-\frac{1}{n}}.$$

Si nous supposons que n devienne infini, le premier membre de cette inégalité ou la valeur de la série (2) différera de $\lim f(n)$ ou de la valeur de la série (1) de plus de $\frac{1}{4}$; donc évidemment la série (2) a une valeur toute différente de celle de la série (1).

Jusqu'ici nous n'avons guère parlé que de séries à termes réels; mais on fait un fréquent usage en Analyse de séries à termes imaginaires.

Une série à termes imaginaires peut se mettre sous la

forme

$$(1)\quad \begin{cases} (u_0+v_0\sqrt{-1})+(u_1+v_1\sqrt{-1})+(u_2+v_2\sqrt{-1})+\ldots \\ \qquad +(u_n+v_n\sqrt{-1})+\ldots. \end{cases}$$

Cette série sera convergente si les deux séries

$$(2)\qquad u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

$$(3)\qquad v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,$$

formées des parties réelles et des coefficients de $\sqrt{-1}$ dans tous ses termes, sont toutes deux convergentes.

En effet, soit s_n la somme des n premiers termes de la série (1), σ_n et τ_n les sommes des n premiers termes des séries (2) et (3); on a

$$s_n=\sigma_n+\tau_n\sqrt{-1}.$$

En passant aux limites et en désignant par σ et τ les valeurs des séries (2) et (3), on voit que

$$\lim s_n=\sigma+\tau\sqrt{-1};$$

donc la série (1) est convergente. C. Q. F. D.

Remarque. — Il est clair que, si l'une des séries (2) et (3) eût été divergente, la série (1) l'eût été pareillement.

Théorème VI. — *Dans une série à termes imaginaires, si la série des modules des différents termes est convergente, cette série est elle-même convergente et l'on peut, sans altérer sa convergence, intervertir l'ordre des termes.*

En effet, considérons la série (1). Les séries de ses termes réels et des coefficients de $\sqrt{-1}$ sont convergentes indépendamment des signes de leurs termes, car ceux-ci sont respectivement plus petits que ceux de la série des modules qui est à termes positifs. On peut donc changer

l'ordre des termes de ces séries sans en altérer la valeur, ce qui revient à dire que l'on peut changer l'ordre des termes de la série proposée elle-même. C. Q. F. D.

III. — RÈGLES DE CONVERGENCE.

On connaît un grand nombre de règles permettant de reconnaître si une série donnée est convergente; mais un petit nombre de caractères suffisent dans la plupart des cas, et nous allons les faire connaître.

Théorème I. — *Toute progression géométrique dont la raison est un nombre réel ou imaginaire de module moindre que* 1 *est une série convergente.*

En effet, une telle progression peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots.$$

Or, quel que soit x, la somme des $n+1$ premiers termes est égale à

$$a\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{ou} \quad a\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Si le module de x est moindre que 1, x^{n+1} tend vers zéro, et la somme des n premiers termes tend vers la limite finie $\frac{a}{1-x}$ pour $n=\infty$. La série (1) est donc convergente, et l'on a

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots.$$

Si l'on remplace x par $\frac{z}{\alpha}$, en supposant $\operatorname{mod}\frac{z}{\alpha} < 1$, on a

$$\frac{a\alpha}{\alpha - z} = a + a\frac{z}{\alpha} + a\frac{z^2}{\alpha^2} + \ldots + a\frac{z^n}{\alpha^n} + \ldots,$$

et, en faisant $a = \frac{1}{\alpha}$,

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{z}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^3} + \ldots + \frac{z^n}{\alpha^{n+1}} + \ldots;$$

cette formule, qui nous sera utile plus tard, a lieu pour toutes les valeurs de z et de α telles que $\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} \alpha$.

Théorème II. — *Si, dans une série à termes positifs*

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *d'un terme au précédent tend vers une limite inférieure à l'unité ou reste constamment inférieur à un nombre* α *fixe moindre que* 1, *cette série est convergente.*

Observons tout d'abord que, la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ étant moindre que l'unité, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira, pour des valeurs suffisamment grandes de n, par différer de sa limite de moins que cette limite ne diffère de l'unité, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira par rester moindre qu'un nombre α fixe, moindre lui-même que l'unité; ainsi nous n'avons besoin de démontrer le théorème que pour le cas où l'on a, pour n suffisamment grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha.$$

De là on tire

$$u_{n+1} < \alpha u_n,$$

et de même

$$u_{n+2} < \alpha u_{n+1}, \quad u_{n+3} < \alpha u_{n+2}, \quad \ldots.$$

On tire de ces formules

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha^3 u_n, \quad \ldots.$$

La série considérée a donc ses termes respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots,$$

dont la raison α est moindre que 1 et qui, par suite, est convergente; la série proposée elle-même est donc convergente.

Corollaire. — *Si dans une série à termes quelconques la limite du rapport d'un terme au précédent a un module moindre que l'unité, ou si le rapport d'un terme au précédent conserve un module moindre qu'un nombre α fixe moindre que 1, cette série est convergente.*

Car la série formée des modules de ses termes est convergente, en vertu du théorème précédent (p. 96).

Remarque I. — *Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendait vers une limite supérieure à l'unité ou restait à partir d'un certain terme supérieur à l'unité, la série serait divergente, car les termes iraient en augmentant.*

Remarque II. — Si la limite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ était l'unité, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'étant pas constamment supérieur à 1, on ne pourrait plus rien affirmer relativement à la convergence de la série, et il faudrait avoir recours à d'autres caractères pour décider si la série proposée est convergente ou divergente.

Remarque III. — Il est facile d'évaluer une limite de l'erreur commise quand pour calculer la valeur de la série (1) on se borne à faire la somme des n premiers

termes. En effet, cette erreur est

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots;$$

or $u_{n+1} < \alpha u_n$, $u_{n-2} < \alpha^2 u_n$, ..., d'après ce que l'on a vu : donc l'erreur est moindre que la valeur de la progression

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots$$

ou que

$$\frac{\alpha u_n}{1 - \alpha}.$$

THÉORÈME III. — *Si l'on a deux séries à termes positifs, l'une convergente,*

$$(1) \qquad s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots,$$

et l'autre,

$$(2) \qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_n + b_{n+1} + \ldots,$$

telle que le rapport d'un terme au précédent, $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, *soit constamment inférieur au rapport correspondant* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *dans la première, cette dernière est convergente.*

En effet, la série (1) étant convergente, la suivante le sera aussi (1) :

$$b_0 + \frac{b_0}{a_0} a_1 + \frac{b_0}{a_0} a_2 + \ldots + \frac{b_0}{a_0} a_n + \frac{b_0}{a_0} a_{n+1} + \ldots.$$

(*) Si l'on éprouvait quelques doutes à cet égard, ils seront levés par le théorème II du paragraphe suivant, théorème qui pourrait trouver sa place ici.

Cette série peut s'écrire ainsi :

(3) $$b_0 + b_0\frac{a_1}{a_0} + b_0\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0} + \ldots + b_0\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_1}{a_0} + \ldots.$$

Mais la série (2) peut se mettre sous la forme

$$b_0 + b_0\frac{b_1}{b_0} + b_0\frac{b_2}{b_1}\frac{b_1}{b_0} + \ldots + b_0\frac{b_n}{b_{n-1}}\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdots\frac{b_1}{b_0} + \ldots;$$

or cette série a, en vertu de notre hypothèse, ses termes respectivement moindres que ceux de la série (3), qui est convergente; donc la série (2) est elle-même convergente. C. Q. F. D.

Il est facile de déduire de là le théorème précédent.

THÉORÈME IV. — *La série*

(1) $$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \ldots$$

est convergente ou divergente selon que k est plus grand ou plus petit que 1.

En effet, supposons d'abord k plus grand que 1; la série précédente peut s'écrire, en groupant les termes (ce qui n'altère pas la convergence ou la divergence de la série, puisqu'elle a ses termes positifs), de la manière suivante :

(2) $$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \ldots \\ \quad + \left[\frac{1}{(2^n+1)^k} + \frac{1}{(2^n+2)^k} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1})^k}\right] + \ldots\end{array}\right.$$

Si l'on suppose $k > 1$, le terme général de la nouvelle série est moindre que $\frac{1}{2^{nk}}$ répété 2^n fois, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{2^{n(k-1)}}$; les termes de cette série sont donc

moindres que ceux de la progression géométrique décroissante

$$\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{(2^{k-1})^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{k-1})^n}+\ldots;$$

elle est par conséquent convergente.

Si au contraire $k<1$, alors la série (2) a ses termes plus grands respectivement que ceux de la série harmonique ; elle est donc divergente dans ce cas.

Dans la série (1), le rapport d'un terme au précédent est de la forme

$$\frac{1}{(n+1)^k}:\frac{1}{n^k}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k;$$

si k est plus grand que 1, cette quantité est évidemment moindre que $\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. Donc (*) :

Théorème V. — *Si dans une série le rapport d'un terme au précédent, ayant pour limite l'unité, peut se mettre sous la forme* $\frac{1}{1+\alpha}$, *et si* $n\alpha$ *finit par rester plus grand que* 1 *ou tend vers une limite* k *plus grande que* 1, *cette série sera convergente.*

Les règles de convergence que nous venons de donner suffisent dans la plupart des cas ; nous donnerons dans les exercices quelques règles nouvelles, en laissant au lecteur le soin de les démontrer.

Applications. — 1° Cherchons si la série

$$1+\frac{3}{5}x+\frac{8}{10}x^2+\ldots+\frac{n^2-1}{n^2+1}x^{n-1}+\ldots$$

(*) Raabe et Duhamel l'ont trouvé à peu près en même temps.

est convergente. On a ici, pour l'expression du rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}\,\frac{n^2+1}{n^2-1}\,x;$$

pour $n=\infty$, la limite de cette expression est x. Donc la série est convergente si $\operatorname{mod} x < 1$, divergente si $\operatorname{mod} x > 1$; enfin, si $\operatorname{mod} x = 1$, elle est encore divergente, parce que les modules des termes ont pour limite 1 et par suite ne tendent pas vers zéro.

2° Cherchons si la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n^2-n}+\ldots$$

est convergente. Le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{n^2-n}{(n+1)^2-(n+1)}$, dont la limite est 1. Cette expression peut s'écrire :

$$1:\left(1+\frac{2n}{n^2-n}\right).$$

En multipliant $\frac{2n}{n^2+n}$ par n, on obtient une quantité dont la limite pour $n=\infty$ est 2. Donc la série est convergente.

IV. — DES CALCULS QUE L'ON PEUT EFFECTUER SUR LES SÉRIES.

Théorème I. — *Si l'on considère les séries convergentes*

$$A = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$B = b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots,$$
$$C = c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la série dont le terme général est

$$u_n = a_n \pm b_n \pm c_n \pm \ldots$$

est convergente et a pour valeur A ± B ± C ± ....

En effet, on a

$$\sum_0^n u = \pm \sum_0^n a \pm \sum_0^n b \pm \sum_0^n c \pm \ldots.$$

Si l'on suppose que n augmente indéfiniment, on voit que $\sum_0^n u$ a une limite égale à $\pm A \pm B \pm C \pm \ldots$, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème II. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a pour valeur s,

$$au_0 + au_1 + \ldots + au_n + \ldots$$

sera convergente et aura pour valeur as.

En effet,

$$\sum_0^n (au) = a \sum_0^n u.$$

Donc, si n augmente indéfiniment, $\sum_0^n (au)$ a une limite égale à $a \lim \sum_0^n u$ ou à as. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a tous ses termes positifs, si de plus $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *sont des nombres positifs qui ne*

croissent pas au delà de toute limite,

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

sera convergente.

En effet, en désignant par A un nombre plus grand que $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, cette série a ses termes respectivement plus petits que ceux de la série convergente

$$As = Au_0 + Au_1 + \ldots + Au_n + \ldots,$$

qui est aussi à termes positifs. Abel a démontré que le théorème précédent était encore vrai pour une série convergente quelconque si les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ allaient constamment en décroissant; en effet, dans cette hypothèse, en posant

(1) $$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = s_n,$$

(2) $$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = t_n,$$

on a les relations suivantes,

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \quad \ldots, \quad u_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots,$$

et par conséquent, en portant ces valeurs dans l'équation (2),

$$t_n = a_0 s_0 + a_1 (s_1 - s_0) + \ldots + a_n (s_n - s_{n-1}),$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

(3) $$t_n = (a_0 - a_1) s_0 + (a_1 - a_2) s_1 + \ldots + a_n s_n.$$

Dans cette équation, les coefficients de $s_0, s_1, \ldots$ sont tous positifs, car $a_0, a_1, \ldots$ vont en décroissant; mais, si θ désigne une moyenne entre les quantités $s_0, s_1, \ldots, s_n$, on aura

$$t_n = \theta[(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + a_n] = a_0 \theta.$$

Or, n augmentant indéfiniment, θ conserve une valeur finie; donc t_n conserve une valeur finie. Supposons alors $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ positives (s'il n'en était pas ainsi, on augmenterait convenablement u_0); t_n croît, en vertu de l'équation (3), avec n, sans devenir infini; il a donc une limite; par suite, la série (2) est convergente.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Si les séries*

$$(1)\qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(2)\qquad t = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

sont convergentes, la série dont le terme général est

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_n v_0$$

est convergente et a pour valeur st dans certains cas que nous allons examiner.

1° Supposons d'abord les séries (1) et (2) à termes positifs; nous aurons

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_0^n u \sum_0^n v = \sum_0^n w &+ u_1 \times v_n + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots \\ &+ u_n(v_1 + v_2 + \ldots + v_n). \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant le produit $\sum_0^m u \sum_0^m v$. Le terme de ce produit dans lequel la somme des indices est la plus élevée est $2m$. Si donc $2m$ est au plus égal à n, tous les termes de $\sum_0^m u \sum_0^m v$ se trouvent compris dans $\sum_0^n w$. On a donc

$$\sum_0^n w > \sum_0^m u \sum_0^m v.$$

Or, en vertu de l'égalité (3),

$$\sum_0^n w < \sum_0^n u \sum_0^n v.$$

Mais si l'on suppose que m et n augmentent indéfiniment, $\sum_0^n u \sum_0^n v$ et $\sum_0^m u \sum_0^m v$ tendront tous deux vers st. Alors $\sum_0^n w$, qui reste compris constamment entre ces deux produits, tendra aussi vers la limite st. Le théorème qui nous occupe est donc démontré pour le cas où les séries (1) et (2) sont à termes positifs.

2° Supposons que les séries (1) et (2) ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes positifs. Considérons d'abord les termes des séries (1) et (2) en valeur absolue. Tout ce qui dans l'égalité (3) suit $\sum_0^n w$ a pour limite zéro, car $\sum_0^n u \sum_0^n v$ et $\sum_0^n w$ ont même limite, d'après ce que nous venons de voir tout à l'heure. Il en sera encore de même *a fortiori* quand on aura rendu aux termes des séries (1) et (2) leurs signes respectifs. Par conséquent, si dans l'égalité (3) nous supposons que n augmente indéfiniment, il vient, en passant aux limites,

$$st = \lim \sum_0^n w,$$

ce qui démontre que le théorème est encore applicable dans le cas où les séries ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes positifs.

3° Considérons enfin le cas où les séries (1) et (2) seraient à termes imaginaires. Nous supposerons les séries des modules de leurs termes convergentes, et nous pose-

rons en général

$$u_n = p_n(\cos\alpha_n + \sqrt{-1}\sin\alpha_n),$$
$$v_n = q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n).$$

Alors, en vertu de ce que nous avons démontré dans le premier cas, la différence

$$\sum_0^n p \sum_0^n q - \sum_0^n pq = p_1 q_n + p_2(q_{n-1} + q_n) + \ldots \\ + p_n(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

aura pour limite zéro; il en sera de même *a fortiori* de la quantité

$$p_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n) \\ + p_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2)[q_{n-1}(\cos\beta_{n-1} + \sqrt{-1}\sin\beta_{n-1}) \\ + q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n)] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui n'est autre chose que $u_1 v_2 + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots$. L'égalité (3), en passant aux limites, fournira donc encore $st = \sum_0^n w$, et le théorème est encore vrai dans ce dernier cas.

Remarque. — Ce dernier théorème et le théorème V de la page 92 montrent toute l'importance des séries dont les modules des divers termes forment une série convergente, puisque l'on peut effectuer sur ces séries des calculs analogues à ceux que l'on effectue sur des polynômes composés d'un nombre limité de termes. On a donné à ces séries le nom de séries *absolument convergentes*.

V. — THÉORÈME D'ABEL.

Lemme. — *Si une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre x est convergente pour le module R de x, elle l'est encore pour tout module moindre. Si elle est divergente pour le module R de x, elle l'est encore pour un module plus grand.*

En effet, considérons la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dans laquelle $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont constants; cette série étant convergente pour un certain module R de x, les modules de $a_0, a_1 R, \ldots, a_n R^n$ devront tendre vers zéro. Si l'on considère alors la progression

$$1 + \frac{\operatorname{mod} x}{R} + \ldots + \left(\frac{\operatorname{mod} x}{R}\right)^n + \ldots,$$

qui est une série convergente quand le module de x est moindre que R, en multipliant ses termes par les nombres $\operatorname{mod} a_0$, $\operatorname{mod} a_1 R$, $\operatorname{mod} a_2 R^2$, $\ldots$, $\operatorname{mod} a_n R^n$, qui ne croissent pas indéfiniment (p. 105), on obtient la série convergente

$$\operatorname{mod} a_0 + \operatorname{mod} a_1 x + \operatorname{mod} a_2 x^2 + \ldots + \operatorname{mod} a_n x^n + \ldots.$$

La convergence de cette série entraîne celle de (1).

C. Q. F. D.

Corollaire. — Il résulte de là qu'il existe un module R de x tel, que pour tout module moindre la série (1) est convergente, pour tout module plus grand elle est divergente; ce module s'appelle le *rayon de convergence* de la série. En représentant les imaginaires par des points, conformément aux méthodes de Cauchy, on voit que la

série (1) est convergente pour toutes les valeurs de x contenues à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal au *rayon de convergence*. Ce cercle est ce qu'on appelle le *cercle de convergence de la série*.

Une série

$$\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\ldots,$$

dont les divers termes sont fonctions de x est dite *uniformément convergente* entre des limites données de x (qui peut être réel ou imaginaire) si le module du reste

$$\varphi_{n+1}(x)+\varphi_{n+2}(x)+\ldots,$$

peut être pris moindre qu'une quantité donnée ε pour une valeur convenable de n et rester moindre que ε pour des valeurs plus grandes de n, quel que soit x compris entre les limites données.

THÉORÈME. — *Si les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sont continues entre certaines limites données de x, et si entre ces limites la série*

$$F(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\ldots$$

est uniformément convergente, sa valeur $F(x)$ *est une fonction continue de x entre ces limites.*

En effet, posons

$$f_n(x) = \varphi_0(x)+\ldots+\varphi_n(x),$$
$$R_n(x)=\varphi_{n+1}(x)+\varphi_{n+2}(x)+\ldots,$$

on aura

$$F(x)=f_n(x)+R_n(x),$$

et en appelant h un accroissement infiniment petit

$$F(x+h)=f_n(x+h)+R_n(x+h),$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} F(x+h) - F(x) = f_n(x+h) - f_n(x) \\ \qquad\qquad + R_n(x+h) - R_n(x). \end{cases}$$

Or, si l'on suppose x et $x+h$ compris entre les limites données, on pourra prendre n assez grand pour que

$$(2) \qquad \operatorname{mod}[R_n(x+h) - R_n(x)] < \frac{\varepsilon}{2},$$

puisque la série est uniformément convergente. Enfin $f_n(x)$ étant continu, on pourra prendre h assez voisin de zéro pour que

$$(3) \qquad \operatorname{mod}[f_n(x+h) - f_n(x)] < \frac{\varepsilon}{2};$$

les formules (1), (2), (3) donnent alors en observant que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties,

$$\operatorname{mod}[F(x+h) - F(x)] < \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité de $F(x)$.

Théorème d'Abel. — *Une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre,*

$$a_1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dans laquelle a_0, a_1, ..., a_n, ..., sont indépendants de x, 1° est uniformément convergente dans son cercle de convergence, 2° sa valeur est donc une fonction continue de x dans le même cercle.

En effet, soit

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$
$$\varphi_n(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots,$$

soient ρ_i le module de a_i, r le module de x, R une quantité un peu plus petite que le rayon de convergence, on aura

$$\text{mod}\,\varphi_n(x) < \rho_{n+1} r^{n+1} + \rho_{n+2} r^{n+2} + \ldots,$$

ou

$$\text{mod}\,\varphi_n(x) < \frac{\rho_{n+1}}{R^{n+1}} R^{n+1} r^{n+1} + \frac{\rho_{n+1}}{R_{n+1}} R^{n+1} r^{n+1} + \ldots,$$

et *a fortiori* en appelant M la plus grande des quantités $\rho_i R^i$

$$\text{mod}\,\varphi_n(x) < M\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} + \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} + \ldots\right],$$

où la quantité entre crochets est la valeur d'une progression géométrique dont la raison est moindre que un, sa valeur est $\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{1}{1-\frac{r}{R}}$, on peut prendre n tel que cette valeur soit moindre que $\frac{\varepsilon}{M}$ et reste moindre que $\frac{\varepsilon}{M}$ quand n croît; donc on peut rendre le reste $\varphi_n(x)$ moindre que ε quel que soit x compris dans le cercle de convergence, ce qui démontre le théorème d'Abel.

Remarque très importante. — *Deux séries ordonnées par rapport aux puissances de x et qui représentent la même fonction ont les mêmes coefficients; en d'autres termes, une même fonction ne peut pas, pour les mêmes valeurs de x, se développer de deux manières en série, ordonnée suivant les puissances croissantes de x.*

En effet, si l'on avait

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

on aurait, pour $x = 0$,

$$a_0 = b_0;$$

divisant alors par x, on obtiendrait l'égalité

$$a_1 + a_2 x + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots,$$

qui subsiste même pour $x = 0$, car les deux membres de la formule précédente sont continus, en vertu du théorème d'Abel; on a donc $a_1 = b_1$, et ainsi de suite.

VI. — LIMITE DE $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ POUR $m = \infty$, m ÉTANT ENTIER.

On a souvent besoin, en Analyse, de connaître la limite vers laquelle tend $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment. Pour trouver cette limite, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Si α, β, ..., λ sont des nombres positifs moindres que l'unité et tels que $\alpha + \beta + \ldots + \lambda < 1$, on aura*

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)\ldots(1 - \lambda) = 1 - \theta(\alpha + \beta + \ldots + \lambda),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 *et* 1.

En effet,

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) = 1 - \alpha - \beta + \alpha\beta,$$

d'où

$$\text{(A)} \qquad (1 - \alpha)(1 - \beta) > 1 - (\alpha + \beta).$$

En multipliant par $1 - \gamma$, on en déduit

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) > [1 - (\alpha + \beta)](1 - \gamma),$$

ou, en vertu du théorème contenu dans la formule (A),

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) > 1 - (\alpha + \beta + \gamma);$$

en multipliant par $1-\delta$, on trouvera de même

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)>1-(\alpha+\beta+\gamma+\delta),$$

et ainsi de suite. On a donc

$$1>(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\lambda)>1-(\alpha+\beta+\ldots+\lambda),$$

et, si θ désigne un nombre convenablement choisi entre 0 et 1, on peut écrire

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\lambda)=1-\theta(\alpha+\beta+\ldots+\lambda).$$

C. Q. F. D.

Arrivons à la recherche de la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$. En supposant d'abord que m croisse en passant par des valeurs entières et positives, la formule du binôme donne (p. 7)

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\left(\frac{x}{m}\right)+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}\left(\frac{x}{m}\right)^p+\ldots$$

ou bien

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m&=1+x+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2}+\ldots\\&+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}+\ldots\end{aligned}\right.$$

Supposons que m augmente au delà de toute limite; si l'on remplaçait dans le second membre de cette formule (1) chaque terme par sa limite, on s'exposerait à trouver un résultat inexact, parce que la limite d'une somme n'est égale à la somme des limites de ses parties qu'autant que le nombre m de ces parties est fini (t. I, p. 117, ligne 11). Quoi qu'il en soit, je dis que le second membre de la for-

mule (1) a pour limite la valeur de la série

$$(2)\qquad S = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

qui est convergente, car l'expression générale du rapport d'un terme au précédent est $\frac{x}{n}$, quantité dont la limite est zéro pour $n = \infty$ (p. 99).

Pour le démontrer, observons qu'en vertu du lemme précédent on a, en désignant par $\theta_1, \theta_2, \ldots$ des nombres compris entre o et 1,

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{m}\right) = 1 - \theta_{p-2}\frac{p(p-1)}{2m},$$

car la somme $\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \ldots + \frac{p-1}{m}$ est $\frac{p(p-1)}{2m}$. La formule (1) peut alors s'écrire

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2.3\ldots m} \\ &\quad - \frac{x^2}{2m}\left[1 + \theta_1\frac{x}{1} + \theta_2\frac{x^2}{1.2} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \theta_{m-2}\frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $m = \infty$, la quantité écrite sur la première ligne du second membre de cette formule tend vers la valeur S de la série (2); quant à la quantité écrite à la suite, elle se compose de deux facteurs, l'un $\frac{x^2}{2m}$ qui tend vers zéro et l'autre dont le module est inférieur à la valeur de la série convergente

$$1 + \frac{R}{1} + \frac{R^2}{1.2} + \ldots + \frac{R^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dans laquelle R désigne le module de x. Cette quantité a donc pour limite zéro, et, par suite, la formule (3) devient, pour $m = \infty$,

$$(4) \quad \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = S = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

Cette formule est démontrée en supposant que m tend vers l'infini en passant seulement par des valeurs entières et positives; nous allons prouver qu'elle a encore lieu quand m devient infini en passant par des valeurs quelconques.

VII. — LIMITE DE $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$. ÉTUDE DU CAS OU m EST QUELCONQUE. DÉVELOPPEMENT DE e^x, CALCUL DE e.

Supposons x réel et m positif; soit n un entier tel que $n < m < n+1$. On aura, en supposant d'abord $x > 0$,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{x}{m}\right)^m > \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n$$

ou

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right) > \left(1+\frac{x}{m}\right)^m > \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

Or, n et $n+1$ étant entiers, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ ont pour limite la quantité appelée S au paragraphe précédent quand $m = \infty$ ou $n = \infty$; les facteurs $1+\frac{x}{n}$ et $1+\frac{x}{n+1}$ ont évidemment pour limite 1. Donc $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, qui est compris entre deux quantités ayant pour limite S, a lui-même pour limite S. La démonstration serait la même si l'on avait $x < 0$; il faudrait seulement changer le sens des inégalités précédentes.

Si m était négatif, en le remplaçant par $-n$, on aurait alors

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-x}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{x}{n-x}\right)^{n-x}\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^x.$$

Or, la limite de $\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^{n-x}$ pour $n-x=\infty$, c'est-à-dire pour $n=\infty$, est S, tandis que la limite de $\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^x$ est 1; on a donc encore, dans le cas où m devient infini en passant par des valeurs négatives,

$$(1) \qquad \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = S = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\dots.$$

Remarques. — Si dans cette formule (1) nous faisons $x=1$, nous aurons

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}$$
$$+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}+\dots.$$

On désigne par e le second membre de cette formule, en sorte que

$$(2) \qquad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Ce nombre e est, comme on l'a vu, la base des logarithmes népériens; on peut, en posant $m=\frac{1}{\alpha}$, lui donner la forme

$$(3) \qquad e=\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

que l'on a rencontrée (p. 32).

On a

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x;$$

mais $\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}$, en vertu de (2) ou de (3), a pour limite quand m ou $\frac{m}{x}$ croît indéfiniment; on a donc

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x,$$

et par suite, en vertu de (1), la formule de Leibnitz

$$(4)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1\ 2.3\ldots n} + \ldots.$$

Si dans cette formule on remplace x par $z \log a$, elle donnera

$$a^x = 1 + \frac{z\log a}{1} + \frac{z^2(\log a)^2}{1.2} + \ldots.$$

La formule (4) peut servir au calcul de e^x. Supposons que nous ne prenions que les $n+1$ premiers termes de cette formule; l'erreur commise sera

$$\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left[1+\frac{x}{n+2}+\frac{x^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right];$$

si x est positif, cette erreur sera inférieure à

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\ldots\right]$$

ou à

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\frac{n+1}{n+1-x} \quad \text{ou} \quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{x}{n+1-x};$$

si l'on suppose x négatif, le premier terme négligé dans la série fera connaître une limite de l'erreur (p. 90).

En appliquant ces considérations au cas où $x = 1$, on peut calculer le nombre e au moyen de la formule

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}.$$

On a, par exemple,

$$1.2.3\ldots 12 = 479001600;$$

donc, en s'arrêtant au treizième terme inclusivement, l'erreur commise sur le calcul de e sera moindre que

$$\frac{1}{40000000}\,\frac{1}{12},$$

et l'on aura e avec huit chiffres exacts. On a trouvé

$$e = 2,718281828459045\ldots.$$

Le nombre e est incommensurable. En effet, si l'on pouvait avoir

$$(5)\qquad \frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots q} + \ldots,$$

p et q désignant deux entiers, on en déduirait, en multipliant par $1.2.3\ldots q$,

$$1.2.3\ldots(q-1)p = 1.2.3\ldots q + 2.3\ldots q + 3.4\ldots q + \ldots$$
$$+ 1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots.$$

Or cette égalité est absurde. En effet, le premier membre est entier; quant au second, il est évidemment fractionnaire, car

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$<\frac{1}{q+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}$$

ou bien

$$<\frac{1}{q}.$$

La formule (5) est donc absurde, et le nombre e incommensurable. C. Q. F. D.

VIII. — LIMITE DE $\left(1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m$ POUR $m=\infty$. SÉRIES DE NEWTON.

Soit

$$Z=\left(1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m,$$

et proposons-nous de trouver la limite de Z pour $m=\infty$, x et y désignant deux nombres réels. Pour éviter toute ambiguïté dans la valeur de Z, nous supposerons que m ne passe que par des valeurs entières (ou que l'on prenne Z avec son plus petit argument); on a

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} Z &= \left(1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right)^{\frac{m}{2}}\\ &= \left[\left(1+\frac{2mx+x^2+y^2}{m^2}\right)^{\frac{m^2}{2mx+x^2+y^2}}\right]^{\frac{2mx+x^2+y^2}{2m}}.\end{aligned}$$

Quand m croît indéfiniment, la quantité entre crochets tend vers e (*), l'exposant de cette quantité tend vers x; donc

(*) En effet on a

$$\frac{2mx+x^2+y^2}{m^2}=\frac{1}{m}\left(2x+\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m}\right),$$

on a

$$\lim \operatorname{mod} Z = e^x.$$

Calculons l'argument de Z. Soit φ l'argument de

$$1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m};$$

celui de Z sera $m\varphi$ (p. 69), et l'on aura

$$(1) \quad \sin\varphi = \frac{y}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}}}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{m + x}.$$

Or l'arc φ a une tangente et un sinus très-petits; on peut le supposer très-petit, positif ou négatif, car son cosinus est très-voisin de $+1$; il est alors compris entre sa tangente et son sinus, dont on a les expressions (1). L'arc $m\varphi$, qui est l'argument de Z, sera donc compris entre

$$\frac{y}{\sqrt{1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{1 + \frac{x}{m}};$$

ces deux quantités ayant pour limite y quand on fait $m = \infty$, on en conclut que $m\varphi$ ou l'argument de Z a pour limite y; donc enfin

$$(2) \quad \lim\left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = \lim Z = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

Mais on a trouvé (p. 115, l. 4)

$$\lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

---

et il est manifeste que pour $m = \infty$ cette quantité tend vers zéro, de même $\frac{2mx + x^2 + y^2}{2m} = x + \frac{y^2 + x^2}{2m}$ a pour limite x pour $m = \infty$.

quel que soit x; donc

$$\lim\left(1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = 1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2}+\ldots,$$

et par suite, en vertu de (2),

$$(3)\quad \begin{cases} e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y) = 1+\dfrac{x+y\sqrt{-1}}{1} \\ \qquad + \dfrac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2}+\ldots. \end{cases}$$

Voici maintenant les conséquences importantes à tirer de cette formule. Si l'on y fait $x=0$, on a

$$\cos y+\sqrt{-1}\sin y = 1+\frac{y\sqrt{-1}}{1}-\frac{y^2}{1.2}-\frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\ldots;$$

en égalant alors de part et d'autre les termes réels et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on a

$$(4)\quad \cos y = 1-\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots\pm\frac{y^{2n}}{1.2\ldots 2n}\mp\ldots,$$

$$(5)\quad \begin{cases} \sin y = y-\dfrac{y^3}{1.2.3}+\dfrac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots \\ \qquad \pm\dfrac{y^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}\mp\ldots, \end{cases}$$

formules remarquables dues à Newton et déduites d'un développement de arc $\sin x$ par une méthode peu usitée aujourd'hui et dite du *retour des suites;* ce développement de arc $\sin x$ avait d'ailleurs été découvert par Newton lui-même, ainsi que la méthode du retour des suites.

Les formules (3) et (4) peuvent servir au calcul des

Tables de sinus et de cosinus naturels; elles serviront à vérifier de temps en temps les résultats obtenus par la méthode de Simpson. Mais elles seront surtout utiles pour calculer un sinus ou un cosinus quand on n'aura pas de Tables à sa disposition, car elles sont très-convergentes. Pour les appliquer à un arc de μ secondes, on commencera par calculer la valeur y de cet arc en prenant le rayon du cercle trigonométrique pour unité; on aura alors

$$y = \frac{\pi\mu}{180.60.60};$$

ce serait une faute grossière que d'écrire

$$\sin\mu'' = \mu - \frac{\mu^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et que je signale pour l'avoir vu commettre trop souvent par les élèves.

IX. — QUELQUES MOTS SUR LES TRANSCENDANTES IMAGINAIRES.

Reprenons la formule (3) du paragraphe précédent :

$$(1)\quad \begin{cases} e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = 1 + \dfrac{x + y\sqrt{-1}}{1} \\ \qquad\qquad + \dfrac{(x + y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots. \end{cases}$$

Le second membre de cette formule ne diffère du développement de e^x que par le changement de x en $x + y\sqrt{-1}$; il paraît donc tout naturel de prendre ce second membre comme définition de l'exponentielle $e^{x+y\sqrt{-1}}$; alors, par définition, on aura (p. 121, l. 5)

$$(2)\qquad e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

Il est très-facile de constater que les propriétés des exponentielles imaginaires sont les mêmes que celles des exponentielles réelles. Ainsi, je dis que l'on aura

$$e^{x+y\sqrt{-1}}e^{x'+y'\sqrt{-1}}=e^{x+x'+(y+y')\sqrt{-1}};$$

en effet, cette formule équivaut à

$$\begin{aligned}&e^{x}(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)e^{x'}(\cos y'+\sqrt{-1}\sin y')\\&\quad=e^{x+x'}[\cos(y+y')+\sqrt{-1}\sin(y+y')],\end{aligned}$$

qui a lieu en vertu de la formule de Moivre.

La propriété fondamentale des exponentielles étant démontrée, les autres s'en déduisent (p. 40).

Si dans (2) on fait $x=0$, on a

$$(3)\qquad e^{y\sqrt{-1}}=\cos y+\sqrt{-1}\sin y,$$

d'où l'on tire, en changeant y en $-y$,

$$(4)\qquad e^{-y\sqrt{-1}}=\cos y-\sqrt{-1}\sin y.$$

Des formules (3) et (4) on tire les suivantes, dues à Euler :

$$(5)\qquad \cos y=\frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{y\sqrt{-1}}-e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces deux formules, à leur tour, peuvent servir de définition aux fonctions $\cos y$ et $\sin y$ quand y est imaginaire, et, quand on y remplace $e^{y\sqrt{-1}}$ et $e^{-y\sqrt{-1}}$ par leurs développements en série, on retrouve les formules (4) et (5) du paragraphe précédent, que l'on pourrait également prendre pour définitions des fonctions $\cos y$ et $\sin y$.

Toutes les formules de la Trigonométrie se retrouvent avec la plus extrême facilité en partant des formules (5); en les ajoutant après les avoir élevées au carré, on trouve

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$. Les formules d'addition des arcs se retrouvent aussi facilement. Les fonctions $\tang y$, $\cot y$, $\séc y$, $\cosé c y$ seront définies par les équations

$$\tang y = \frac{\sin y}{\cos y}, \quad \cot y = \frac{\cos y}{\sin y}, \quad \dots.$$

Il existe deux fonctions présentant avec le sinus et le cosinus la plus grande analogie : ce sont le cosinus et le sinus hyperboliques, définis par les relations

$$\cos h x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sin h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On vérifiera facilement que

$$\begin{aligned} \cos h(x+y) &= \cos h x \cos h y + \sin h x \sin h y, \\ \sin h(x+y) &= \sin h x \cos h y - \cos h x \sin h y, \\ \cos h^2 x - \sin h^2 y &= 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Maintenant posons

$$e^z = x;$$

z sera ce que l'on appelle le *logarithme népérien* de x, et, comme l'on a, par définition, en appelant $\log r$ le logarithme népérien ordinaire du nombre positif r,

$$e^{\log r + \theta\sqrt{-1}} = e^{\log r}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

on voit que $\log r + \theta\sqrt{-1}$ est le logarithme de

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

Donc :

Le logarithme d'une imaginaire est égal au logarithme réel de son module, augmenté de l'un quelconque de ses

arguments multiplié par $\sqrt{-1}$; *il a donc une infinité de valeurs différant entre elles d'un multiple de* $2\pi\sqrt{-1}$.

Le logarithme d'une quantité réelle et positive r, ou $r(\cos 2k\pi + \sqrt{-1}\sin 2k\pi)$, aura donc une infinité de valeurs $\log r + 2k\pi\sqrt{-1}$. Ainsi $\log 1 = 2k\pi\sqrt{-1}$; le logarithme de $-r$ sera $\log r + (2k+1)\pi\sqrt{-1}$, ... Il va sans dire que l'on a toujours, quand x et y sont imaginaires,

$$\log x + \log y = \log xy;$$

mais il ne faut pas oublier que, $\log x$ contenant l'arbitraire $2k\pi\sqrt{-1}$, les deux membres de l'égalité précédente ne sont vraiment égaux qu'en choisissant convenablement les arguments de x, y et xy.

Les fonctions $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, ... sont naturellement définies par les équations

$$\sin y = x, \quad \cos y = x, \quad \operatorname{tang} y = x, \quad \ldots.$$

(*Voir* la *Trigonométrie* de J.-A. Serret.)

X. — GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DU BINOME, RÉSOLUTION DE $ax^2 + bx + c = 0$ QUAND a EST TRÈS PETIT.

Nous ferons une dernière application de la théorie des séries à la généralisation de la formule du binôme.

La série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots$$

[*qui pour m entier et positif est limitée et a pour valeur* $(1+x)^m$] *est convergente quand on suppose le module de x moindre que* 1; *elle est divergente quand le module de x est supérieur à* 1.

En effet, le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{m-n+1}{n}x$; pour $n=\infty$, il se réduit à $-x$. Si donc le module de x est plus petit que 1, la série sera convergente; elle serait divergente si le module de x était supérieur à l'unité.

Supposons donc mod$x<1$ et posons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m) &= 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots \\ &\quad +\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m') &= 1+\frac{m'}{1}x+\frac{m'(m'-1)}{1.2}x^2+\ldots \\ &\quad +\frac{m'(m'-1)\ldots(m'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Si nous multiplions ces formules membre à membre en observant la règle donnée p. 106, nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(m)\varphi(m') &= 1+\frac{m+m'}{1}x+\frac{(m+m')(m+m'-1)}{1.2}x^2+\ldots, \\ &\quad +\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}+\frac{m'}{1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots\right]x^n+\ldots \end{aligned}\right.$$

Soit, pour abréger, A le coefficient de x^n dans cette formule; A est un polynôme entier du degré n en m et m'. Si l'on supposait m et m' entiers, $\varphi(m)\varphi(m')$ se réduirait à $(1+x)^{m+m'}$, car $\varphi(m)$ et $\varphi(m')$ se réduiraient à $(1+x)^m$ et à $(1+x)^{m'}$; le coefficient A serait donc égal au polynôme de degré n

$$\frac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+m'-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

que nous désignerons, pour abréger, par B. Les polynômes

A et B sont égaux pour toutes les valeurs entières de m et m', c'est-à-dire que, m' étant entier, on a $A = B$ pour plus de n valeurs de m; on a donc $A = B$ pour m' entier, quel que soit m. Mais on a $A = B$, quel que soit m, pour plus de n valeurs de m'; donc enfin on a $A = B$ quel que soit m' et quel que soit m. En remplaçant A par B dans (3), on a alors

$$\varphi(m)\varphi(m') = 1 + \frac{m+m'}{1}x + \dots \\ + \frac{(m+m')\dots(m+m'-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n + \dots,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \varphi(m)\varphi(m') = \varphi(m+m').$$

Or $\varphi(m)$ est fonction continue de m, car, si l'on suppose m' très-petit, $\varphi(m')$, en vertu de (1), est très-voisin de 1; donc $\varphi(m+m')$ diffère très-peu, en vertu de la formule précédente, de $\varphi(m)$. La formule (4) exprime (p. 46) que $\varphi(m)$ est de la forme a^m, a désignant une quantité indépendante de m que l'on obtiendra en faisant $m = 1$ dans la formule (1); on a alors

$$\varphi(1) = 1 + x = a \quad \text{et} \quad \varphi(m) = (1+x)^m.$$

La formule (1) devient ainsi

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots \\ &\qquad + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n + \dots; \end{aligned} \right.$$

c'est la formule du binôme généralisée. Le premier membre a en général plusieurs valeurs, mais il est facile de voir qu'il faut prendre celle qui a son argument com-

pris entre $-\frac{m\pi}{2}$ et $+m\frac{\pi}{2}$. En effet, pour $x=0$, le premier membre de (5) doit se réduire à 1 comme le second; son argument peut alors être pris égal à zéro ainsi que celui de x; pour que l'argument de $(1+x)^m$ puisse franchir les limites $-\frac{m\pi}{2}$ et $+\frac{m\pi}{2}$, il faut que celui de $1+x$ puisse franchir les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; or c'est ce qui n'aura jamais lieu, car, si l'on pose $x=a+b\sqrt{-1}$, l'argument de $1+x$ aura pour cosinus $\frac{1+a}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}}$, quantité toujours positive, car, x ayant un module moindre que un, a et b restent moindres que un en valeur absolue.

On voit que, si m est négatif, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^m} &= (1-x)^{-m} = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2 \\ &+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3+\ldots \end{aligned}\right.$$

La formule du binôme permet de résoudre l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

quand a est très-petit, avec beaucoup plus de rapidité qu'en appliquant la formule

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}.$$

On écrit cette formule ainsi, en ne prenant que le signe +,

$$x=\frac{b}{2a}\left[1-\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et, si $\frac{4ac}{b^2}<1$, surtout s'il est très-petit, on aura, en appli-

quant à $\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ la formule du binôme,

$$x=-\frac{c}{b}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)+\frac{1.3}{4.6}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2+\ldots\right].$$

Si a et c sont de signes contraires, l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque sera moindre que le premier terme négligé. Si a et c sont de même signe, l'erreur, en s'arrêtant au terme en $\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$, sera moindre que la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison serait $\frac{4ac}{b^2}$ et le premier terme $\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$, ou que

$$\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n:\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right).$$

Soit à résoudre, par exemple,

$$0,01\,x^2-2x+1=0;$$

on aura

$$x=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}\,0,01+\frac{1.3}{4.6}\,0,0001+\ldots\right].$$

En se bornant aux termes écrits, l'erreur sera moindre que $\frac{1}{2}\,0,0000001$, et l'on aura

$$x=0,5012563\ldots;$$

l'autre racine s'obtiendra en retranchant celle-ci de $\frac{2}{0,01}$ ou de 200, ou encore en prenant 100 fois l'inverse de la première, puisque leur produit doit faire 100.

Il est bon d'observer qu'à un degré d'approximation toujours facile à évaluer on a, pour de petites valeurs

de α,

$$\frac{1}{1\pm\alpha}=1\mp\alpha,$$

$$\sqrt{1\pm\alpha}=1\pm\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm\alpha}}=1\mp\frac{1}{2}\alpha.$$

La formule du binôme pour le cas où l'exposant m est fractionnaire a été donnée par Newton, mais l'illustre géomètre n'en a pas donné de démonstration bien satisfaisante.

XI. — SÉRIES LOGARITHMIQUES, CALCUL DE π.

La formule du binôme donne

$$(1-x)^{-m}=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots(n+1)}x^{n+1}+\ldots.$$

m peut être quelconque : nous le supposerons positif; quant à x, son module doit être plus petit que 1. On en tire

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\frac{(1-x)^{-m}-1}{m}=x+(1+m)\frac{x^2}{2}+\ldots\\&\qquad+(1+m)\left(1+\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Faisons tendre m vers zéro; la limite du premier membre s'obtient en observant que

$$(1-x)^{-m}=e^{-m\log(1-x)}=1-\frac{m\log(1-x)}{1}+\frac{m^2\log^2(1-x)}{1.2}-\ldots$$

On en conclut

$$\frac{(1-x)^{-m}-1}{m} = -\log(1-x) + \frac{m}{2}\log^2(1-x) - \ldots,$$

et, pour $m = 0$,

$$\lim \frac{(1-x)^{-m}-1}{m} = -\log(1-x).$$

On a donc

$$(2)\quad -\log(1-x) = \lim\left[\frac{x}{1} + (1+m)\frac{x^2}{2} + \ldots + (1+m)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\right].$$

Soient S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série écrite entre crochets, R_n le reste; soient S'_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série suivante et R'_n son reste :

$$S = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

qui est évidemment convergente, puisque le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{nx}{n+1}$, quantité qui a pour limite x, lequel par hypothèse a un module moindre que 1.

Soit ρ le module de x; on peut toujours prendre n assez grand pour que R_n soit moindre qu'une quantité donnée ε lorsque x se trouve remplacé par ρ, et alors il est clair que l'on aura non-seulement

$$\operatorname{mod} R_n < \varepsilon, \quad \operatorname{mod} R'_n < \varepsilon,$$

mais que ces inégalités seront encore satisfaites quand m diminuera. On aura alors

$$\operatorname{mod}(R_n - R'_n) < 2\varepsilon.$$

Cela fait, on pourra toujours prendre m assez petit pour

que

$$\mathrm{mod}(S_n - S'_n) < \varepsilon,$$

car S_n a pour limite S'_n. Donc alors on aura

$$\mathrm{mod}(S_n - S'_n) + \mathrm{mod}(R_n - R'_n) < 3\varepsilon,$$

et *a fortiori*, puisque le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties,

$$\mathrm{mod}(S_n - S'_n + R_n - R'_n) < 3\varepsilon$$

ou bien

$$\mathrm{mod}(S_n + R_n - S) < 3\varepsilon.$$

ε étant aussi petit que l'on veut, cette formule exprime que $S_n + R_n$ a pour limite S. La formule (2) devient alors, pour les valeurs de x dont le module est plus petit que 1,

$$(3) \qquad -\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots.$$

En changeant x en $-x$, on a la série de Mercator (Kauffmann)

$$(4) \qquad \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

et l'on doit toujours avoir $\mathrm{mod}\,x < 1$ (*). Néanmoins, s'il y a convergence, quand $\mathrm{mod}\,x = 1$, la formule sera encore

(*) Que x soit réel ou imaginaire, $\log(1 + x)$ et $\log(1 - x)$ ont une infinité de valeurs, et il est bien clair que quand x est réel, c'est la valeur réelle des quantités $\log(1 - x)$, $\log(1 + x)$ qu'il faut prendre dans les formules (3) et (4). Quand x est imaginaire, les valeurs qu'il faut prendre sont un peu plus difficiles à déterminer, mais avec un peu d'attention on y arrive; si l'on sépare les parties réelles des parties imaginaires, on obtient ainsi des formules curieuses, mais sur lesquelles nous ne croyons pas devoir nous arrêter.

vraie; ainsi, pour $x=1$, on a

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

En ajoutant (3) et (4), on a

$$(5) \qquad \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdots\right),$$

et, si l'on fait $x = \frac{1}{2N+1}$, on trouve

$$\log(N+1) - \log N = 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right).$$

Cette formule, très-convergente, sert pour le calcul des Tables de logarithmes. Si l'on y fait $N=1$, on trouve $\log 2$; en triplant $\log 2$, on a $\log 8$; en faisant $N=8$, on calcule $\log 9 - \log 8$, d'où l'on conclut $\log 9$; puis, faisant $N=9$, on a le logarithme de 10. Les logarithmes ainsi calculés sont népériens. $\frac{1}{\log 10}$ est égal au logarithme vulgaire de e. Or on a $\log\text{vulg} N = \log N \frac{1}{\log 10}$; la formule (5) donne alors

$$(6) \quad \log\text{vulg}(N+1) - \log\text{vulg} N = \frac{1}{\log 10}\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \ldots\right).$$

Dans cette formule on fait $N = 1000, 1001, 1002, \ldots$. Comme le logarithme vulgaire de 1000 est connu et égal à 3, on a des séries très-convergentes pour calculer les logarithmes de 1001, 1002,... [la série qui figure dans la formule (6) est évidemment d'autant plus convergente, et, par suite, il est d'autant plus facile de calculer sa valeur que N est plus grand].

Si dans la formule (5) on remplace x par $x\sqrt{-1}$, on

trouve

$$(7)\qquad \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Soit alors

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = y;$$

on en tire

$$\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad x\sqrt{-1} = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}},$$

ou, en vertu des formules (p. 123, l. 16),

$$x = \operatorname{tang} y, \quad y = \operatorname{arc\,tang} x.$$

Remplaçant y ou $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$ par cette valeur dans (7), on a la formule suivante, due à Grégory et trouvée également par Leibnitz, mais postérieurement,

$$(8)\qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

pour toutes les valeurs du module de x moindres ou égales à 1 pour lesquelles le second membre est convergent (*).

Si l'on fait attention que, d'après Euler, on a

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{239},$$

ce que le lecteur vérifiera sans peine, on pourra calculer

(*) La fonction arc tang x a une infinité de valeurs, pour une valeur donnée de x, mais la valeur que l'on doit choisir quand x est réel doit évidemment se réduire à zéro pour $x = 0$, quand x varie d'une manière continue en se rapprochant de zéro, et c'est la valeur de arc tang x, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, qu'il faut adopter.

$\frac{\pi}{4}$ au moyen de la formule précédente en y remplaçant arc tang $\frac{1}{5}$ et arc tang $\frac{1}{239}$ par leurs développements fournis par la formule (8). On a ainsi

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\ldots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\ldots\right).$$

Pour avoir $\frac{\pi}{4}$ avec dix décimales, il suffit de prendre sept termes dans la première série et deux dans la seconde; vingt minutes suffisent à un calculateur ordinaire pour effectuer l'opération complète.

XII. — CONCLUSION.

La théorie des séries est surtout utile, comme l'on voit, pour le calcul des fonctions transcendantes, ou même pour le calcul des fonctions algébriques, dans certains cas où le calcul arithmétique ordinaire entraînerait à des opérations trop compliquées.

Mais, à un point de vue plus abstrait, la théorie des séries permet de définir et d'étudier une foule de transcendantes nouvelles; ainsi elle nous a servi à généraliser la fonction exponentielle, et, en posant

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right),\qquad \sin x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right),$$

elle nous a permis de donner une définition purement analytique du sinus et du cosinus, d'où il serait facile de déduire toute la Trigonométrie, sans employer de considérations géométriques (*).

(*) Terminons ce Chapitre par une réflexion que l'on ne fait pas assez

NOTES ET EXERCICES.

1. Les séries

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

$$1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} + \ldots$$

sont convergentes pour $x < 1$ et divergentes pour $x \geqq 1$; la valeur de la première est $\frac{1}{(1-x)^2}$, celle de la seconde est $\frac{1}{(1-x)^3}$.

2. La série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

est convergente : calculer sa valeur à 0,0001 près.

3. On a

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$$
$$+ \frac{n-1}{(x+n-2)(x+n-1)(x+n)} + \ldots.$$

4. Soit $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ une série quelconque, mais

---

souvent. Plus tard on fera connaître une formule dite *formule de Taylor*, qui donne les développements de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ et $(1+x)^m$, mais cette formule ne donne que péniblement d'autres développements; en outre elle suppose la variable x réelle. On voudra donc bien reconnaître la supériorité et l'excellence des méthodes que nous venons d'exposer, à cause de leur grande généralité. Ajoutons que les développements en question étaient connus bien avant l'invention du théorème de Taylor et que les théories exposées ci-dessus se rapprochent beaucoup de celles des inventeurs.

divergente et à termes positifs; la série suivante sera convergente et aura pour valeur 1 :

$$\frac{u_0}{u_0+1}+\frac{u_1}{(u_0+1)(u_1+1)}+\frac{u_2}{(u_0+1)(u_1+1)(u_2+1)}+\ldots=1,$$

formule remarquable en ce sens qu'elle renferme une infinité de quantités arbitraires. En y remplaçant u_n par $\frac{v_n}{w'_n}$, on a

$$\frac{v_0}{v_0+w'_0}+\frac{v_1 w_0}{(v_0+w_0)(v_1+w'_1)}+\frac{v_2 w'_1 w'_0}{(v_0+w_0)(v_1+w_1)(v_2+w_2)}+\ldots=1.$$

5. La série

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{n\log n}+\ldots$$

est divergente, le signe log désignant un logarithme népérien.

6. Considérons une série $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$, dans laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite finie l; on pourra écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=l+\varepsilon_1,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=l+\varepsilon_2,\quad \ldots,\quad \frac{u_{n+k}}{u_{n+k-1}}=l+\varepsilon_k,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant tous moindres qu'une quantité η, que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut en prenant n suffisamment grand. Multiplions toutes ces égalités membre à membre; on aura

$$\frac{u_{n+k}}{u_n}=(l+\varepsilon_1)(l+\varepsilon_2)\ldots(l+\varepsilon_k)=(l+\theta\eta)^k=\frac{(l+\theta\eta)^{n+k}}{(l+\theta\eta)^n},$$

θ désignant un nombre compris entre -1 et $+1$. On en conclut

$$\sqrt[n+k]{u_{n+k}}=(l+\theta\eta)\sqrt[n+k]{\frac{u_n}{(l+\theta\eta)^n}};$$

or, en prenant k suffisamment grand, la racine $(n+k)^{\text{ième}}$ de $\frac{u_n}{(l+\theta\eta)^n}$ aura pour limite 1; donc, pour $k=\infty$, on aura

$$\lim \sqrt[n+k]{u_{n+k}}=l+\theta\eta.$$

Mais n peut toujours être pris assez grand pour que η soit moindre qu'une quantité donnée; donc, enfin,

$$\lim \sqrt[n+k]{u_{n+k}} = l \quad \text{ou} \quad \lim \sqrt[m]{u_m} = l = \lim \frac{u_{m+1}}{u_m} \quad (m = \infty).$$

Il résulte de là (p. 99) que, la limite de $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ étant la même que celle de $\sqrt[m]{u_m}$, *une série sera convergente ou divergente suivant que* $\lim \sqrt[m]{u_m}$ *sera plus petit ou plus grand que* 1. Démontrer ce théorème directement. (Cauchy, *Anal. algébr.*)

7. Supposons que, dans la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}.$$

Si la première des différences $A - a$, $B - b$, ..., qui ne s'annule pas, est positive, la série est divergente. La série sera convergente ou divergente, suivant que $A - a + 1$ sera négatif ou positif.

(Gauss.)

8. La série dont le terme général est u_n est convergente ou divergente suivant que l'on a

$$\lim \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > \text{ou} < 1.$$

9. La série à termes positifs $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots$, où $\varphi(x)$ désigne une fonction positive décroissante, est convergente ou divergente suivant que l'aire de la courbe $y = \varphi(x)$ comprise entre l'axe des x et les ordonnées $\varphi(1)$ et $\varphi(\infty)$ est finie ou infinie. (Ce caractère de convergence, dû à Cauchy, est l'un des plus puissants que l'on connaisse.)

10. La limite de $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np}$ pour $n = \infty$ est égale à $\log p$.

11. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$ tend vers une limite finie pour

$n=\infty$: prouver seulement l'existence de cette limite. (On lui donne le nom de *constante d'Euler*.)

12. Si $r_0, r_1, r_2, \ldots$ sont des nombres indéfiniment décroissants et si θ n'est pas un multiple de 2π, les séries

$$r_0 + r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta + \ldots,$$
$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots + r_n \sin n\theta + \ldots$$

sont convergentes. (Faire usage du théorème des projections.)

(BJÖRLING.)

13. Étudier la série

$$1 - \frac{1-x^m}{1-x} + \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$- \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \ldots.$$

Quand m est entier et positif, et quand on arrête le développement au terme égal en valeur absolue à l'unité, la valeur de la suite ainsi limitée est zéro pour m impair et $(1-x)(1-x^3)\ldots(1-x^{m-1})$ pour m pair. (GAUSS.)

14. Étudier la série

$$1 - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p-1)}{1^p.2^p} - \frac{m^p(m^p-1)(m^p-2^p)}{1^p.2^p.3^p} + \ldots;$$

quand m est entier et positif, sa valeur est zéro.

15. $a, b, c, \ldots$ désignant les nombres premiers impairs, on a, pour $x<1$,

$$\frac{x}{1-x} - \sum \frac{x^a}{1-x^a} + \sum \frac{x^{ab}}{1-x^{ab}} - \sum \frac{x^{abc}}{1-x^{abc}} + \ldots$$
$$= x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots. \qquad \text{(CATALAN.)}$$

16. On a

$$\lim \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} \frac{1}{1-\frac{1}{3^n}} \frac{1}{1-\frac{1}{5^n}} \cdots \frac{1}{1-\frac{1}{p^n}} \cdots \right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots;$$

n est supposé supérieur à 1; quant à p, il désigne un nombre premier. (LAMBERT.)

17. On a les formules

$$\begin{aligned}
\operatorname{arc}\sin x &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left[\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{-1}\right],\\
\operatorname{arc}\cos x &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right),\\
\operatorname{arc}\operatorname{tang} x &= -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}.
\end{aligned}$$

(J. BERNOULLI.)

Ces formules s'obtiennent en résolvant par rapport à u les équations qui donnent $\sin u$, $\cos u$ et $\operatorname{tang} u$.

Montrer que ces formules mettent en évidence la périodicité des fonctions $\sin x$, $\cos x$ et $\operatorname{tang} x$.

18. Si l'on considère des facteurs en nombre illimité, mais dans un ordre déterminé, on dit que leur produit est *convergent* si le produit des n premiers tend vers une limite déterminée différente de zéro, lorsque n augmente indéfiniment.

Un produit quelconque peut se mettre sous la forme

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1})+\ldots,$$

et, pour qu'il soit convergent, il faut que α_n tende vers zéro.

En effet, en appelant P_n le produit des n premiers facteurs, on a

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \alpha_n.$$

Or la limite de P_n, si le produit en question est convergent, doit être la même que celle de P_{n-1}; donc α_n doit avoir pour limite zéro.

Le produit suivant, dans lequel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont positifs,

$$(1)\qquad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots,$$

est convergent ou divergent en même temps que la série

$$(2)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n+\ldots.$$

En effet, on a

$$P_n \quad \text{ou} \quad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) > 1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n.$$

Si donc la série (2) diverge, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ augmente indéfiniment; donc P_n augmente indéfiniment avec n et le produit (1) est divergent.

D'un autre côté, on a

$$1+\alpha_1 < e^{\alpha_1}, \quad 1+\alpha_2 < e^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad 1+\alpha_n < e^{\alpha_n}, \quad \ldots;$$

donc

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) < e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Si donc la série (1) est convergente, P_n aura une limite pour $n=\infty$, et par suite le produit (1) sera convergent.

Lorsque le produit

(1) $$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

est convergent, la série

(2) $$\log(1+\alpha_1)+\log(1+\alpha_2)+\ldots$$

l'est aussi.

Si le produit (1) *devient convergent quand on remplace* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *par leurs modules, il l'était primitivement.* (CAUCHY, *Anal. algébr.*)

19. Le produit $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots$ a pour valeur $\frac{\sin x}{x}$.

20. Soient 2, 3, 5, ..., n, ... les nombres premiers consécutifs; le produit $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots$ est divergent : en conclure que la série formée des inverses des nombres premiers est divergente.

21. Soient

$$s_2 = \sum_2^\infty \frac{1}{n^2}, \quad s_3 = \sum_2^\infty \frac{1}{n^3}, \quad \ldots, \quad s_k = \sum_2^\infty \frac{1}{n^k};$$

la série $s_2+s_3+s_4+\ldots+s_k+\ldots$ est convergente et de

valeur 1. Le produit $(1+s_2)(1+s_3)\ldots(1+s_k)$ est donc convergent

22. x étant moindre en valeur absolue que l'unité, trouver la valeur des produits

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})\ldots,$$
$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2^n})\ldots.$$

23. Si le produit

$$P=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$$

est convergent et a une limite différente de zéro, la série (considérée à l'ex. 4)

$$\frac{u_1}{1+u_1}+\frac{u_2}{(1+u_1)(1+u_2)}+\frac{u_3}{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)}\ldots,$$

est convergente et a pour valeur $1-\frac{1}{P}$.

24. Trouver la limite de $\cos^m\frac{x}{m}$ pour $m=\infty$.

25. Trouver la limite de $\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ pour $x=0$.

CHAPITRE VI.

DES FRACTIONS CONTINUES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *fraction continue* une expression de la forme (*)

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots}}},$$

dans laquelle les quantités $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ peuvent être en nombre illimité. Dans ce dernier cas, il est indispensable de définir ce que l'on appelle *valeur* de la fraction continue.

Lorsque l'expression

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots + \cfrac{a_n}{b_n}}},$$

(*) La théorie des fractions continues est due à lord Brouncker, qui a donné sous cette forme l'expression du nombre π. Quelques professeurs définissent la fraction continue en supposant $a_1, a_2, \dots$ égaux à l'unité; cette définition n'est pas conforme à celle des bons auteurs dans lesquels nous avons puisé notre définition; d'ailleurs la théorie générale n'est pas plus compliquée que celle des fractions très-particulières dans lesquelles $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$.

que nous désignerons par le symbole F_1^n, tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, la fraction continue est dite *convergente,* et la limite de F_1^n ou F_1^∞ est ce que l'on appelle la valeur de la fraction continue; dans le cas où F_1^n ne tend vers aucune limite, la fraction est *divergente.*

La valeur de F_1^n est ce que l'on appelle la $n^{\text{ième}}$ *réduite,* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ sont ce que l'on appelle les *fractions intégrantes.*

$F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty, \ldots$ sont ce que l'on appelle le premier, le deuxième, le troisième *quotient complet;* ils jouent ici un rôle analogue aux restes dans les séries.

Occupons-nous de la formation des réduites. On a

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1^1 = \dfrac{a_1}{b_1}, \\ F_1^2 = \dfrac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}, \\ F_1^3 = \dfrac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{b_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 + b_1 a_3}. \end{cases}$$

La loi de formation de ces réduites est exprimée par la formule suivante,

$$(2) \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}}{Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}},$$

dans laquelle P_i désigne d'une manière générale le numérateur et Q_i le dénominateur de la $i^{\text{ième}}$ réduite. Pour démontrer la formule (2), admettons qu'elle se vérifie jusqu'à une certaine valeur m de n, changeons m en $m+1$; nous allons voir qu'elle subsiste pour la nouvelle valeur de n. En effet, pour passer de la $m+1^{\text{ième}}$ réduite à la $m+2^{\text{ième}}$, il suffit de changer b_{m+1} en $b_{m+1} + \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}}$; il

vient alors

$$\frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{(P_m b_{m+1} + P_{m-1} a_{m+1}) b_{m+2} + P_m a_{m+2}}{(Q_m b_{m+1} + Q_{m-1} a_{m+1}) b_{m+2} + Q_m a_{m+2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{P_{m+1} b_{m+2} + P_m a_{m+2}}{Q_{m+1} b_{m+2} + Q_m a_{m+2}}.$$

La formule (2) est donc vérifiée pour $n = m + 1$; or elle est satisfaite pour $n = 2$, comme le prouve la relation (1); elle l'est donc pour $n = 3$, par suite pour $n = 4, \ldots$; donc elle est générale. C. Q. F. D.

Ainsi, on peut poser les formules

$P_{-1} = 1$ $\qquad$ $Q_{-1} = 0$

$$(3)\quad \begin{cases} P_0 = b_0, & Q_0 = 1, \\ P_1 = P_0 b_1 + a_1, & Q_1 = b_1, \\ P_2 = P_1 b_2 + P_0 a_2, & Q_2 = Q_1 b_2 + Q_0 a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n+1} = P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}, & Q_{n+1} = Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} b_{n+1}. \end{cases}$$

De là on pourrait tirer P_{n+1} et Q_{n+1} sous forme de déterminants en fonction des a et des b.

Théorème I. — On a

$$(4)\qquad P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

En effet, remplaçons dans le premier membre P_{n+1} et Q_{n+1} par leurs valeurs (3); on a

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}) Q_n - (Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}) P_n$$

ou

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = -(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) a_{n+1}.$$

En remplaçant dans cette formule n par $1, 2, 3, \ldots, n$,

on obtient des formules qui, multipliées entre elles, donnent

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n (P_1Q_0 - Q_1P_0)a_2a_3 \ldots a_{n+1}$$

ou

$$(4) \qquad P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n a_1a_2 \ldots a_{n+1},$$

ce qu'il fallait établir.

Les conséquences de cette formule (4) sont très-nombreuses.

Corollaire I. — *On en déduit*

$$(4\,bis) \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{a_1a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}.$$

Si dans cette formule on fait $n = 1, 2, 3, \ldots$ et si l'on ajoute les résultats, on a

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} &= \frac{P_1}{Q_1} - \frac{a_1a_2}{Q_1Q_2} + \frac{a_1a_2a_3}{Q_2Q_3} - \ldots \\ &\quad + (-1)^n \frac{a_1a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}. \end{aligned} \right.$$

De là un moyen, si la fraction continue est limitée, de calculer sa valeur sans avoir besoin de former les P_i.

De là un moyen aussi de reconnaître si la fraction continue donnée est convergente; en effet, si elle est convergente (ou divergente), $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ aura (ou n'aura pas) une limite pour $n = \infty$, et la série (5) sera (ou ne sera pas) convergente pour $n = \infty$.

Corollaire II. — *La formule* (5) *fait connaître un développement de la fraction continue en série. Elle permet aussi, par l'identification de son second membre avec une série donnée, de convertir celle-ci en fraction con-*

tinue. (Consulter à ce sujet le *Calcul différentiel* de M. Bertrand.)

II. — ÉTUDE DU CAS OU LES NUMÉRATEURS DES FRACTIONS INTÉGRANTES SONT ÉGAUX A L'UNITÉ.

Lorsque les numérateurs des fractions intégrantes sont égaux à l'unité, les formules du paragraphe précédent se simplifient; mais, si l'on suppose de plus les dénominateurs entiers et positifs, la fraction continue jouira de propriétés arithmétiques intéressantes dont nous allons nous occuper.

1° *D'abord une telle fraction est toujours convergente*, car la série (5) du paragraphe précédent se réduit à

$$(1) \qquad \frac{P_1}{Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \ldots \pm \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \mp \ldots$$

Les formules (3) du même paragraphe donnent

$$Q_2 = b_1 b_2 + 1 \quad \text{ou} \quad Q_2 > Q_1 > 1,$$
$$Q_3 = Q_2 b_3 + b_1 \quad \text{ou} \quad Q_3 > Q_2 > 2,$$
$$Q_4 = Q_3 b_4 + Q_2 \quad \text{ou} \quad Q_4 > Q_3 > 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi $Q_{n+1} > n$, et par suite le terme général de la série (1), tend vers zéro; cette série, et par suite la fraction continue elle-même, est donc convergente en vertu du théorème de la page 89.

2° *Réciproquement, tout nombre peut être développé de cette manière en fraction continue*. En effet, soient en général $E(x)$ le plus grand entier contenu dans x et N le nombre à développer; on peut poser

$$N = E(N) + \frac{1}{N'},$$

et N′ sera plus grand que l'unité. Si $N < 1$, on a d'ailleurs $E(N) = 0$. On posera de même

$$N' = E(N') + \frac{1}{N''},$$

$$N'' = E(N'') + \frac{1}{N'''}, \quad \ldots,$$

et l'on aura

$$N = E(N) + \cfrac{1}{E(N') + \cfrac{1}{E(N'') + \ldots}},$$

ce qui démontre notre proposition.

La fraction sera limitée si $N = \frac{a}{b}$, a et b désignant deux entiers. En effet, $E\left(\frac{a}{b}\right)$ ou $E(N)$ est alors le quotient de a par b, et, en appelant R le reste, on a $N' = \frac{b}{R}$: en appelant R′ le reste de la division de b par R, on a $N'' = \frac{R}{R'}$, ... L'opération que l'on a à faire est identique avec celle du plus grand commun diviseur, en sorte qu'elle se terminera si a et b sont entiers.

3° *Les réduites sont des fractions irréductibles.*

En effet, la formule (4) du paragraphe précédent donne

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = \pm 1.$$

Tout facteur divisant P_n et Q_n devrait diviser ± 1. Ce facteur commun ne saurait être que l'unité, et par suite P_n et Q_n sont premiers entre eux; donc $\frac{P_n}{Q_n}$ est irréductible.

4° *La différence entre deux réduites consécutives, étant de la forme* $\pm \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$, *tend vers zéro en diminuant indéfiniment, car*

$$Q_1 < Q_2 < Q_3 < \ldots, \quad \text{et} \quad Q_n > n - 1.$$

5° *Le nombre* N *est compris entre deux réduites successives.* On peut le voir aisément sur la fraction elle-même; mais on peut observer que la série (5) du paragraphe précédent donne les valeurs successives des réduites quand on prend son premier, ses deux premiers, ses trois premiers... termes. Or, la valeur de la série ou de la fraction continue est comprise, comme l'on sait, entre deux sommes successives, c'est-à-dire entre deux réduites consécutives (p. 90); d'ailleurs, chaque somme ou chaque réduite se rapproche de plus en plus de N quand n augmente.

6° *Les réduites sont les fractions les plus simples que l'on puisse employer pour approcher du nombre* N.

En effet, soit $\frac{a}{b}$ un nombre approchant de N; il sera compris entre deux réduites consécutives, par exemple $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, et sa différence avec N sera moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$; sa différence avec $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ sera aussi moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$. Or, en faisant cette différence, on trouve

$$\pm \frac{P_{n-1} b - Q_{n-1} a}{b Q_{n-1}}.$$

Mais le numérateur de cette fraction est au moins égal à 1; donc la fraction précédente est au moins égale à $\frac{1}{b Q_{n-1}}$. Pour que cette quantité soit moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$, il faut que $b > Q_n$; donc la fraction $\frac{a}{b}$ a son dénominateur plus grand que celui de $\frac{P_n}{Q_n}$.

Application. — Réduisons $\pi = 3,14159...$ en frac-

tion continue ; on trouve

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Les réduites successives sont les nombres bien connus

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \ldots.$$

III. — APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES A L'ANALYSE NUMÉRIQUE.

Lorsqu'on veut démontrer l'incommensurabilité de certaines transcendantes, un excellent moyen consiste à les développer, si l'on peut, en fractions continues, et le théorème suivant permet alors, dans un grand nombre de cas, de trancher la question.

THÉORÈME I. — *Si les fractions* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ *sont toutes en valeur absolue moindres que* 1, *la fraction*

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots}}$$

représentera un nombre incommensurable, pourvu que la différence entre a_n *et* b_n *ne soit pas toujours égale à un.*

Nous supposons $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ *entiers, mais du reste quelconques, positifs ou négatifs.*

On aura d'abord en valeur absolue

$$\frac{a_1}{b_1} < 1;$$

mais, $\frac{a_2}{b_2}$ étant inférieur à l'unité, $b_1 + \frac{a_2}{b_2}$ sera encore plus grand que a_1, car la différence entre a_1 et b_1 est au moins d'une unité, en sorte que, quand même $\frac{a_2}{b_2}$ serait de signe contraire à b_1, on aurait toujours

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} < 1.$$

Soient F_1^1, F_1^2, F_1^3, ... les réduites successives de la fraction continue considérée et F_1^∞, F_2^∞, ... les quotients complets successifs. En continuant ce raisonnement, on voit que F_1^n, n étant un nombre fini, sera moindre que 1; mais on ne peut pas affirmer *a priori* que F_1^∞ soit moindre que 1. Tout ce que l'on peut dire, c'est que la limite de F_1^n est au plus égale à 1. Mais, pour que $F_1^\infty = 1$, il faudrait que b_1 différât de a_1 d'une unité et que l'on eût $F_2^\infty = 1$, c'est-à-dire que b_2 différât de a_2 d'une unité, etc., en sorte que l'on ne pourra avoir $F_1^\infty = 1$ que si la différence entre a_n et b_n est un, encore F_1^∞ sera-t-il moindre que un si a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... sont tous positifs.

Ce cas est le cas d'exception signalé dans notre énoncé. Posons alors

$$\frac{B}{A} = F_1^\infty, \quad \frac{C}{B} = F_2^\infty, \quad \frac{D}{C} = F_3^\infty, \quad \ldots;$$

on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{a_1}{b_1 + C : B},$$

c'est-à-dire

$$B b_1 + C = a_1 A \quad \text{ou} \quad C = a_1 A - b_1 B.$$

Si donc B et A sont entiers, C le sera aussi, et ainsi de suite. Or, si $F_1^{\bullet}$ est commensurable, on peut supposer A et B entiers; mais on a en valeur absolue

$$\frac{B}{A} < 1, \quad \frac{C}{B} < 1, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$A > B > C > D > \ldots.$$

Ainsi A, B, C, ... seraient des nombres entiers indéfiniment décroissants, ce qui est absurde; donc $F_1^{\bullet}$ est incommensurable. C. Q. F. D.

Application. — La fraction

$$\cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ddots}},$$

dans laquelle a et b sont des entiers positifs tels que $b < a$, est incommensurable. Supposons ces entiers constants, et soit z la valeur de la fraction; on aura

$$z = \frac{b}{a+z},$$

c'est-à-dire

$$z^2 + az - b = 0,$$

ou bien

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

$\sqrt{a^2+4b}$ est donc toujours incommensurable; donc enfin a^2+4b n'est jamais un carré parfait si l'on a $a > b$, ce qu'il est facile d'établir directement.

IV. — APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES A LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU PREMIER DEGRÉ.

Considérons l'équation

$$ax + by = c,$$

dans laquelle nous supposerons a, b, c entiers; réduisons $\frac{a}{b}$ en fraction continue, et, à cet effet, soit b_0 le plus grand entier contenu dans $\frac{a}{b}\cdot$ Posons

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{z_1};$$

on déduit de là

$$z_1 = \frac{b}{a - b_0 b}.$$

On peut poser

$$z_1 = b_1 + \frac{1}{z_2},$$

et ainsi de suite; on a alors

$$\frac{a}{b} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ldots + \cfrac{1}{b_n}}}.$$

Cette fraction est forcément limitée, sans quoi (p. 150) le second membre ne saurait représenter un nombre commensurable.

Soient $\frac{a'}{b'}$ l'avant-dernière réduite, $\frac{a''}{b''}$ la dernière; on a (p. 145) pour deux réduites consécutives quelconques la relation

$$a''b' - b''a' = \pm 1;$$

$\frac{a''}{b''}$ est égal à $\frac{a}{b}$. Supposons que a et b soient premiers entre eux; on aura alors $a''=a$, $b''=b$ et

$$ab' - ba' = \pm 1,$$

d'où l'on tire

$$a(b'c) + b(-a'c) = \pm c.$$

On satisfera donc à l'équation proposée en prenant

$$x = \pm b'c, \quad y = \mp a'c.$$

Connaissant une solution, on connaît facilement toutes les autres. En effet, soit (x_0, y_0) une solution; on aura

$$ax_0 + by_0 = c;$$

on déduira de cette équation et de la proposée

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

et cette équation peut remplacer la proposée; on en déduit

$$y = a\frac{x_0 - x}{b} + y_0.$$

Or, a et b étant premiers entre eux, pour que y soit une solution entière, il faut et il suffit que $\frac{x_0 - x}{b}$ soit un entier, et l'on a alors, pour satisfaire à la question, les systèmes de valeurs suivants :

$$\begin{cases} x = x_0 \pm b, \\ y = y_0 \mp a, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 \pm 2b, \\ y = y_0 \mp 2a, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 \pm 3b, \\ y = y_0 \mp 3a, \end{cases} \quad \begin{matrix} \ldots, \\ \ldots. \end{matrix}$$

Nous avons supposé a et b premiers entre eux; s'ils ne l'étaient pas, et si du reste a, b, c n'avaient plus de diviseur commun, il est facile de voir que l'équation

$$ax + by = c$$

n'aurait pas de solutions entières, sans quoi le plus grand commun diviseur de a et b diviserait le premier membre de l'équation sans diviser le second.

Si a, b, c avaient un facteur commun, il faudrait le supprimer, après quoi on rentrerait dans le cas que nous venons de traiter.

EXERCICES ET NOTES.

1. Toute fraction continue qui devient périodique est racine d'une équation du second degré, dont les coefficients sont rationnels par rapport aux termes des fractions intégrantes.

2. Démontrer que, si N est premier avec a, b, c, ... et moindre que leur produit, on a

$$\frac{N}{abc\ldots} = \frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} + \ldots,$$

A, B, C, ... désignant des entiers.

3. La fraction continue dont toutes les fractions intégrantes sont égales à $\frac{2ab}{a-b}$ est égale à $2b$.

4. Former les réduites successives de la fraction continue dont toutes les fractions intégrantes sont égales à $\frac{x}{1}$ ou à $\frac{1}{x}$; trouver l'expression générale de la $n^{\text{ième}}$ réduite.

5. Consulter le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand et l'*Algèbre* d'Euler avec les Notes de Lagrange. Consulter aussi le *Traité des équations numériques* de Lagrange. Pour la résolution des équations du premier degré en nombres entiers, *voir* l'*Analyse numérique* de M. V.-A. Lebesgue, un des plus grands arithmologues de notre époque.

6. Des ouvriers, hommes et femmes, ont gagné ensemble 246^{fr}, chaque homme est payé 10^{fr}, chaque femme 8^{fr} : combien y a-t-il d'hommes et de femmes ?

7. Des ouvriers, hommes, femmes et enfants, au nombre de 34, ont été payés en tout 260^{fr}; chaque homme a touché 10^{fr}, chaque femme 8^{fr}, chaque enfant 2^{fr} : combien y avait-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?

8. Prouver que, m et n étant deux nombres incommensurables quelconques, on peut toujours trouver deux nombres entiers x, y tels que

$$mx - ny < \varepsilon.$$

Trouver effectivement ces deux nombres.

Cette proposition très-importante se démontre en réduisant $\frac{m}{n}$ en une fraction continue dont les numérateurs des fractions intégrantes sont l'unité et dont les dénominateurs sont positifs. Soient $\frac{P_\mu}{Q_\mu}$ et $\frac{P_{\mu+1}}{Q_{\mu+1}}$ deux réduites successives; leur différence est $\frac{1}{Q_{\mu+1}Q_\mu}$. Or $\frac{m}{n}$ est compris entre deux réduites consécutives; donc

$$\frac{m}{n} - \frac{P_\mu}{Q_\mu} < \frac{1}{Q_{\mu+1}Q_\mu}$$

ou

$$mQ_\mu - nP_\mu < \frac{n}{Q_{\mu+1}}.$$

Il reste donc à prendre $\frac{n}{Q_{\mu+1}} < \varepsilon$, ce qui est toujours possible, car $Q_{\mu+1}$ croît indéfiniment avec μ.

9. *Incommensurabilité de* π. — Posons

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(z) = 1 + \frac{1}{1}\frac{x}{z} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{z(z+1)} + \ldots \\ \qquad + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{x^n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} + \ldots \end{cases}$$

Le second membre de cette formule est une série convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale

$$\frac{x}{n(z+n-1)},$$

quantité qui a pour limite zéro pour $n=\infty$. On a, en changeant z en $z+1$,

$$\varphi(z+1)=1+\frac{1}{1}\,\frac{x}{z+1}+\frac{1}{1.2}\,\frac{x^2}{(z+1)(z+2)}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{x^n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\ldots,$$

d'où l'on tire aisément

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{x}{z(z+1)}\varphi(z+2),$$

ou, en multipliant par $\dfrac{z}{\varphi(z+1)}$,

$$\frac{z\varphi(z)}{\varphi(z+1)}=z+\frac{x\varphi(z+2)}{(z+1)\varphi(z+1)}.$$

Si l'on pose alors

$$(2)\qquad \psi(z)=\frac{x\varphi(z+1)}{z\varphi(z)},$$

on pourra écrire l'équation précédente comme il suit :

$$\frac{x}{\psi(z)}=z+\psi(z+1)$$

ou bien

$$\psi(z)=\frac{x}{z+\psi(z+1)}.$$

En changeant z en $z+1$, $z+2$, ..., on a

$$\psi(z+1)=\frac{x}{z+1+\psi(z+2)},$$
$$\psi(z+2)=\frac{x}{z+2+\psi(z+3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par conséquent

$$(3)\qquad \psi(z)=\cfrac{x}{z+\cfrac{x}{z+1+\cfrac{x}{z+2+\ddots+\cfrac{x}{z+i-1+\psi(z+i)}}}}.$$

Or, si l'on fait $z = \frac{1}{2}$, on a, en vertu de l'équation (2),

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = 2x\frac{\varphi\left(\frac{3}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2x\frac{1 + \frac{4x}{1.2.3} + \frac{4^2x^2}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{4^n x^n}{1.2.3\ldots(2n+1)}}{1 + \frac{4x}{1.2} + \frac{4^2x^2}{1.2.3.4} + \frac{4^3x^3}{1.2.3.4.5.6} + \ldots + \frac{4^n x^n}{1.2.3\ldots 2n}}.$$

Cette équation peut encore s'écrire (p. 117)

$$(4) \qquad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{x}\,\frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}.$$

En second lieu, la fonction $\psi(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\psi(z) = \frac{x}{z}\,\frac{1 + \frac{1}{1}\frac{x}{z+1} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{(z+1)(z+2)} + \ldots}{1 + \frac{1}{1}\frac{x}{z} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{z(z+1)} + \ldots},$$

et, si l'on fait augmenter i indéfiniment, $\psi(z+i)$ tend évidemment vers zéro, en sorte que pour $z = \frac{1}{2}$ l'équation (3) devient

$$2\sqrt{x}\,\frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}} = \cfrac{4x}{1 + \cfrac{4x}{3 + \cfrac{4x}{5 + \ldots}}}$$

Changeons x en $\frac{x^2}{4}$, nous aurons

$$(5) \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ldots}}}$$

Quel que soit x, les fractions $\frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{5}, \frac{x^2}{7}, \cdots$ finissent par devenir

moindres que 1. Si donc nous supposons x entier, nous voyons que $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est une quantité incommensurable, en vertu du théorème de la page 150; donc e^x est aussi incommensurable. Ainsi :

Les puissances entières du nombre e sont incommensurables.

Dans la formule (5), changeons x en $x\sqrt{-1}$; nous aurons

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \cfrac{x\sqrt{-1}}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \ddots}},$$

c'est-à-dire (p. 121), en vertu des relations connues,

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x, \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x,$$

$$\tang x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ddots}}},$$

ou bien, en changeant x en $\frac{p}{q}$,

$$\tang \frac{p}{q} = \cfrac{p}{q - \cfrac{p^2}{3q - \cfrac{p^2}{5q - \ddots}}}.$$

On voit donc que, si un arc $\frac{p}{q}$ est commensurable, sa tangente ne l'est pas, car les fractions $\frac{p^2}{3q}, \frac{p^2}{5q}, \frac{p^2}{7q}, \ldots$ finissent par devenir moindres que l'unité; il en résulte que le nombre $\frac{\pi}{4}$ est incommensurable, car, s'il était commensurable, sa tangente, qui est 1, serait incommensurable. On en conclut le théorème suivant :

La circonférence d'un cercle est incommensurable avec son rayon.

10. Le rapport des vitesses de deux roues d'engrenage est le même que le rapport inverse de leur nombre de dents. Sachant que le rapport des vitesses doit être d'environ $\frac{1855}{1403}$, trouver un rapport commensurable plus simple approchant de celui-là, afin de construire moins de dents.

11. Développer e en fraction continue et calculer les premières réduites.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *dérivée* d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement correspondant de sa variable lorsque celui-ci tend vers zéro.

Cette définition, pour être bien comprise, exige que nous entrions dans quelques détails. Lorsqu'une fonction $f(x)$ est continue, à un accroissement infiniment petit h de sa variable x correspond toujours un accroissement infiniment petit k de la fonction $f(x)$, mais il n'est pas évident *a priori* que la limite du rapport $\frac{k}{h}$, que nous avons appelée *dérivée de la fonction*, soit finie et déterminée; en d'autres termes, il n'est pas évident que, quelle que soit la manière dont h tend vers zéro, $\frac{k}{h}$ tende toujours vers la même limite.

Nous verrons dans la suite que les fonctions de variable réelle ont en général une dérivée unique et bien déterminée, et nous ne nous occuperons que de ces fonctions (*).

(*) Toute fonction $f(x)$ qui admet une dérivée finie et bien déterminée pour $x = a$ est évidemment continue, parce que l'accroissement de f est nécessairement infiniment petit avec celui de x; mais il n'est pas prouvé que toute fonction continue ait une dérivée : quelques auteurs ont cité des fonctions continues ne possédant pas de dérivées.

Lagrange, dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, propose de représenter la dérivée de la fonction y par y' (*); y' à son tour pouvant être considéré comme fonction de la même variable que y, sa dérivée sera représentée par y'' : elle porte le nom de *dérivée seconde* de y. La dérivée de y'' sera représentée par y''' : elle porte le nom de *dérivée troisième* de y, etc.

THÉORÈME I. — *Soient $f(x)$ une fonction quelconque, $f'(x)$ sa dérivée, h un accroissement quelconque donné à x; on aura*

$$(1) \qquad f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec h.

En effet, d'après la définition même que nous avons donnée de la dérivée, on a

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

c'est-à-dire, en désignant par ε une quantité qui s'annule avec h,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

d'où l'on tire la relation (1).

L'expression de la différence $f(x+h)-f(x)$ est sus-

(*) Cette notation, dont Lagrange lui-même n'a jamais voulu faire usage dans ses recherches, a été longtemps imposée en France par les programmes. La notation inventée par Leibnitz $\left(\frac{dy}{dx}\right.$ pour représenter la dérivée de y relative à $\left.x\right)$ est encore celle dont on fait usage aujourd'hui universellement; elle a de grands avantages sur celle de Lagrange (Leibnitz et Newton sont les inventeurs du Calcul des dérivées; le premier l'a appelé *Calcul différentiel*, le second *Calcul des fluxions*).

ceptible de prendre une autre forme, qui nous sera très utile dans la suite, et que nous allons faire connaître.

Théorème II. — *Soit $f(x)$ une fonction qui reste continue* (*) *quand x varie de a à b et qui ait dans cet intervalle une dérivée $f'(x)$ unique, déterminée et finie pour chaque valeur de x; si l'on a*

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$

il existera entre a et b une valeur c telle, que l'on aura

$$f(c) = 0.$$

En effet, on a vu (p. 36) que $f(x)$ passait par un maximum ou par un minimum pour une valeur de x comprise entre a et b; appelons donc c la valeur de x qui rend $f(x)$ maximum ou minimum. D'après ce que l'on a vu (p. 35) pour des valeurs suffisamment petites de h,

$$f(c+h) - f(c) \quad \text{et} \quad f(c-h) - f(c)$$

sont de même signe

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}$$

sont alors de signes contraires. Mais, d'après la définition que nous avons donnée de la dérivée, chacune de ces expressions a pour limite $f'(c)$, dont la valeur, par hypothèse, est unique et bien déterminée; $f'(c)$ est donc la limite commune de deux quantités, l'une positive, l'autre négative, et par suite ne peut être que zéro. C. Q. F. D.

(*) Il est inutile, à la rigueur, de dire que $f(x)$ est continu, car, si la dérivée existe, la fonction est continue.

Cette démonstration, due à O. Bonnet, est extrêmement remarquable, en ce sens que l'on n'a pas besoin de supposer la dérivée $f'(x)$ continue.

Corollaire I. — *Si la fonction $f(x)$ conserve une dérivée bien déterminée entre les valeurs x et $x+h$ de sa variable, on a*

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

θ désignant un nombre compris entre zéro et 1.

En effet, posons $x+h=X$, $X-x=h$ et

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=A; \tag{1}$$

on en conclura

$$f(X)-f(x)-(X-x)A=0.$$

Si l'on considère alors la fonction de z,

$$f(X)-f(z)-(X-z)A,$$

elle s'annulera pour $z=x$. Mais elle s'annule aussi pour $z=X$; donc sa dérivée s'annule pour une valeur ζ de z comprise entre x et X. Cette dérivée est la limite de

$$\frac{f(X)-f(z+\varepsilon)-(X-z-\varepsilon)A-[f(X)-f(z)-(X-z)A]}{\varepsilon};$$

pour $\varepsilon=0$; cette quantité peut être remplacée par

$$-\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}+A,$$

dont la limite est, par définition, $-f'(z)+A$. Remplaçant z par ζ, on a donc $-f'(\zeta)+A=0$ ou $A=f'(\zeta)$; par suite, la formule (1) devient

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=f'(\zeta).$$

Remplaçons X par $x+h$ et la valeur ζ comprise entre x et $x+h$ par $x+\theta h$, θ désignant un nombre positif moindre que 1; nous aurons

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)$$

ou

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

II. — DÉRIVÉE D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UN QUOTIENT.

Théorème I. — *La dérivée d'une somme composée d'un nombre limité de parties est égale à la somme des dérivées de ses parties* (*).

En effet, considérons la quantité

$$(1) \qquad y=u+v-w\pm\ldots,$$

$u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions quelconques de x *en nombre limité;* représentons par le symbole Δx un accroissement arbitraire donné à x (le signe Δ ne représentant plus ici une quantité, mais une opération). Soient Δy, Δu, Δv, Δw, ... les accroissements correspondants de y, u, v, w, ...; en remplaçant dans l'équation (1) x par $x+\Delta x$, u deviendra alors $u+\Delta u$, v deviendra $v+\Delta v$, etc., et l'on aura

$$(2) \qquad y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-w-\Delta w\pm\ldots.$$

Si l'on retranche les équations (1) et (2) membre à membre, on a

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w\pm\ldots,$$

(*) Nous supposerons toujours dans la suite que les fonctions sur lesquelles nous raisonnons ont une dérivée. L'existence de la dérivée *cherchée* sera seule à démontrer.

c'est-à-dire, en divisant par Δx,

$$(3)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \pm \ldots.$$

Or, si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers y' dérivée de y, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers u', etc., en sorte qu'en prenant les limites des deux membres de l'équation précédente, et en observant que dans le second membre de cette équation *le nombre des parties est limité,* on a

$$y' = u' + v' - w' \pm \ldots,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Nous avons insisté sur ce point que le nombre des parties $u, v, w, \ldots$ devait être limité; en effet, quand nous avons fait tendre Δx vers zéro, nous avons admis que la limite de la somme $\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} + \cdots$ était égale à la somme des limites de ses parties, ce qui cesse d'être vrai lorsque l'on suppose le nombre des parties illimité (*). Ainsi le théorème que nous venons de démontrer n'est pas applicable aux séries, ou du moins, pour qu'il devienne applicable aux séries, il faut nécessairement une nouvelle démonstration.

(*) On démontre par le Calcul intégral la formule

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots \pm \frac{\sin nx}{n} \pm \ldots.$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres de cette équation, en procédant comme si le second membre avait un nombre limité de termes, on trouve, à l'aide de procédés qui seront expliqués plus loin, la formule

$$\frac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots \pm \cos nx, \ldots$$

absurde, car le second membre est divergent.

THÉORÈME II. — *La dérivée d'un produit de plusieurs fonctions en nombre limité est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chacune de ces fonctions par toutes les autres.*

En effet, soient u, v, w, ... différentes fonctions de x en nombre limité; posons

$$(1) \qquad y = uvw\ldots.$$

Changeons dans cette formule x en $x + \Delta x$; y, u, v, w, ... deviendront $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, ..., Δy, Δu, ..., représentant, comme plus haut, les accroissements de y, u, ... correspondant à l'accroissement Δx de x. Nous aurons

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)(w + \Delta w)\ldots.$$

Or le produit des facteurs qui entrent dans le second membre de cette équation est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des binômes $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, ...; on aura donc

$$(2) \qquad y + \Delta y = uvw\ldots + \Delta u . vw\ldots + \Delta v . uw\ldots + \omega,$$

ω désignant une somme de termes contenant en facteur au moins deux des quantités Δu, Δv, Δw, ...

Or, des équations (1) et (2) on tire par soustraction

$$\Delta y = \Delta u . vw\ldots + \Delta v . uw\ldots + \Delta w . uv\ldots + \omega,$$

ou bien, en divisant par Δx,

$$(3) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} vw\ldots + \frac{\Delta v}{\Delta x} uw\ldots + \frac{\omega}{\Delta x}.$$

Or, si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, ... auront

pour limites y', u', ... Quant à $\frac{\omega}{\Delta x}$, il se compose de termes de la forme $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}\alpha$, dans lesquels α est un produit qui contient au moins un des facteurs Δu, Δv, ...; si nous supposons donc qu'aucune des dérivées u', v', ... ne soit infinie, $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ n'augmentera pas indéfiniment ; d'un autre côté, α aura pour limite zéro, et par suite ω aussi ; donc, si l'on suppose les facteurs u, v, w, ... en nombre limité, la formule (3) donnera, pour $\Delta x = 0$,

$$(4)\qquad y' = u'vw\ldots + v'uw\ldots + w'uv\ldots.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Si l'on divise les équations (1) et (4) membre à membre, on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots,$$

relation remarquable et dont on fait un fréquent usage. $\frac{y'}{y}$ est ce que l'on appelle la *dérivée logarithmique* de y ; on peut donc dire que :

La dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques de ses facteurs.

Corollaire II. — a désignant une constante, la dérivée de au sera au', car la dérivée de a est nulle. En effet, Δa est nul, et par suite $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ aussi, quelque petit que soit Δx ; donc la limite de $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ sera zéro. C. Q. F. D.

Remarque. — On a quelquefois besoin de prendre n fois de suite la dérivée d'un produit uv. On peut le faire à l'aide

de la formule suivante, due à Leibnitz,

$$(1)\quad (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)},$$

dans laquelle $C_n^1, C_n^2, \ldots$ représentent les coefficients de la formule du binôme $\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots$, et dans laquelle $u^{(i)}$ désigne en général la dérivée $i^{\text{ième}}$ de u.

Pour démontrer cette formule, il suffit d'observer que l'on a

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

et par suite, en prenant encore la dérivée,

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

La formule (1) a donc lieu pour $n = 1, n = 2, \ldots$. Admettons qu'elle ait lieu pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée, démontrons qu'elle a encore lieu pour la $(n+1)^{\text{ième}}$, et, comme elle a lieu pour $n = 2$, elle aura lieu pour $n = 3, n = 4, \ldots$; elle sera alors générale. Si nous prenons la dérivée des deux membres de (1), nous trouvons

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + (C_n^1 + 1)u^{(n)}v' + (C_n^2 + C_n^1)u^{(n-1)}v'' + \ldots.$$

Or, par un théorème connu, on a (p. 13)

$$C_n^1 + 1 = C_{n+1}^1, \quad C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2, \quad \ldots;$$

donc

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + C_{n+1}^1 u^{(n)}v' + C_{n+1}^2 u^{(n-1)}v'' + \ldots.$$

Cette formule n'est autre que (1), où l'on a remplacé n par $(n+1)$; donc enfin la formule (1) a lieu quel que soit n. C. Q. F. D.

THÉORÈME III. — *La dérivée d'un quotient est égale au résultat obtenu en divisant par le carré du diviseur la dérivée du dividende multipliée par le diviseur, dimi-*

nuée de la dérivée du diviseur multipliée par le dividende.

En effet, soit

$$(1) \qquad y = \frac{u}{v}$$

le quotient des deux fonctions u et v de x. Changeons x en $x + \Delta x$; u, v, y deviendront $u + \Delta u$, $v + \Delta v, y + \Delta y$ et l'on aura

$$(2) \qquad y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Des équations (1) et (2) on tire

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v},$$

c'est-à-dire

$$\Delta y = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \Delta v}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, il vient alors, en observant que $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}$ ont pour limites y', u', v',

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — La dérivée de $\frac{1}{v}$ s'obtiendra en faisant $u = 1$ dans la formule précédente, et par suite $u' = 0$. On a alors

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

III. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE FONCTIONS ET DES FONCTIONS COMPOSÉES.

Soient v une fonction de x, w une fonction de v, y une fonction de w; y sera ce que l'on appelle une ***fonction de fonction*** de x.

Théorème I. — ***La dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions dont elle est formée.***

En effet, soit y une fonction de w, w une fonction de v, v une fonction de x. Changeons x en $x + \Delta x$; y deviendra $y + \Delta y$, w deviendra $w + \Delta w$, v deviendra $v + \Delta v$, et l'on aura identiquement

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta w}\,\frac{\Delta w}{\Delta v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ aura pour limite v'. $\frac{\Delta w}{\Delta v}$ est le rapport de l'accroissement de w à l'accroissement correspondant de v; sa limite est donc la dérivée de w prise en considérant w uniquement comme fonction de v et non comme fonction de x : nous désignerons cette dérivée par w'_v pour ne pas la confondre avec w', qui est la dérivée de w considérée comme fonction de x. De même $\frac{\Delta y}{\Delta w}$ aura pour limite y'_w, dérivée de y prise en considérant y uniquement comme fonction de w. La formule (1) peut alors s'écrire

$$(2) \qquad y' = y'_w w'_v v',$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque I. — Nous avons tacitement supposé le nombre des fonctions intermédiaires w et v limité; en effet, en passant aux limites dans la formule (1), nous nous sommes appuyés sur ce principe que la limite d'un produit était égale au produit des limites de ses facteurs : ce principe n'est pas applicable aux produits composés d'un nombre illimité de facteurs.

Remarque II. — Il ne faut pas confondre les expressions y'_w et y'; elles sont, comme on voit, essentiellement différentes et liées entre elles par la relation (2).

Soient $u, v, w, \ldots$ des fonctions de x, et $f(u, v, w, \ldots)$ une fonction de $u, v, w, \ldots$; f sera par rapport *à* x ce que l'on appelle une *fonction composée*.

Théorème II. — *La dérivée d'une fonction composée est égale à la somme de ses dérivées prises par rapport à chaque fonction dont elle est composée, respectivement multipliées par les dérivées de ces fonctions elles-mêmes.*

En effet, considérons la fonction $f(u, v, w)$, u, v, w désignant ici des fonctions de x; on aura

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u,v,w)}{\Delta x},$$

Δu, Δv, Δw, Δf désignant, comme plus haut, les accroissements de u, v, w, f correspondant à l'accroissement Δx de x. Or on peut écrire comme il suit l'équation précédente :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x}=&\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)}{\Delta x}\\ &+\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)-f(u+\Delta u, v, w)}{\Delta x}\\ &+\frac{f(u+\Delta u, v, w)-f(u, v, w)}{\Delta x}. \end{aligned}\right.$$

Or la première partie du second membre de cette équation

$$(2)\quad \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)}{\Delta x}$$

est l'accroissement que prend $f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)$ quand on change w en $w+\Delta w$. Or, en appliquant ici la formule

$$(\alpha)\qquad f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$$

démontrée (p. 164), nous pouvons écrire ainsi la quantité (2),

$$(3)\qquad f'_w(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\theta\Delta w)\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

où θ désigne un nombre compris entre zéro et 1. Pour bien comprendre cette formule, il faut voir dans la notation f'_w une dérivée prise *par rapport à* w, comme si $u+\Delta u$ et $v+\Delta v$ étaient des constantes; et en effet, dans l'application de la formule (α), on ne suppose pas que la fonction $f(x)$ ne contient pas d'autres variables que l'on pourra ultérieurement regarder comme fonctions de x, et la dérivée qui y entre n'est relative qu'à la quantité recevant l'accroissement h. Ainsi f'_w, pour nous résumer, représente une dérivée prise comme si $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ étaient indépendants de w; la variable est w, et on la remplace par $w+\theta\Delta w$. En mettant le second et le troisième terme de (1) sous une forme analogue à (3), on aura

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'_w(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\theta\Delta w)\frac{\Delta w}{\Delta x}$$
$$+f'_v(u+\Delta u, v+\theta_1 v, w)\frac{\Delta v}{\Delta x}+f'_u(u+\theta_2\Delta u, v, w)\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

θ_1 et θ_2 désignant comme θ des nombres compris entre zéro et 1. Si alors on suppose que x décroisse indéfiniment, Δu, Δv, Δw tendant vers zéro et $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ vers les limites

w', v', u', il vient, en supposant les fonctions f'_u, f'_v, f'_w continues par rapport à u, v, w,

$$f'_x = f'_w(u,v,w)w' + f'_v(u,v,w)v' + f'_u(u,v,w)u'.$$

Telle est la formule qui fait connaître la dérivée d'une fonction composée; f'_u, rappelons-le, est la dérivée de $f(u,v,w)$ prise en supposant v et w constants et u seul variable (*voir* une application au § VIII).

IV. — THÉORÈME DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

La fonction $f(x,y,z)$ de plusieurs variables est dite *homogène et de degré m* quand elle satisfait, quel que soit k, à la relation

$$(1) \qquad f(kx, ky, kz) = k^m f(x,y,z).$$

Ainsi x^2+y^2 est homogène et du second degré, etc. Si nous prenons les dérivées des deux membres de (1) par rapport à k, nous aurons, en appliquant le théorème démontré au paragraphe précédent,

$$(2) \qquad f'_{kx}x + f'_{ky}y + f'_{kz}z = mk^{m-1}f(x,y,z),$$

qui devient, pour $k=1$,

$$(3) \qquad xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf.$$

En prenant encore la dérivée de (2) par rapport à k et en faisant $k=1$, on trouve (*voir* § XII)

$$x^2 f''_{x^2} + 2yzf''_{yz} + \ldots = m(m-1)f(x,y,z).$$

Nous laissons au lecteur le soin de développer cette démonstration très-facile et de la généraliser.

C'est dans la formule (3) que consiste le théorème des fonctions homogènes, dont l'utilité se manifestera plus loin en Algèbre et dans toute la Géométrie analytique.

V. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS IMPLICITES.

Lorsqu'une fonction est définie comme solution d'une ou de plusieurs équations dans lesquelles entre la variable, on dit qu'elle est implicite; elle est explicite dans le cas contraire.

Ainsi y, défini par l'équation

$$x^2+y^2=1,$$

est *implicite;* si l'on tire de là

$$y=\pm\sqrt{1-x^2},$$

y devient *explicite*.

Nous allons trouver la dérivée d'une fonction implicite, mais nous ferons l'hypothèse que cette dérivée *existe,* en nous réservant de prouver plus loin l'existence de cette dérivée pour un grand nombre de cas.

1° Considérons d'abord la fonction y définie par la seule équation

$$f(x,y)=0.$$

Cette équation étant une véritable identité quand y y est censé remplacé par sa valeur en x, ce que nous supposerons, $f(x,y)$ est identiquement nul; sa dérivée est donc nulle, et, *en supposant que y' existe,* la règle des fonctions composées, démontrée § III, donnera

$$(1) \qquad f'_x+y'f'_y=0,$$

d'où l'on tire

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Pour bien comprendre comment on a obtenu l'équation (1),

il faut remarquer que $f(x,y)$ est une fonction composée de x, composée des deux fonctions x et y. Sa dérivée se composera donc de la dérivée f'_x multipliée par x', qui est 1, et de la dérivée f'_y multipliée par y'.

2° Si y était donné par deux équations telles que

$$\varphi(x,y,z)=0, \quad \psi(x,y,z)=0,$$

on prendrait les dérivées de ces deux équations en appliquant toujours la règle des fonctions composées, et l'on aurait

$$\varphi'_x+\varphi'_y y'+\varphi'_z z'=0,$$
$$\psi'_x+\psi'_y y'+\psi'_z z'=0.$$

On aurait ainsi deux équations permettant de calculer y' et z'. Il n'est pas nécessaire de montrer comment on obtiendrait la dérivée de y s'il était défini par un plus grand nombre d'équations.

VI. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS SIMPLES.

Dérivée de a^x. — Posons

$$y=a^x;$$

en changeant x en $x+\Delta x$, y devient $y+\Delta y$, et l'on a

$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x},$$

d'où l'on tire

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x$$

ou bien

$$\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1).$$

On tire de là

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Si, dans cette formule, on vient à poser

$$a^{\Delta x} = 1 + \alpha \quad \text{ou} \quad \Delta x = \frac{\log(1+\alpha)}{\log a},$$

elle devient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \log a}{\log(1+\alpha)}\,\alpha$$

ou bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \log a}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Si l'on fait alors tendre Δx vers zéro, α tend vers zéro, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers e, et par conséquent on a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = a^x \log a.$$

Remarque. — La dérivée de a^x étant $a^x \log a$, celle de e^x est e^x.

Dérivée de $\log x$. — En posant

$$y = \log x,$$

on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}},$$

ou enfin

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}};$$

si l'on fait alors tendre Δx vers zéro, la limite de

$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}$ sera $e^{\frac{1}{x}}$, et l'on aura

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \log e^{\frac{1}{x}}$$

ou bien

$$y' = \frac{1}{x} \log e.$$

Si le logarithme est un logarithme népérien, on aura simplement

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Dérivée de x^m. — Si m est entier et positif, la dérivée de x^m est la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$$

ou bien

$$mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} \Delta x + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$mx^{m-1}.$$

Si m est négatif, mais entier, on posera $x^m = x^{-n} = 1 : x^n$ et la règle de la page 169 (l. 25) donnera $-nx^{-n-1} = mx^{m-1}$.

Si m n'est pas entier, il faut supposer x positif, soit :

$$y = x^m,$$

d'où

$$\log y = m \log x;$$

si l'on donne à x l'accroissement infiniment petit Δx, la fonction x^m étant continue, y prendra l'accroissement infiniment petit Δy, et l'on aura

$$\frac{\Delta \log y}{\Delta x} = \frac{m \Delta \log x}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \log y}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \frac{\Delta \log x}{\Delta x}$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,\frac{\Delta \log x}{\Delta x} : \frac{\Delta \log y}{\Delta y};$$

si l'on fait tendre Δx vers zéro, on a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad y' = m(\log x)'_x : (\log y)'_y = \frac{m}{x}\,y = mx^{m-1},$$

comme dans le cas où m est entier et positif.

Corollaire I. — La dérivée de $\sqrt[m]{x}$ est égale à celle de $x^{\frac{1}{m}}$, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{m}\,x^{\frac{1}{m}-1}$ ou à $\frac{1}{m}\sqrt[m]{\frac{1}{x^{m-1}}}$.

Corollaire II. — En particulier, la dérivée de $\sqrt{x}$ sera $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Corollaire III. — Si u désigne une fonction de x, la dérivée de u^m s'obtiendra en prenant la dérivée de u^m par rapport à u, ce qui donnera mu^{m-1}, et en la multipliant par la dérivée u' de u, en sorte que (p. 171)

$$(u^m)' = mu^{m-1}u'.$$

Corollaire IV. — La dérivée de $u^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{u}$ est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

VII. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Dérivée du sinus. — Posons

$$y = \sin x;$$

on a, d'après la définition même de la dérivée,

$$y' = \lim \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x},$$

c'est-à-dire

$$y' = \lim \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)}{\Delta x}$$

ou

$$y' = \lim \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) \right];$$

mais, si l'on observe que le rapport du sinus à l'arc a pour limite l'unité quand l'arc tend vers zéro, l'équation précédente devient, pour $\Delta x = 0$,

$$y' = \cos x.$$

Dérivée du cosinus. — La dérivée de $\cos x$ se trouve de la même manière que celle de $\sin x$; cependant on peut y arriver plus simplement en observant que

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est une fonction de fonction. Pour obtenir sa dérivée par rapport à x, il faut d'abord la prendre par rapport à $\frac{\pi}{2} - x$, ce qui donne $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ou $\sin x$, puis multiplier ce résultat par la dérivée de la somme $\frac{\pi}{2} - x$, qui est -1; on a donc

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Dérivée de la tangente. — On a

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

et, par conséquent, pour trouver la dérivée de $\tang x$, il faut prendre la dérivée d'un quotient; en appliquant la règle donnée (p. 169), on trouve

$$(\tang x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x},$$

c'est-à-dire

$$(\tang x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dérivée de la cotangente, etc. — On trouve ainsi

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\text{séc}\, x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$(\text{coséc}\, x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dérivée de $\arcsin x$. — Si l'on pose

$$y = \arcsin x,$$

on en déduit

$$(1) \qquad \sin y = x;$$

si l'on prend les dérivées par rapport à x des deux membres de cette équation, il vient, en observant que $\sin y$ est une fonction de fonction,

$$y' \cos y = 1$$

ou bien

$$y' = \frac{1}{\cos y},$$

et, en remplaçant $\cos y$ par sa valeur tirée de (1),

$$y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

le signe + convient au cas où $\cos y$ est positif et le signe — au cas où il est négatif, ce qui revient à dire que l'on aura

$$y' = + \text{ ou } - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

suivant que y sera compris entre $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, ou entre $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}$ et $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$.

Cette démonstration suppose que l'on sait à l'avance que y a une dérivée ou que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite, mais ce fait est évident, puisque $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a une limite qui est la dérivée $x'_y = \cos y$.

Dérivée de $\arccos x$. — On peut poser

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

on déduit de là que les dérivées de $\arcsin x$ et $\arccos x$ sont égales et de signes contraires.

Dérivée de $\operatorname{arc tang} x$. — Si l'on pose

$$y = \operatorname{arc tang} x,$$

on a

$$\operatorname{tang} y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de cette équation,

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1,$$

d'où l'on tire

$$y' = \cos^2 y,$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

VIII. — APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS.

Nous pouvons maintenant prendre les dérivées de toutes les fonctions qui sont jusqu'ici entrées dans nos calculs; nous allons le montrer sur quelques exemples.

Dérivée de x^x. — La fonction x^x est composée; pour bien le comprendre, considérons la fonction u^v, u et v désignant deux fonctions de x. Cette dernière expression est de la forme $f(u, v)$; sa dérivée sera donc de la forme

$$f'_u u'_x + f'_v v'_x,$$

c'est-à-dire

$$vu^{v-1}u' + u^v \log u v';$$

si l'on prend $u = v = x$, on a la dérivée de x^x, qui est ainsi

$$x^x(1 + \log x).$$

Dérivée de $\operatorname{arc\,tang} \frac{a+x}{1-ax}$. — Cette expression est une fonction de fonction; pour en obtenir la dérivée, il faut regarder $\frac{a+x}{1-ax}$ comme seule variable, prendre la dérivée dans cette hypothèse, ce qui donne

$$1 : \left[1 + \left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2\right],$$

et multiplier le résultat par la dérivée de $\frac{a+x}{1-ax}$, qui est

$$\frac{1 - ax + a(a+x)}{(1-ax)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1+a^2}{(1-ax)^2};$$

on obtient alors

$$\frac{1+a^2}{(1-ax)^2}:\left[1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2\right]$$

ou bien

$$\frac{1+a^2}{1+a^2+x^2+a^2x^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+x^2},$$

résultat auquel on aurait pu arriver immédiatement en observant que

$$\text{arc tang}\,\frac{a+x}{1-ax}=\text{arc tang}\,a+\text{arc tang}\,x.$$

Dérivée de $\log(x+\sqrt{1+x^2})$. — Cette fonction peut être considérée comme fonction de fonction; en regardant $x+\sqrt{1+x^2}$ comme variable, la dérivée de cette fonction est

$$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Mais, comme x est la variable, il faut multiplier cette quantité par la dérivée de $x+\sqrt{1+x^2}$, c'est-à-dire par $1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, ce qui donne

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

IX. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE VARIABLE IMAGINAIRE.

Si l'on appelle fonction de $x+y\sqrt{-1}$ toute expression de la forme $X+Y\sqrt{-1}$, où X et Y sont fonctions de x et y,

une fonction de x et y n'aura pas en général de dérivée, et l'on ne considère en Analyse que les fonctions admettant une dérivée. Pour faire comprendre cette espèce de paradoxe, observons que la dérivée de $X + Y\sqrt{-1}$ est la limite de

$$(1) \qquad \frac{\Delta X + \Delta Y\sqrt{-1}}{\Delta x + \Delta y\sqrt{-1}}$$

quand x et y tendent vers zéro. Or Δy et Δx peuvent tendre vers zéro en suivant des lois très diverses. De là une infinité de limites différentes pour le rapport considéré. Supposons, pour fixer les idées, x et y fonctions d'une variable t, qui pourra être x si l'on veut; le rapport (1) pourra s'écrire

$$\left(\frac{\Delta X}{\Delta t} + \frac{\Delta Y}{\Delta t}\sqrt{-1}\right) : \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\sqrt{-1}\right),$$

ou, en passant aux limites,

$$(2) \qquad \frac{X'_t + Y'_t\sqrt{-1}}{x'_t + y'_t\sqrt{-1}} = \frac{X'_x x'_t + X'_y y'_t + \sqrt{-1}\,(Y'_x x'_t + Y'_y y'_t)}{x'_t + y'_t\sqrt{-1}}.$$

La dérivée que nous trouvons ainsi dépend, comme l'on voit, du rapport $\frac{x'_t}{y'_t}$, et, pour qu'elle soit indépendante de ce rapport, en d'autres termes, pour que la dérivée de $X + Y\sqrt{-1}$ ne dépende pas du mode de variation de x et de y, il faut que les coefficients de x'_t et y'_t dans les deux termes de la fraction (2) soient proportionnels, ce qui donne

$$\frac{X'_x + \sqrt{-1}\,Y'_x}{1} = \frac{X'_y + \sqrt{-1}\,Y'_y}{\sqrt{-1}},$$

ou bien, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$X_x = Y'_y, \quad X'_y = -Y'_x.$$

Ces relations ne seront pas, en général, satisfaites quand on prendra X et Y au hasard.

Quoi qu'il en soit, parmi les règles que nous avons données pour prendre la dérivée d'une fonction, il en est qui ne supposent pas la variable réelle; telles sont les règles relatives aux sommes, aux produits, aux quotients, aux fonctions de fonctions et aux fonctions entières. La règle des fonctions composées peut se généraliser ainsi :

Soit $f(u, v)$ une fonction composée de $x+y\sqrt{-1}$. Si u et v ont une dérivée unique et si de plus f'_u et f'_v sont bien déterminés, on supposera x et y fonctions de t, et l'on aura pour dérivée de f l'expression $\dfrac{f'_t}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}$, où la variable t est réelle. On a ainsi

$$\frac{f'_u u'_t + f'_v v'_t}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}.$$

Mais $\dfrac{u'_t}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}$ est la dérivée u' de u relative à $x+y\sqrt{-1}$; donc la dérivée cherchée de f est bien $f'_u u' + f'_v v'$ comme quand la variable est réelle.

La dérivée de $e^{x+y\sqrt{-1}}$ s'obtient en observant que cette fonction est égale à $e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$. Supposons y et x fonctions de t et prenons la dérivée; nous aurons

$$\begin{aligned}
&e^x x'(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)+e^x(-\sin y+\sqrt{-1}\cos y)y' \\
&\quad = e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)(x'+y'\sqrt{-1}) \\
&\quad = e^{x+y\sqrt{-1}}(x'+y'\sqrt{-1}).
\end{aligned}$$

En divisant par $x'+y'\sqrt{-1}$, on trouve la dérivée unique $e^{x+y\sqrt{-1}}$; la dérivée de $\log(x+y\sqrt{-1})$ s'en déduit facilement, et l'on reconnaît qu'elle est $\dfrac{1}{x+y\sqrt{-1}}$.

Il reste à montrer que la dérivée de $\sin x$ est toujours $\cos x$. On a

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

on en conclut

$$(\sin x)' = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x.$$

On verrait de même que la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$ (*).

X. — PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

Théorème I. — *Toute fonction $f(x)$ réelle et continue entre les limites $x = a$ et $x = b$ de sa variable passe forcément au moins une fois par la valeur u comprise entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ qu'elle prend pour les valeurs a et b de sa variable, et, en particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation*

$$f(x) = 0$$

admet au moins une racine comprise entre a et b.

Ce théorème a déjà été démontré à la page 30 de ce volume.

Théorème II. — 1° *Une fonction réelle et continue dont la dérivée est positive croît avec sa variable*; 2° *une fonc-*

(*) On ne fait pas généralement dans les Cours les remarques que nous venons de faire, et cependant on ne se gêne en aucune façon, en Géométrie analytique, pour prendre des dérivées quand la variable est imaginaire; on a bien soin, il est vrai, de ne pas attirer l'attention de l'élève sur ce que la variable peut ne pas être réelle, et voilà comment l'étude des Mathématiques, qui devrait servir à rendre l'esprit juste, peut contribuer à *fausser le jugement.*

tion réelle et continue dont la dérivée est négative décroît lorsque sa variable croît.

En effet, considérons la fonction réelle $f(x)$; supposons $f'(x)$ positif entre les limites a et b de la variable x; on aura en général (p. 165)

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro avec h. Or, supposons x et $x+h$ compris entre les limites a et b; ε, ayant pour limite zéro, pourra être pris moindre en valeur absolue que $f'(x)$. Si donc nous supposons l'accroissement h positif, le second membre de la formule précédente sera de même signe que $f'(x)$; donc enfin

$$f(x+h)-f(x)$$

sera de même signe que $f'(x)$, ce qui revient à dire que $f(x)$ croît avec x quand sa dérivée est positive et décroît quand x croît dans le cas contraire. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Une fonction $f(x)$ réelle et continue passe ordinairement par un maximum ou un minimum lorsque sa dérivée s'annule.*

En effet, supposons la fonction $f(x)$ continue ainsi que ses dérivées pour $x=a$; si l'on a $f'(a)=0$, trois cas peuvent se présenter :

1° $f'(x)$, en s'annulant pour $x=a$, passe du négatif au positif; cette fonction est donc croissante; donc sa dérivée $f''(x)$ doit être positive ou nulle pour $x=a$, car, si elle était négative, $f'(x)$ décroîtrait en faisant croître x (théorème II). Mais $f'(x)$ ayant changé de signe pour $x=a$, en passant du négatif au positif, $f(x)$ a dû être décroissante pour les valeurs de x moindres que a et croissante

pour les valeurs de x plus grandes que a; elle a donc dû passer par un minimum pour $x = a$.

2° Si $f'(x)$, en s'annulant, passe du positif au négatif, cette fonction est décroissante, et, par suite, sa dérivée $f''(x)$ est négative ou nulle pour $x = a$; en second lieu, $f'(x)$ passant du positif au négatif, $f(x)$ passe, pour $x=a$, d'une période croissante à une période décroissante, c'est-à-dire que $f(a)$ est un maximum de $f(x)$.

3° Si $f'(x)$ ne change pas de signe en s'annulant, cette fonction croît pour décroître ensuite ou décroît pour croître ensuite lorsque x passe par la valeur a; donc alors $f''(x)$ doit changer de signe pour $x = a$; donc enfin, dans ce cas, $f''(a)$ est nul.

Ainsi, en résumé, si l'on a $f'(a) = 0$ et

$$f''(a) > 0, f(a) \text{ est un minimum de } f(x),$$
$$f''(a) < 0, f(a) \text{ est un maximum de } f(x).$$

Lorsque $f'(a)$ et $f''(a)$ sont nuls à la fois, trois cas peuvent se présenter comme tout à l'heure :

1° Si $f''(x)$ passe du positif au négatif, cette fonction décroît, et alors $f'''(a)$ est nul ou négatif; mais dans ce cas $f'(a)$ est un maximum de $f'(x)$, et $f(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum; 2° si $f''(x)$ passe du négatif au positif, $f'''(a)$ est nul ou positif, $f'(a)$ est un minimum de $f'(x)$ et $f(a)$ n'est ni maximum ni minimum; 3° si $f''(x)$ conserve le même signe en s'annulant, $f'(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum, et il peut arriver que $f(a)$ soit maximum ou minimum.

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion; on voit que

$$(1) \qquad f'(x) = 0$$

fournira *des* valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou

minimum toutes les fois que $f''(x)$ ne s'annulera pas en même temps que $f(x)$; je dis *des* valeurs, parce qu'il ne suffit pas de résoudre l'équation (1) pour en déduire tous les maxima ou minima de $f(x)$.

XI. — THÉORÈME DE TAYLOR.

Considérons un polynôme entier

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Si l'on change x en $x + h$, on a

$$F(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n,$$

et, en développant chaque parenthèse par la formule du binôme, puis en ordonnant par rapport à h,

$$\begin{aligned} F(x+h) = & \, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \\ & + \frac{h}{1}(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}) \\ & + \frac{h^2}{1.2}[1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} 1.2.3\ldots n a_n. \end{aligned}$$

Dans cette formule, le terme indépendant de h est $F(x)$, le coefficient de $\frac{h}{1}$ est $F'(x)$, le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ est la dérivée de $F'(x)$, que l'on désigne par $F''(x)$, et ainsi de suite. On peut donc écrire la formule

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F^n(x),$$

qui fait connaître l'accroissement $F(x+h) - F(x)$ d'une

fonction entière, correspondant à l'accroissement h de sa variable.

Nous allons essayer de généraliser cette formule; à cet effet, désignons par Ph^i le terme qu'il faudrait ajouter au second membre pour qu'elle devînt exacte lorsque la fonction $F(z)$ cesse d'être entière. Le terme additionnel pourra toujours être mis sous la forme que nous lui avons assignée Ph^i, i désignant un entier, si nous supposons tous les termes de la formule précédente finis. Nous poserons donc

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x+h)-F(x)-\frac{h}{1}F'(x)-\frac{h^2}{1.2}F''(x)-\ldots\\ &\qquad -\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x)-h^iP=0 \end{aligned}\right.$$

Cette formule est une identité : en d'autres termes, P a la valeur que l'on en déduirait en résolvant cette équation comme si P était une inconnue entrant au premier degré. Nous supposerons que la fonction $F(z)$ reste finie et continue, ainsi que ses n premières dérivées, quand z varie de x à $x+h$; quant à la dérivée $F^{n+1}(z)$, nous supposerons simplement qu'elle existe et qu'elle ait entre les limites en question une valeur *unique*. Alors la fonction suivante, où l'on a fait $X=x+h$,

$$\begin{aligned} \varphi(z)=F(X)-F(z)-\frac{X-z}{1}F'(z)&\\ -\frac{(X-z)^2}{1.2}F''(z)-\ldots-\frac{(X-z)^n}{1.2.3\ldots n}F^n(z)-(X-z)^iP&, \end{aligned}$$

sera finie et continue entre les limites $z=x$ et

$$z=x+h=X;$$

sa dérivée n'aura qu'une valeur bien déterminée. Or $\varphi(X)=0$, et, si l'on suppose $X=x+h$, $\varphi(x)$ sera nul en vertu de l'équation (1).

Donc, en vertu du théorème II, démontré à la page 163, la dérivée de $\varphi(z)$ doit s'annuler pour une valeur de z comprise entre x et $x+h$, valeur que l'on peut représenter par $x+\theta h$, θ étant compris entre zéro et 1. Or la dérivée de $\varphi(z)$ est donnée, réductions faites, par la formule

$$\varphi'(z) = -\frac{(X-z)^n}{1.2.3\ldots n} F^{n+1}(z) + i(X-z)^{i-1}P.$$

Si l'on y fait $z = x+\theta h$, on a, d'après la remarque précédente,

$$0 = -\frac{(X-x-\theta h)^n}{1.2.3\ldots n} F^{n+1}(x+\theta h) + i(X-x-\theta h)^{i-1}P,$$

d'où l'on tire la valeur de P suivante, dans laquelle on a remplacé X par $x+h$,

$$P = \frac{h^{n-i+1}(1-\theta)^{n-i+1}}{i.1.2.3\ldots n} F^{n+1}(x+\theta h);$$

si l'on porte cette valeur de P dans la formule (1), il vient, en faisant passer dans le second membre tous les termes négatifs,

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x) + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-i+1}}{i.1.2.3\ldots n} F^{n+1}(x+\theta h).$$

Le dernier terme porte le nom de *reste*; on lui attribue généralement deux formes : l'une correspond à $i = n+1$; elle conduit à la formule suivante, due à Lagrange et indiquée par d'Alembert :

$$(2) \quad \begin{cases} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} F^{n+1}(x+\theta h). \end{cases}$$

En faisant $i = 1$, on a la formule suivante, due à Cauchy :

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\dots n}F^{n+1}(x+\theta h).$$

La formule (2) est celle dont on fait le plus fréquemment usage ; on peut lui donner une autre forme, très-utile dans les applications, quand $F^{n+1}(x)$ est continue. On a, en effet,

$$F^{n+1}(x+\theta h) = F^{n+1}(x) + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec h, et, par suite, la formule (2) donnera

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}F^{n+1}(x) + \varepsilon h^{n+1},$$

et, pour que cette formule ait lieu, il suffit que $F(x)$ soit continu, ainsi que ses $n+1$ premières dérivées dans le voisinage de x.

XII. — QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

La formule de Taylor permet quelquefois de développer une fonction en série. Si dans la formule (2) du paragraphe précédent le terme complémentaire

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}F^{n+1}(x+\theta h),$$

que nous appellerons le *reste*, tend vers 0 quand n croît indéfiniment, on aura

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \dots,$$

et le second membre de cette formule sera une série convergente.

Ordinairement on suppose $x = 0$ et la formule que l'on applique au développement en série est

$$F(h) = F(0) + \frac{h}{1} F'(0) + \frac{h^2}{1.2} F''(0) + \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} F^{n+1}(\theta h);$$

on lui donne alors le nom de *formule de Maclaurin.*

1° Si l'on suppose $F(\lambda) = \sin h$, on trouve

$$\sin h = \frac{h}{1} - \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{h^5}{5!} - \ldots \pm \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \Theta,$$

Θ désignant un terme de la forme $\sin\theta h$ ou $\cos\theta h$; le terme complémentaire tend donc vers 0 pour $n = \infty$ et l'on a

$$\sin h = \frac{h}{1} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \ldots,$$

2° On trouve de même

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \ldots,$$

3°

$$e^h = 1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots,$$

4° Pour obtenir le développement de $(1+h)^a$, il faut partir de la formule de Cauchy

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} F^n(x)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n F^{n+1}(x),$$

y faire $F(x+h) = (1+h)^a$, $x = 1$, et l'on trouve

$$(1+h)^a = 1 + \frac{a}{1} h + \frac{a(a-1)}{1.2} h^2$$
$$+ \ldots \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} h^n + R$$
$$R = \frac{h^{n+1}}{n!} a(a-1)\ldots(a-n)(1-\theta)^n (1+\theta h)^{a-n+1};$$

on peut écrire

$$R = ah(a-1)h\left(\frac{a}{2}-1\right)h\ldots\left(\frac{a}{n}-1\right)h\left(\frac{1-\theta}{1+\theta h}\right)^n(1+\theta h)^{a+1}.$$

Si l'on suppose h moindre que 1 en valeur absolue, les facteurs ah, $(a-1)h$, ... $\left(\frac{a}{n}-1\right)h$, ont un produit qui pour $n=\infty$ tend vers 0, $\frac{1-\theta}{1+\theta h}$ ne peut être supérieur à l'unité, $(1+\theta h)^a$ reste fini : donc R dans ce cas tend vers 0 et l'on a

$$(1+h)^a = 1 + \frac{a}{1}h + \frac{a(a-1)}{1.2}h^2 + \ldots.$$

C'est la formule du binôme généralisée. Il est inutile d'examiner le cas où $h > 1$ en valeur absolue, car dans cette hypothèse la série qui figure dans l'équation précédente est manifestement divergente (*voir* p. 125).

5° L'application de la même formule à la fonction $\log(1+h)$ donne

$$\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \ldots,$$

le reste est un peu plus simple; les facteurs $\frac{a}{n} - 1$ qui figurent dans l'expression précédente sont remplacés par l'unité.

XIII. — EXTENSION AU CAS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Théorème. — *Soient $f(x,y)$ une fonction de x et de y, f'_x sa dérivée prise en regardant x comme seule variable et y comme une constante, f'_y sa dérivée prise par rapport à y en regardant x comme une constante; soient f''_{x^2} la dérivée prise par rapport à x de f'_x, f''_{xy} la dérivée de f'_x prise par rapport à y, f''_{yx} la dérivée de f'_y prise par rapport à x et f''_{y^2} la dérivée de f'_y par rapport à y; on a*

$$f'_{xy} = f'_{yx}.$$

En effet, on a, par le théorème de Taylor,

$$(1)\quad \begin{cases} f(x+h,y)=f(x,y)+hf'_x(x,y) \\ \qquad\qquad + \dfrac{h^2}{1.2}f''_{x^2}(x,y)+h^2\varepsilon, \end{cases}$$

et ceci suppose simplement $f(x,y)$ continu dans le voisinage de x et y, ainsi que ses dérivées premières et secondes prises par rapport à x; s'il en est de même des dérivées prises par rapport à x et y ou par rapport à y deux fois, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} f(x,y+k)=f(x,y)+kf'_y(x,y)+\dfrac{k^2}{1.2}f''_{y^2}+k^2\alpha, \\ f'_x(x,y+k)=f'_x(x,y)+kf''_{xy}+k\beta, \\ f''_{x^2}(x,y+k)=f''_{x^2}(x,y)+\gamma, \end{cases}$$

ε, α, β, γ désignant des quantités qui tendent vers zéro quand h et k tendent vers zéro. Si dans la formule (1) on change y en $y+k$, elle devient

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+hf'_x(x,y+k) \\ + \frac{h^2}{1.2}f''_{x^2}(x,y+k)+h^2\varepsilon_1,$$

ε_1 jouissant toujours de la propriété de tendre vers zéro pour h et $k=0$; en vertu des formules (2), cette dernière s'écrit

$$(3)\quad \begin{cases} f(x+h,y+k)=f+(hf'_x+kf'_y) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(h^2f''_{x^2}+2hkf''_{xy}+k^2f''_{y^2})+\Omega, \end{cases}$$

Ω désignant un polynôme du deuxième degré en h et k, dont les coefficients α, β, γ, ε deviennent nuls pour $h=0$, $k=0$, et qui, par suite, tend vers zéro lors même qu'on

l'a divisé par hk, pourvu que le rapport $\frac{k}{h}$ reste fini. Or, on aurait trouvé de la même façon, en permutant l'ordre des opérations relatives à h et k,

$$f(x+h, y+k) = f + (hf'_x + kf'_y) + \frac{1}{2}(h^2 f''_{x^2} + 2hkf''_{yx} + k^2 f''_{y^2}) + \Omega_1,$$

Ω_1 étant un polynôme de même espèce que Ω.

Comparant cette formule avec (3), on a

$$\frac{hk}{2} f''_{xy} + \Omega = \frac{hk}{2} f''_{yx} + \Omega_1$$

ou bien

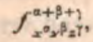
$$f''_{xy} = f''_{yx} + 2\frac{\Omega_1 - \Omega}{hk}.$$

D'après ce que nous avons dit de Ω et Ω_1, si h tend vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ restant arbitraire, mais fini, il vient à la limite

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

On peut donc intervertir l'ordre de deux dérivations successives sans changer le résultat des opérations; mais ceci suppose la continuité des dérivées auxquelles on parvient et de toutes celles qui précèdent ou qui sont de même ordre. Si l'on avait plusieurs dérivées successives à prendre par rapport aux mêmes variables x, y, ou même à des variables différentes z, t, u, ..., on pourrait intervertir l'ordre des opérations. La démonstration de cette proposition est calquée sur celle que l'on donne en Arithmétique pour prouver qu'un produit est indépendant de l'ordre de ses facteurs.

Ceci justifie la notation



$$f^{\alpha+\beta+\gamma}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma},$$

pour désigner le résultat obtenu en prenant la dérivée de f un nombre de fois égal à $\alpha + \beta + \gamma$, à savoir α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z.

Théorème de Taylor. — Considérons une fonction de plusieurs variables, $f(x, y)$ par exemple; la fonction

$$f(x + ht, y + kt)$$

pourra être considérée comme une fonction de la seule variable t, que nous appellerons pour un moment $\varphi(t)$. La formule de Taylor, appliquée à la fonction $\varphi(t)$, donne

$$\varphi(\omega + t) = \varphi(\omega) + t\varphi'(\omega) + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(\omega) + \varepsilon t^{n+1},$$

et, pour $\omega = 0$,

$$(1) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(0) + \varepsilon_1 t^{n+1},$$

ε et ε_1 désignant des nombres finis pour $t = 0$ et que nous avons appris à écrire sous diverses formes.

Calculons $\varphi'(\omega)$, $\varphi''(\omega)$, ...; nous avons

$$\varphi(\omega) = f(x + h\omega, y + k\omega),$$

d'où, par le théorème des fonctions composées (p. 172),

$$\varphi'(\omega) = f'_x h + f'_y k,$$

où nous écrivons x et y en indice au lieu de $x + h\omega$ et $y + k\omega$, uniquement en vue de simplifier l'écriture. Soit en général à prendre la dérivée par rapport à ω de $G f^{\alpha+\beta}_{x^\alpha y^\beta}$, G désignant un facteur indépendant de ω; le résultat sera

$$G\left(f^{\alpha+\beta+1}_{x^{\alpha+1} y^\beta} h + f^{\alpha+\beta+1}_{x^\alpha y^{\beta+1}} k\right),$$

c'est-à-dire le même que si l'on avait multiplié le terme

primitif par $f'_x\,h+f'_y\,k$ et traité les indices comme des facteurs de la lettre f; on aura donc symboliquement et en corrigeant les résultats, comme nous l'avons dit,

$$\varphi''(\omega)=(f'_x\,h+f'_y\,k)^2,$$

et en général

$$\varphi^n(\omega)=(f'_x\,h+f'_y\,k)^n.$$

Si l'on fait $\omega=0$, le second membre de cette formule ne change pas, car nous avons écrit x au lieu de $x+\omega h,\ldots,$ et l'on a

$$\varphi^n(0)=(f'_x\,h+f'_y\,k)^n,$$

cette fois avec une notation plus régulière, mais en attachant toujours à l'exposant n le même sens que tout à l'heure; on a alors, au lieu de la formule (1), en remplaçant $\varphi(t)$, $\varphi(0)$, ... par leurs valeurs et t par l'unité,

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\sum_1^n\frac{1}{1.2.3\ldots n}(f'_x h+f'_y k)^n+\mathrm{E},$$

E désignant une quantité nulle avec h et k, de la forme

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}(f'_{x+\theta h}\,h+f'_{y+\theta k}\,k)^{n+1},$$

par exemple si les dérivées de l'ordre $n+1$ existent, et qui peut toujours être remplacée par un polynôme de degré n en h et k, dont les coefficients sont nuls pour $h=0$, $k=0$ si les dérivées d'ordre n sont continues ainsi que les précédentes.

Il va sans dire que la formule de Taylor s'applique à un nombre quelconque de variables.

XIV. — SUR LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS IMPLICITES.

Lorsque nous avons démontré la règle qui permet de trouver la dérivée de la fonction y définie par l'équation

(p. 175) $f(x, y) = 0$, nous avons admis que y avait une dérivée; nous allons prouver que :

Si $f(x, y)$ est continue par rapport à x et à y quand x et y varient dans le voisinage des valeurs x_0 et y_0, y_0 désignant une racine de $f(x_0, y) = 0$ telle que dans le voisinage de x_0 cette équation n'ait pas d'autre racine, 1° y est fonction continue de x pour des valeurs de x voisines de x_0, 2° si, en outre, f'_x et f'_y existent et si f'_y n'est pas nul, y aura une dérivée.

Soit k une quantité très petite; on aura

$$f(x_0, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + k f'_y(x_0, y_0 + \theta k).$$

θ étant compris entre 0 et 1, et, comme $f(x_0, y_0) = 0$,

$$(1) \qquad f(x_0, y_0 + k) = k f'_y(x_0, y_0 + \theta k),$$

On aura de même, θ' désignant une quantité comprise entre 0 et 1,

$$(2) \qquad f(x_0, y_0 - k) = -k f'_y(x_0, y_0 - \theta' h).$$

Or, si $f'_y(x_0, y_0)$ n'est pas nul, *ce que nous supposerons*, k étant très petit,

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta k) \quad \text{et} \quad f'_y(x_0, y_0 - \theta' k)$$

seront de même signe; donc, en vertu de (1) et (2), $f(x_0, y_0 + k)$ et $f(x_0, y_0 - k)$ seront de signes contraires. Mais on peut prendre h assez petit pour que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \quad \text{et} \quad f(x_0, y_0 + k)$$

soient de même signe, ainsi que

$$f(x_0 + h, y_0 - k) \quad \text{et} \quad f(x_0, y_0 - k).$$

Mais alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \quad \text{et} \quad f(x_0 + h, y_0 - k)$$

seront de signes contraires; donc, en vertu d'un théorème connu (t. II, p. 30), $f(x_0 + h, y)$ devra passer par zéro pour

une valeur de y comprise entre y_0+k et y_0-k; donc, à un accroissement h de x suffisamment petit correspondra un accroissement aussi petit que l'on voudra de y, qui, par suite, sera continu. Cela posé, on a

$$f(x_0+h, y_0+k)=0 \quad \text{et} \quad f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=0,$$

h et k désignant deux accroissements simultanés et infiniment petits de x et y; en développant le premier membre par la formule du paragraphe précédent, on a

$$hf'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{k}{h}=-\frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{f'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}.$$

Or, quand h tend vers zéro, si f'_y n'est pas nul, on a vu que k tendrait vers zéro; on a donc, en passant aux limites,

$$\lim\frac{k}{h}=y'_0=-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Considérons maintenant une fonction y donnée par deux équations

$$(3) \qquad \varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0,$$

définissant deux fonctions, y et z de x.

En vertu de $\psi=0$, z est une fonction de x et de y, continue par rapport à x comme par rapport à y; si l'on suppose que de cette équation on ait tiré z pour le porter dans $\varphi=0$, cette équation prendra la forme $F(x, y)=0$ et définira une fonction continue y de x, pourvu que F'_y ne soit pas nul. Or

$$F'_y=\varphi'_y+\varphi'_z z'_y.$$

Mais z est donné par la formule $\psi=0$ et z'_y par la formule

$$z'_y=-\frac{\psi'_y}{\psi'_z};$$

on a donc

$$F'=\varphi'_y-\varphi'_z\frac{\psi'_y}{\psi'_z}=\frac{\varphi'_y\psi'_z-\psi'_y\varphi'_z}{\psi'_z}.$$

Donc, pour que F'_y ne soit pas nul, il faut et il suffit que le déterminant $\varphi'_y\psi'_z - \varphi'_z\psi'_y$ soit différent de zéro. S'il en est ainsi, y et z sont fonctions continues de x, et l'on a, en donnant dans (3) à x, y, z les accroissements h, k, l,

$$h\varphi'_x(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l)+k\varphi'_y(\ldots)+l\varphi'_z(\ldots)=0,$$
$$h\psi'_x(x+\theta' h, y+\theta' k, z+\theta' l)+k\psi'_y(\ldots)+l\psi'_z(\ldots)=0,$$

θ et θ' étant compris entre 0 et 1; divisant par h et faisant tendre h vers zéro, on a les équations suivantes pour calculer y' et z',

$$\varphi'_x+y'\varphi'_y+z'\varphi'_z=0,\quad \psi'_x+y'\psi'_y+z'\psi'_z=0,$$

d'où l'on tire

$$y'=\frac{\varphi'_z\psi'_x-\psi'_z\varphi'_x}{\varphi'_y\psi'_z-\varphi'_z\psi'_y},\quad z'=\frac{\psi'_z\varphi'_x-\varphi'_z\psi'_x}{\varphi'_y\psi'_z-\varphi'_z\psi'_y},$$

et ainsi de suite.

XV. — DES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LES FORMES $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, ETC.

Certaines fonctions se présentent pour une valeur particulière de la variable sous la forme $\frac{0}{0}$; cela tient souvent à la présence d'un facteur commun qui entre au numérateur et au dénominateur de la fraction qui constitue la fonction en question, facteur qui s'annule pour la valeur particulière de la variable qui donne à la fonction la forme illusoire $\frac{0}{0}$. Tel est le cas de la fonction $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$. Cette fonction prend la forme $\frac{0}{0}$ quand on suppose $x=a$; mais, comme on peut supprimer aux deux termes le facteur commun $x-a$, on a

$$\lim\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\lim\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}=\frac{3}{2}a.$$

$\frac{3}{2}a$ est ce qu'on appelle la *vraie valeur* de la fonction $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ pour $x=a$. En général, si $f(x)$ se pré-

sente sous une forme illusoire pour $x = a$, on appellera *valeur de* $f(x)$ *pour* $x = a$ et l'on désignera par la notation $f(a)$ la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers a.

La théorie des dérivées fournit un moyen assez général et assez rapide pour trouver la valeur d'une expression qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; il repose sur la formule

$$(1) \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

Pour démontrer cette formule, où θ a la même valeur au numérateur et au dénominateur, on pose

$$(2) \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = k,$$

d'où l'on tire

$$f(a+h) - k\varphi(a+h) - [f(a) - k\varphi(a)] = 0.$$

Si l'on applique à la fonction $f(x) - k\varphi(x)$ la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} f(a+h) - k\varphi(a+h) - [f(a) - k\varphi(a)] \\ = h[f'(a+\theta h) - k\varphi'(a+\theta h)]; \end{aligned}$$

or, le premier membre étant nul en vertu de la formule précédente, on a

$$f'(a+\theta h) - k\varphi'(a+\theta h) = 0,$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

En éliminant k entre cette formule et (2) par comparaison, on obtient la formule (1), qu'il fallait démontrer.

Lorsque $f(a)$ et $\varphi(a)$ sont nuls, la formule (1) devient

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)};$$

si alors on fait tendre h vers zéro, cette formule pourra s'écrire

$$\lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)} \quad \text{pour } h = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad \text{pour } x = a.$$

Donc :

1° Si $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pour $x = a$ a une limite bien connue, si par exemple $f'(a)$ et $\varphi'(a)$ ont des valeurs déterminées, la limite de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sera connue et égale à $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

2° Si, ce qui arrive souvent, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ se présente aussi sous la forme $\frac{0}{0}$, on lui appliquera la règle que l'on vient d'appliquer à $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$, et l'on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{\varphi''(x)};$$

et ainsi de suite.

3° S'il arrive que $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ n'ait pas de limite, parce que $\varphi'(a) = 0$ et que $f'(a) \gtrless 0$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ n'aura pas de limite non plus. Ainsi :

RÈGLE. — *Pour trouver la vraie valeur d'une expression qui se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$, *on peut en général remplacer le numérateur et le dénominateur par leurs dérivées relatives au paramètre variable en vertu duquel la fraction devient* $\frac{0}{0}$.

Cette règle, due à L'Hôpital, n'est pas sans exception. En effet, elle s'appuie sur la formule de Taylor et elle tombera en défaut quand $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne seront pas développables par cette formule pour $x = a$. Ainsi, en particulier, la démonstration ne s'applique pas au cas où $a = \infty$; mais alors, en posant $x = \frac{1}{z}$, on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ (pour } x = \infty) = \lim \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} \text{ (pour } z = 0),$$

et nous rentrerons dans le cas étudié plus haut; d'ailleurs

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)},$$

d'où

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)};$$

la règle démontrée plus haut subsiste donc encore.

Les expressions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ se ramènent immédiatement aux précédentes; si, par exemple,

$f(a) = \infty$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{1 : \varphi(x)}{1 : f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x) : [\varphi(x)]^2}{f'(x) : [f(x)]^2},$$

d'où l'on déduit

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

étant entendu que $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ne soit ni nul ni infini. Supposons donc

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$

on aura

$$\lim \frac{f(x) + k\varphi(x)}{\varphi(x)} = k,$$

k désignant un nombre quelconque; de cette formule on déduira

$$\lim \frac{f'(x) + k\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = k,$$

et par suite

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Enfin, si $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ était infini, $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ serait nul, et l'on aurait

$$\lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0,$$

d'où

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Ainsi, *pour trouver la vraie valeur d'une expression qui se présente sous la forme* $\frac{\infty}{\infty}$, *la règle à suivre est la même que si elle se présentait sous la forme* $\frac{0}{0}$.

Les expressions qui se présentent sous la forme $0 \times \infty$ se ramènent au cas précédent; ainsi, par exemple, si l'on a $f(a) = 0$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim f(x) \times \varphi(x) = \lim \frac{f(x)}{1 : \varphi(x)},$$

et le second membre de cette formule est de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$.

Si l'on a $f(a) = 0$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim [\varphi(x)]^{f(x)} = \lim e^{f(x) l \varphi(x)};$$

on est ainsi ramené au cas précédent. Les expressions de la forme ∞^0 se ramènent donc aux précédentes; celles-ci, 1^∞, $\infty - \infty$, ..., s'y ramènent à l'aide d'artifices analogues.

XVI. — APPLICATIONS.

Problème I. — *Trouver la limite de* $\frac{F(x)}{f(x)}$ pour $x = \infty$, $F(x)$ *et* $f(x)$ *désignant deux polynômes entiers.*

Soient n le degré de $F(x)$, m celui de $f(x)$; si l'on suppose $n > m$ et si l'on remplace $F(x)$ et $f(x)$ par leurs dérivées, on trouve encore $\frac{\infty}{\infty}$ si m est > 1, et, si $m = 1$, la fraction se réduit à ∞. Pour se débarrasser de la forme illusoire, on voit qu'il faudra prendre m fois la dérivée des deux termes de la fraction, et, en faisant $x = \infty$ dans le résultat, on trouvera l'∞. Si au contraire on avait eu $n = m$, la fraction se serait réduite au rapport des coefficients de x^m dans $F(x)$ et $f(x)$. Enfin, si l'on avait eu $n < m$, on aurait trouvé zéro pour la limite cherchée. Ces résultats pouvaient se découvrir sans le secours du

calcul des dérivées. En effet, on a

$$\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}=\frac{\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\ldots+a_n}{\frac{b_0}{x^n}+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\ldots+b_mx^{m-n}}.$$

Si l'on fait $x=\infty$, la seconde fraction devient manifestement $\frac{a_n}{b_m}$ si $m=n$, ∞ si $n>m$, et o si $n<m$.

Problème II. — *Trouver la limite de* $\frac{a^x}{x^m}$ pour $x=\infty$.

Nous supposerons $m>0$, $a>1$. On a (p. 117)

$$a^x=e^{x\log a}=1+\frac{x\log a}{1}+\frac{(x\log a)^2}{1.2}+\ldots;$$

donc

$$\frac{a^x}{x^m}=\frac{1}{x^m}+\frac{1}{x^{m-1}}\frac{\log a}{1}+\frac{1}{x^{m-2}}\frac{(\log a)^2}{1.2}+\ldots.$$

Tous les termes tendent vers zéro jusqu'à celui où l'exposant de x est négatif; à partir de celui-là tous les termes sont infinis et de même signe; donc $\frac{a^x}{x}$ est infini pour $x=\infty$. Il en serait de même *a fortiori* si m était négatif.

Corollaires. — $\lim\frac{x}{(\log x)^m}=\infty$ *pour* $x=\infty$, *lim* $\frac{x^m}{a^x}=0$ *pour* $x=\infty$, etc.

Problème III. — *Trouver la limite de* $\frac{\sin x+x}{x}$ *pour* $x=\infty$.

Si l'on prend le rapport des dérivées des deux termes de cette fraction, on trouve $\frac{\cos x+1}{1}$, et, $\cos x$ étant indéterminé, on pourrait en conclure que $\frac{\sin x+x}{x}$ n'a pas de

limite. Or on a

$$\frac{\sin x + x}{x} = \frac{\sin x}{x} + 1;$$

or, $\sin x$ étant toujours moindre que l'unité, $\frac{\sin x}{x}$ a pour limite zéro. On a donc

$$\lim \frac{\sin x + x}{x} = 1.$$

A quoi tient cette contradiction?

Si l'on réfléchit à la démonstration de la règle que nous avons appliquée, on verra qu'elle s'appuie sur la formule de Taylor; notre règle du rapport des dérivées ne s'applique donc qu'aux fonctions $f(x)$ développables par la formule de Taylor. Pour rendre ce fait sensible, recommençons sur notre exemple la démonstration de la règle. On fera $\frac{1}{x} = z$, et l'on aura à chercher

$$\lim \frac{\sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} \text{ pour } z = 0,$$

ou enfin de

$$\frac{z}{1 : \left(\sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)}.$$

Or $\left(\sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)$ n'est pas développable par la formule de Taylor, et c'est pourquoi la règle de L'Hôpital tombe en défaut.

Problème IV. — *Limite de* $\frac{(x-a)^{\frac{1}{2}}}{\sin^{\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{1}{2}} a}$ *pour* $x = a$.

En appliquant la règle de L'Hôpital, on a

$$\frac{\frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sin^{-\frac{1}{2}} x \cos x},$$

dont la limite est ∞. Mais là encore il est à craindre que le résultat soit inexact, car $\sqrt{x-a}$ n'est pas développable suivant les puissances de $x-a$ par la formule de Taylor. Mais $\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin a}$ l'est, et le premier terme est

$$\frac{\cos a}{2\sqrt{\sin a}}(x-a);$$

la limite cherchée est donc bien infinie.

XVII. — QUELQUES MOTS SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA.

Nous avons vu que $f(x)$ passait en général par un maximum quand on avait $f'(x)=0$. La formule de Taylor rend parfaitement compte de ce fait; ainsi l'on a

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h).$$

Si $f'(a)$ n'est pas nul et si h est suffisamment petit, $f'(a+\theta h)$ ne sera pas nul non plus et sera de même signe que $f'(a)$; $f(a+h)-f(a)$ changera alors de signe avec h pour de petites valeurs de cette variable et ne sera ni maximum ni minimum. On sait en effet que $f(a)$ est maximum s'il est plus grand que $f(a+h)$, quel que soit le signe de h, et qu'il est minimum quand il est plus petit que $f(a+h)$, quel que soit le signe de h; le caractère du maximum et du minimum est donc que $f(a+h)-f(a)$ a le même signe quel que soit le signe de h.

D'après ce qui précède, $f(a)$ ne sera donc maximum que si $f'(a)$ est nul; la formule de Taylor donne alors

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h).$$

Si $f''(a)$ n'est pas nul, le signe du second membre pour de petites valeurs de h sera celui de $f''(a)$, et, par suite, ce sera aussi celui de $f(a+h)-f(a)$. Ainsi

$f(a)$ sera maximum si $f'(a)=0$ et si $f''(a)<0$,
» minimum » $f''(a)>0$.

On ne peut plus rien dire si $f''(a)=0$. Mais soit $f^n(a)$ la première dérivée de $f(x)$ qui n'est pas nulle pour $x=a$; la formule de Taylor donne

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a+\theta h).$$

La différence $f(a+h)-f(a)$ ne changera pas de signe avec h si n est pair, et il y aura maximum si $f^n(a)<0$ et minimum si $f^n(a)>0$; au contraire, si n est impair il n'y a ni maximum ni minimum, parce que $f(a+h)-f(a)$ change de signe avec h. Nous retrouvons ainsi des résultats déjà indiqués plus haut.

On obtient d'une façon analogue les conditions du maximum et du minimum des fonctions de plusieurs variables. Ainsi la formule de Taylor donne

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=hf'_a(a+\theta h, b+\theta k)$$
$$+kf'_b(a+\theta h, b+\theta k).$$

Pour que le premier membre ne change pas de signe avec h et k, il est nécessaire que f'_a et f'_b soient nuls tous deux. Ainsi, *pour qu'une fonction de plusieurs variables soit maxima ou minima, il faut que ses dérivées prises par rapport à chaque variable soient nulles.*

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion, qui n'offre aucune difficulté, mais qui appartient à un autre Cours. Nous ferons observer toutefois que nos conclusions ne sont exactes qu'autant que la formule de Taylor est applicable, et la recherche d'un maximum est pour cette raison une chose assez délicate.

Pour ne citer qu'un exemple bien connu des cas où les méthodes précédentes peuvent tomber en défaut, proposons-nous de trouver le maximum de la distance d'un point à un cercle situé dans le même plan.

Soient a la distance du centre au point, δ la distance d'un point du cercle au point donné; soit x la projection du rayon de ce point sur la droite qui joint le centre au point donné. On a, en appelant r le rayon,

$$\delta^2 = r^2 - x^2 + (a - x)^2$$

ou

$$\delta^2 = r^2 + a^2 - 2ax.$$

Si pour avoir le maximum de δ^2 on prenait la dérivée par rapport à x, on aurait, en l'égalant à zéro, $-2a = 0$, résultat absurde; cela tient à ce que δ^2 est maximum et minimum pour $x = \pm r$ et que la fonction δ^2 est discontinue pour $x = \pm r$: elle cesse en effet d'exister pour $x > r$ ou $x < -r$, et par conséquent de coïncider avec la fonction continue $r^2 + a^2 - 2ax$. La formule de Taylor ne lui est donc pas applicable. δ^2 est une fonction qui n'existe pas pour $x < -r$, égale à $r^2 + a^2 - 2ax$ pour $-r < x < r$ et qui n'existe pas pour $x > r$.

Problème I. — *Discuter la fonction*

$$y = \frac{\sin x}{\cos 2x}.$$

Il s'agit de voir comment varie y quand x passe de $-\infty$

à $+\infty$ d'une façon continue; en formant la dérivée y', on voit d'abord, en discutant son signe, quand y croît et quand il décroît, ce qu'il serait sans cela difficile de décider quand le numérateur et le dénominateur varient dans le même sens. On a

$$y' = \frac{\cos x}{\cos^2 2x}$$

On peut observer tout de suite que y ne change pas de valeur quand x se change en $-x$, mais qu'il change de signe. Des valeurs de y pour x positif on déduira donc les valeurs correspondantes pour x négatif, et nous n'aurons pas besoin de discuter les valeurs de y pour les valeurs négatives de x si nous avons discuté ses valeurs pour les valeurs positives de x. Nous pouvons même observer que y reprend périodiquement les mêmes valeurs quand x prend des accroissements égaux à 2π. Nous n'aurons donc qu'à faire varier x de o à 2π, et par cela même nous connaîtrons la marche de la fonction y en dehors de ces limites.

Or, tant que x reste moindre que $\frac{\pi}{4}$, les deux termes de y' sont positifs; y croît donc dans cet intervalle; il est nul pour $x = 0$ et infini pour $x = \frac{\pi}{4}$: y passe alors brusquement du positif au négatif, mais, y' étant encore positif, y croît tant que l'on n'a pas $x = \frac{\pi}{2}$; alors y' s'annule, et, comme y est continu, il passe par un maximum; y' change de signe; y décroît jusqu'à ce que l'on ait $x = \frac{3\pi}{4}$; y redevient infini, mais, comme y' reste négatif, y passe du négatif au positif, décroît encore, s'annule pour $x = \pi$, décroît toujours, devient infini pour $x = \frac{5\pi}{4}$; la dérivée restant

négative, il passe du négatif au positif et décroît pour atteindre un minimum quand $x = \frac{3\pi}{2}$; la dérivée alors passe du négatif au positif; y croît, devient infini pour $x = \frac{7\pi}{4}$, et, comme y' ne change pas de signe, y passe du positif au négatif et croît jusqu'au moment où $x = 2\pi$; alors y est nul et repasse par la série de valeurs que nous venons de trouver indéfiniment. L'un des objets de la Géométrie analytique est précisément la discussion des fonctions et leur représentation géométrique; nous renverrons donc pour cet objet le lecteur à un autre Cours, en bornant là ce genre de discussion, que nous ne saurions traiter complètement ici avec les seules ressources de l'Analyse.

Problème II. — *Trouver les maxima et les minima de la fonction xe^{-x}.*

La dérivée de cette fonction étant $e^{-x} - xe^{-x}$ ou $e^{-x}(1-x)$, on voit qu'elle s'annule pour $x = 1$ et $e^{-x} = 0$; or, e^{-x} n'étant nul pour aucune valeur finie de x, la fonction en question est maxima ou minima pour $x = 1$, car pour $x = 1$ elle est continue; la dérivée seconde de xe^{-x} est

$$-e^{-x} - (1-x)e^{-x},$$

c'est-à-dire négative pour $x = 1$; cette valeur de x rend donc xe^{-x} maximum.

Problème III. — *De tous les parallélépipèdes rectangles de même surface h^2 inscrits dans la sphère de rayon R, quel est celui dont le volume est maximum?*

Soient x, y, z les côtés du parallélépipède; on a

$$(1) \qquad xy + yz + zx = h^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Il faut rendre xyz maximum. Pour résoudre cette question, il semble qu'il soit nécessaire de calculer xyz en fonction de x, par exemple, pour égaler ensuite sa dérivée à zéro; mais on peut poser

$$(3)\qquad m = xyz$$

et prendre la dérivée de m comme celle d'une fonction implicite. Observons d'abord que l'équation (1) peut être remplacée par

$$(4)\qquad x + y + z = \sqrt{R^2 + 2h^2},$$

qui est plus simple. La variable indépendante pouvant être à volonté x, y, z ou toute fonction de ces variables, laissons-la indéterminée et prenons les dérivées des équations (2), (3), (4); en remplaçant m' par zéro, nous aurons

$$\begin{aligned} x' + y' + z' &= 0,\\ xx' + yy' + zz' &= 0,\\ x'yz + y'zx + z'xy &= 0; \end{aligned}$$

en éliminant x', y', z', nous aurons une relation qui, jointe aux conditions (1) et (2) ou (2) et (4), fera connaître x, y, z. En éliminant x', y', z', on a

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = 0;$$

cette équation est satisfaite pour $y = z$. Les formules (4) et (2) donnent alors

$$\begin{aligned} 2y + x &= \sqrt{R^2 + 2h^2},\\ 2y^2 + x^2 &= R^2, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera les valeurs correspondantes de x et de y. Nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul.

Problème IV. — *De tous les cylindres inscrits dans*

un hémisphère, quel est celui dont la surface totale est maxima?

En appelant R le rayon de la sphère, x le rayon de base variable, la surface à rendre maxima a pour expression

$$2\pi x^2 + 2\pi x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Nous devons égaler la dérivée de cette quantité à zéro; nous trouvons alors

$$2x + \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$$

ou

$$2x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2 = 0.$$

Isolant le radical dans un membre et élevant au carré, on a

$$4x^2(R^2 - x^2) = 4x^4 - 4R^2x^2 + R^4$$

ou

$$8x^4 - 8R^2x^2 + R^4 = 0.$$

Cette équation bicarrée donne pour seule solution réelle et admissible

$$x = \frac{R}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}.$$

La solution correspondant à la plus petite valeur de x donne évidemment un maximum et l'autre un minimum.

Le calcul de la dérivée seconde serait, sinon difficile au moins de peu d'intérêt, à cause de sa complication.

On arrive au même résultat en posant $x = R\cos\varphi$; la quantité à rendre maxima ou minima est alors $\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi$; en égalant sa dérivée à zéro, on trouve

$$\operatorname{tang}^2\varphi + 2\operatorname{tang}\varphi - 1 = 0.$$

on en déduit

$$\operatorname{tang}\varphi = -1 \pm \sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}},$$

ce qui donne la valeur de x trouvée plus haut.

XVIII. — DES FONCTIONS PRIMITIVES.

La recherche de la dérivée d'une fonction est un problème résolu, d'après ce qui précède, pour toutes les fonctions que l'on a à considérer dans les éléments; il n'en est pas de même du problème qui a pour but la recherche d'une fonction dont on donne la dérivée. Ce problème, qui est de la plus haute importance en Analyse, est du ressort du Calcul intégral; nous n'en dirons ici qu'un seul mot.

La fonction qui admet $f(x)$ pour dérivée s'appelle la *fonction primitive* ou l'intégrale de $f(x)$. Bien que l'on ne sache pas toujours trouver cette fonction primitive, il est bien des cas dans lesquels on peut la deviner; ainsi l'on voit de suite que la fonction primitive de Ax^m est $A\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$, excepté si $m = -1$; la fonction primitive de $\dfrac{A}{x}$ est $A \log x$, etc.

Mais on peut se demander si une fonction n'admet qu'une seule primitive; les théorèmes suivants ont pour but d'éclaircir cette question.

Théorème I. — *La dérivée d'une constante est nulle, et réciproquement, si la dérivée d'une fonction continue entre les limites a et b de la variable est nulle; cette fonction reste constante entre ces limites.*

En effet, soient $f(x)$ la fonction en question, x et $x+h$ deux valeurs de la variable comprises entre a et b; la formule de la page 165 lui est applicable, puisque la dérivée,

étant nulle par hypothèse, *existe* et est bien déterminée, et l'on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Or, $f'(x)$ étant nulle pour $a < x < b$, on a $f'(x+\theta h) = 0$, et par suite $f(x+h) = (fx)$; donc $f(x)$ est constant, ce qu'il fallait prouver. La réciproque est évidente.

Théorème II. — *Deux fonctions ayant la même dérivée ne diffèrent entre elles que par une constante.*

En effet, soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions telles que l'on ait

$$f'(x) - F'(x) = 0.$$

La fonction $f(x) - F(x)$ a sa dérivée nulle; donc cette fonction est constante, et par suite

$$f(x) = F(x) + \text{const.}$$

Ce théorème reposant sur le précédent, il est sous-entendu que les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont continues.

D'après cela, on voit que la fonction primitive de

$$x^m \quad \text{est} \quad \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.},$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{»} \quad \log x + \text{const.} = \log cx,$$

$$\sin x \quad \text{»} \quad -\cos x + \text{const.},$$

$$\cos x \quad \text{»} \quad \sin x + \text{const.}$$

. . . .

Pour faire comprendre l'utilité des considérations précédentes, nous résoudrons quelques problèmes :

1° *Quelle est la fonction de x constamment égale à sa dérivée?*

Soit y la fonction inconnue ; on a

$$y = y',$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{y'}{y} = 1.$$

Avec un peu d'habitude, on reconnaît que $\frac{y'}{y}$ est la dérivée de $\log y$; les deux quantités $\frac{y'}{y}$ et 1 sont donc les dérivées de $\log y$ et de x ; comme ces dérivées sont égales, $\log y$ et x ne peuvent différer que par une constante c ; on a donc

$$\log y = x + c, \quad y = e^{x+c}.$$

2° *Trouver le volume d'un segment sphérique à deux bases ?*

Soient R le rayon de la sphère, h la hauteur du segment ou la distance de ses bases. Supposons l'une des bases variable de position ; soient r son rayon et z sa distance au centre de la sphère. Si z reçoit l'accroissement Δz, le volume cherché V reçoit un accroissement ΔV que nous allons estimer. Ce volume ΔV est compris entre celui de deux cylindres ayant pour hauteur Δz et pour bases deux cercles de rayons r et $r + \Delta r$; donc

$$\pi r^2 \Delta z < \Delta V < \pi (r + \Delta r)^2 \Delta z ;$$

on en conclut

$$\pi r^2 < \frac{\Delta V}{\Delta z} < \pi (r + \Delta r)^2.$$

Si l'on fait tendre Δz vers zéro, $\frac{\Delta V}{\Delta z}$ tend vers V'_z et la formule précédente donne, en passant aux limites,

$$V'_z = \pi r^2.$$

Or on a $r^2 = R^2 - z^2$; donc

$$V'_z = \pi(R^2 - z^2).$$

On reconnaît que le second membre de cette formule est la dérivée de $\pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)$; on peut donc écrire

$$V = \pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right) + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, on observe que le volume V est nul pour une certaine valeur de z que nous appellerons z_0 ; il vient alors, en faisant $z = z_0$,

$$o = \pi\left(R^2 z_0 - \frac{z_0^3}{3}\right) + \text{const.},$$

d'où, retranchant cette formule de la précédente,

$$V = \pi\left[R^2(z - z_0) - \frac{1}{3}(z^3 - z_0^3)\right].$$

On peut remarquer que $z - z_0 = h$ et que

$$V = \frac{\pi h}{3}(3R^2 - z^2 - z_0^2 - zz_0).$$

On peut évidemment donner plusieurs formes à V suivant les données que l'on introduira dans la question.

EXERCICES ET NOTES.

1. Prendre les dérivées des fonctions suivantes :

$y = \operatorname{arc\,tang} \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$. *Rép.* : $y' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{a + bx + cx^2}$.

$y = \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}}$. $y' = \frac{\sqrt{2}}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$.

$y = \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$. *Rép.* : $y' = \frac{\sqrt{2}(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

$y = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} e^{ax}$. $y' = e^{ax}\cos bx$.

$y = (3x^2-6)\sin x - (x^3-6x)\cos x$. $y' = x^3 \sin x$.

$y = \frac{1}{3}\cot x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 2\right)$. $y' = -\frac{1}{\sin^4 x}$.

$y = \log(\log\sin x)$. $y' = \frac{\cot x}{\log\sin x}$.

$y = \operatorname{arc\,cos\acute{e}c} x$. $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

$y = \operatorname{arc\,tang} e^x$. $y' = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

$y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\sqrt{1-x^2}$. $y' = (\arcsin x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

$y = x^{\log x}$. $y' = \frac{2\log x}{x} x^{\log x}$.

$y = \log\frac{(x-2)^3}{x-1}$. $y' = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. $y' = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

$y = \operatorname{arc\,tang}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

$y = \log\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. $\frac{1}{2x(x-1)}$

$y = x^{\frac{1}{x}}$. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$.

Si l'on pose

$$x^y - y^x = 0,$$

on a

$$y' = \frac{y^x \log y - y x^{y-1}}{x^y \log x - x y^{x-1}}.$$

Si l'on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$x + y + z = 0,$$

on a

$$y' = \frac{y-x}{y-z}, \quad z' = \frac{z-x}{z-y}.$$

Si l'on pose

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_1^n + y_2^n + \ldots + y_n^n = x^n,$$

on a

$$y'_1 = \frac{P(x, y_2, \ldots, y_n)}{P(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

P désignant le produit des différences que l'on peut former avec les quantités placées dans la parenthèse qui suit.

$$y = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}\left[1 + \frac{2n-3}{2n-4}(x^2+1) + \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}(x^2+1)^{n-2}\right] + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3.1}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}\operatorname{arctang} x.$$

Rép : $y' = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$.

Prendre les dérivées do :

$$y = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$
$$y = \log(x \pm \sqrt{a^2 \pm x^2}),$$
$$y = x^{x^m}.$$
$$y = \frac{8}{3}\operatorname{arc\,tang} x + \frac{3}{8}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{4(1+x^2)^2}.$$
$$y = e^{-x}[x^m + mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} \ldots + 1.2.3\ldots m].$$
$$y = \sqrt{x^2 + 2x\cos\alpha + 1} - \cos\alpha \log\left(x + \cos\alpha + \sqrt{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}\right).$$

(Les résultats sont simples).

2. Prendre les dérivées de

$$\log x,\ \log\log x = \log_2 x,\ \log\log_2 x = \log_3 x,\ \text{etc.}\ldots \log_n x.$$

3. Trouver la $n^{ième}$ dérivée de uvw.

4. Trouver la $n^{ième}$ dérivée de $\arcsin x$: si l'on appelle cette fonction y, on se bornera à prouver que

$$y^{(n+1)}(1-x^2)-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0.$$

5. Trouver la $n^{ième}$ dérivée de $\text{arc tang} x$; en appelant cette fonction y, on a

$$y^{(n+1)}(1+x^2)+2ny^{(n)}x+n(n-1)y^{(n-1)}=0.$$

6. On étendra la formule du binôme au cas d'un exposant quelconque en développant $(1+h)^m$ par la formule de Taylor. On aura ainsi

$$(1+h)^m = 1+\frac{m}{1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}h^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}h^n+\text{R},$$

R étant donné par la formule

$$\text{R}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}h^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta h)^{m-n-1}.$$

On supposera

$$h=\pm 1,$$

et l'on étudiera dans quels cas le reste peut tendre vers zéro. Cette discussion présente quelques difficultés : on essayera de vaincre le plus grand nombre d'entre elles.

7. Démontrer, en s'appuyant sur la formule de Taylor, les équations suivantes :

$$\text{arc tang} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$
$$\text{arc sin} x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots.$$

8. La formule de Taylor permet d'évaluer une limite de l'erreur commise en admettant que les différences entre les nombres sont pro-

portionnelles aux différences qui existent entre leurs logarithmes, lorsque l'on fait usage des tables.

En effet, soient x et $x+1$ deux nombres de la table, $x+h$ un nombre compris entre x et $x+1$, Δ la différence tabulaire, on a par la formule de Taylor

$$(1)\quad \log(x+h)-\log x = h\log'(x+\theta h)=\frac{h}{x+\theta h},$$

et θ est compris entre zéro et 1. Si l'on suppose $h=1$, on a

$$\log(x+1)-\log x \quad \text{ou} \quad \Delta=\frac{1}{x+\theta_1};$$

θ_1 étant compris entre zéro et 1, on établit ordinairement la proportion

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{\Delta}{1},$$

d'où

$$\log(x+h)-\log x = h\Delta = \frac{h}{x+\theta_1}.$$

Mais, en comparant ce résultat avec le résultat exact (1), on voit que l'erreur est $\frac{h}{x+\theta_1}-\frac{h}{x+\theta h}$; cette erreur est donc moindre que $\frac{h}{x}-\frac{h}{x+1}$ ou que $\frac{h}{x(x+1)}$ ou même que $\frac{h}{x^2}$, si x est un nombre de cinq chiffres; on voit que l'erreur est bien loin de porter sur le septième chiffre.

9. Évaluer d'une manière analogue une limite de l'erreur commise en faisant usage des tables trigonométriques, quand on admet la proportionnalité entre les différences des arcs et les différences entre leurs logarithmes sinus; l'erreur est de la forme $\frac{h\sin 10''}{\sin^2 x}$ pour le cas où les différences procèdent de $10''$ en $10''$; il faudra donc éviter l'usage des petits arcs x. — Étude analogue pour les logarithmes cosinus et tangentes.

10. Étant donnés un angle droit et un point dans son plan, par ce point faire passer une droite qui, limitée aux côtés de l'angle droit, soit de longueur minima.

11. Un point se meut avec une vitesse v dans un milieu A et avec une vitesse v' dans un milieu A'; ces deux milieux sont séparés par une surface plane : quelle doit être la trajectoire de ce point pour se rendre d'un point M situé dans le milieu A en un point M' situé dans le milieu A', pour que le temps du trajet soit un minimum (on doit trouver que l'angle d'incidence et l'angle de réfraction ont un rapport de sinus égal à $v : v'$)? (Fermat.)

12. Trouver sur la droite qui joint deux lumières le point le moins éclairé.

13. Démontrer que, α, β, γ, ... étant des nombres quelconques et $x+y+z+\ldots$ étant constants, le maximum de $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$ a lieu quand $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\ldots.$

14. Étant donnés deux points A et B et une droite parallèle à AB, trouver sur cette droite un point M tel que $a\,\text{MA}+b\,\text{MB}$ soit un minimum, a et b désignant deux nombres donnés.

15. Sur la ligne des centres de deux sphères, trouver un point tel que la somme des calottes vues de ce point soit un maximum.

16. Démontrer que si $f(x)$ s'annule pour $x=a, x=b, \ldots x=l$ les quantités $a, b, c, \ldots l$ étant au nombre de n, on a

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l)\,\frac{f^n(\mathrm{X})}{1.2.3\ldots n},$$

X désignant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités $x, a, b, \ldots l$.

17. Si l'on pose

$$\frac{f(x)-f(a_1)}{x-a_1}=f(a_1,x),\quad \frac{f(a_1,x)-f(a_1,a_2)}{x-a_2}=f(a_1,a_2,x).$$
$$\frac{f(a_1,a_2,x)-f(a_1,a_2,a_3)}{x-a_3}=f(a_1,a_2,a_3,x),\ \ldots,$$

on a

$$f(x)=f(a_1)+(x-a_1)f(a_1,a_2)+(x-a_1)(x-a_2)f(a_1,a_2,a_3)\ldots$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)f^n(\mathrm{X}),$$

X étant compris entre la plus grande et la plus petite des quantités x, $a_1, a_2, \ldots a_n$ (Ampère). (On s'appuiera sur l'exercice précédent.)

18. Étant données les équations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

on en déduit que y est une fonction de x. Cela posé, on demande de démontrer les formules

$$y'_x = \frac{\psi'}{\varphi'}, \quad y''_x = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\varphi'^3},$$
$$y'''_x = \frac{\psi'''\varphi'^2 - \varphi'\varphi'''\psi' - 3\varphi''\varphi'\psi'' + 3\varphi''^2\psi'}{\varphi'^5}\cdots$$

19. Trouver une fonction égale à sa dérivée, ou égale à sa dérivée multipliée par une constante ($y = ce^{ax}$).

20. Trouver une fonction égale a sa dérivée seconde

$$(y = ce^{x} + c'e^{-x}).$$

21. Trouver une fonction égale et de signe contraire à sa dérivée seconde ($y = c\cos x + c'\sin x$).

22. Trouver la vraie valeur des fractions suivantes pour $x = 0$:

$$\frac{\tan x}{x}, \quad \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}, \quad \frac{x \sin x}{1 - e^{-x^2}}.$$

23. Trouver la vraie valeur des fractions suivantes pour $x = \infty$:

$$\frac{\log x - x}{\log x + x}, \quad \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2+x}}{\sqrt{x}}.$$

24. Démontrer que, si la fonction symétrique $f(x, y, z \ldots)$ reste constante, la fonction symétrique $\varphi(x, y, z \ldots)$ sera maxima ou minima quand on aura $x = y = z = \ldots$.

25. Soit Z une fonction imaginaire de la variable réelle x; le module

de Z croît ou décroît avec x suivant que la partie réelle de $\frac{Z'}{Z}$ est positive ou négative. (PUISEUX).

26. Trouver le poids d'un cône dont la base est B et la hauteur h, sachant que la densité reste constante dans chaque section parallèle à la base, mais vraie proportionnellement à la distance de la section au sommet. On donne la densité Δ sur la base B et la densité δ au sommet.

27. Démontrer que, si aucune cause ne s'oppose à l'accroissement de la population d'un pays, cette population à l'époque t sera donnée par la formule

$$P = P_0 c^{kt},$$

P_0 désignant la population à l'époque $t = 0$ et k un coefficient constant. C'est dans cette proposition que consiste la loi de MALTHUS.

CHAPITRE VIII.

CALCUL DES DIFFÉRENTIELLES.

I. — NOTIONS SUR LES INFINIMENT PETITS.

On appelle *infiniment petit* toute quantité *variable* qui a pour limite zéro (t. I, p. 115).

L'infiniment petit n'est donc pas une quantité nulle, et il y a cette différence entre le zéro et l'infiniment petit que le zéro est un nombre fixe, tandis que l'infiniment petit est essentiellement variable de sa nature.

On dit que deux infiniment petits α, β sont de même *ordre* quand la limite de leur rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est finie et différente de zéro. Quand la limite de $\frac{\beta}{\alpha}$ est nulle, on dit que β est d'ordre supérieur à α.

Si la limite de $\frac{\beta}{\alpha^m}$ est finie et différente de zéro, on dit que β est d'ordre m par rapport à α : ainsi α^m est d'ordre m par rapport à α.

Dans une question d'Analyse, on prend en général l'un des infiniment petits de la question pour infiniment petit principal; tout infiniment petit de même ordre que l'infiniment petit principal est alors considéré comme étant du premier ordre, et, en général, tout infiniment petit d'ordre m par rapport à l'infiniment petit principal est simplement appelé un infiniment petit d'ordre m. Nous pouvons ré-

sumer ces notions dans une formule. Soit α l'infiniment petit principal; β sera infiniment petit d'ordre m si

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^m} = p,$$

p désignant une quantité finie différente de zéro, et de cette formule on déduit, en appelant ε une quantité infiniment petite

$$\frac{\beta}{\alpha^m} = p + \varepsilon$$

ou

$$\beta = p\alpha^m + \alpha^m \varepsilon.$$

$\alpha^m \varepsilon$ est d'ordre supérieur à α^m, puisque son rapport à α^m est ε, qui par hypothèse est infiniment petit, c'est-à-dire a pour limite zéro. On voit donc que tout infiniment petit d'ordre m est de la forme $p\alpha^m +$ un infiniment petit d'ordre supérieur à m.

Il y a ici une remarque importante à faire : pour que l'ordre d'un infiniment petit β soit supérieur à l'ordre de α, il n'est pas nécessaire que l'ordre de β soit déterminé par rapport à α; il suffit que $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Ainsi il y a des infiniment petits qui sont d'ordre supérieur à celui de α, sans être pour cela d'aucun ordre par rapport à α. $\alpha(\log \alpha)^{-1}$ n'est d'aucun ordre, parce que $\frac{(\log \alpha)^{-1}}{\alpha^m}$ ne tend vers aucune limite, quel que soit m, pour $\alpha = 0$. Il est cependant d'ordre supérieur à celui de α.

II. — THÉORÈME FONDAMENTAL.

Lorsque l'on cherche la limite du rapport de deux infiniment petits, on peut sans inconvénient remplacer ces infiniment petits par d'autres, pourvu que la limite du

rapport de chaque infiniment petit à celui qu'on lui substitue soit l'unité.

En effet, supposons que $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, $\lim \frac{\beta}{\beta'} = 1$. Je dis que l'on aura

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Cela résulte de la suite d'égalités

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} \lim \frac{\beta}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{\beta}{\beta'} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

On peut donner à ce théorème fondamental une autre forme plus commode dans les applications. Remarquons en effet que, si $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, α' ne diffère de α que par un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et à α', qui sont de même ordre. En effet, si $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, c'est que $\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \varepsilon$, ε tendant vers zéro avec α et α' ; donc

$$\alpha = \alpha' + \alpha'\varepsilon.$$

Or $\alpha'\varepsilon$ est d'ordre supérieur à celui de α', car $\frac{\alpha'\varepsilon}{\alpha'} = \varepsilon$, qui tend vers zéro. Donc, *deux infiniment petits tels que la limite de leur rapport soit* 1 *ne diffèrent que par un terme d'ordre supérieur.*

Réciproquement : *Si la différence de deux infiniment petits est d'ordre supérieur par rapport à chacun d'eux, la limite de leur rapport est* 1.

En effet, soient α et α' deux infiniment petits, ε leur différence ; on aura

$$\alpha = \alpha' + \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha'}.$$

Si ε est d'ordre supérieur par rapport à α', $\frac{\varepsilon}{\alpha'}$ tendra vers zéro et l'on aura

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1.$$

De là résulte que nous pouvons énoncer notre théorème fondamental en ces termes :

Quand on cherche la limite du rapport de deux infiniment petits, on peut négliger, dans l'expression de chacun d'eux, des infiniment petits d'ordre supérieur.

Supposons, par exemple, que l'on veuille trouver la limite de $\frac{x^3 - x}{2x^2 - 3x}$ pour $x = 0$; on observera que, x étant infiniment petit principal, x^3 et x^2 sont d'ordre supérieur par rapport à $-x$ et à $-3x$; on peut donc les négliger, et la limite cherchée est celle de $\frac{-x}{-3x}$ ou $\frac{1}{3}$.

III. — DES DIFFÉRENTIELLES.

Soit y une fonction de x ayant une dérivée y'; on a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \quad (\text{pour } \Delta x = 0)$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit, c'est-à-dire une quantité

nulle avec Δx, mais dont l'ordre précis nous est d'ailleurs inconnu, ce qui pour le moment est tout à fait indifférent. On en conclut

$$\Delta y = y' \Delta x + E,$$

E désignant le produit de ε par Δx, c'est-à-dire un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx, et par suite par rapport à $y' \Delta x$, dont la limite du rapport à Δx ou y' est en général finie et différente de zéro.

Le produit $y' \Delta x$, différant de Δy par un infiniment petit d'ordre supérieur E, pourra remplacer Δy dans une limite de rapport, et, comme il sera généralement plus facile à calculer, il y a lieu de prendre ce produit en considération. On lui donne avec Leibnitz le nom de *différentielle* de y, et on le représente par dy. On a donc par définition

$$dy = y' \Delta x. \qquad (1)$$

Ainsi :

1° *La différentielle d'une fonction est le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement arbitraire Δx de la variable;*

2° *Quand l'accroissement donné à la variable est infiniment petit, la différentielle de la fonction est infiniment petite, et elle peut, dans la recherche des limites de rapports, remplacer l'accroissement de la fonction, dont elle diffère par un infiniment petit d'ordre supérieur;*

3° *Quand l'accroissement de la variable est égal à 1, la différentielle de la fonction est égale à sa dérivée.*

Cette dernière remarque n'a d'autre utilité que de faire bien observer que la différentielle d'une fonction n'est ni une quantité nulle, ni une quantité très petite, ni une quantité égale à l'accroissement de la fonction.

Il y a un cas remarquable dans lequel on a $\Delta y = dy$: c'est celui où l'on a $y = x$. En effet, si dans (1) on suppose $y = x$, on a, en observant que $x' = 1$,

$$dx = \Delta x.$$

Ainsi, *la différentielle de la variable est égale à son accroissement*. Si l'on remplace alors, dans (1), Δx par son égal dx, on a

$$dy = y' dx,$$

d'où

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Puisque la dérivée y' est égale au rapport $\frac{dy}{dx}$, rien n'empêche de représenter à l'avenir la dérivée de la fonction y par la notation $\frac{dy}{dx}$; c'est ce que l'on fait souvent.

IV. — AVANTAGES DE LA NOTATION LEIBNITZIENNE.

La notation $\frac{dy}{dx}$ présente sur la notation plus simple y' d'immenses avantages.

1° D'abord elle est expressive; elle rappelle par sa forme l'origine de la dérivée.

2° Un autre avantage de la notation différentielle consiste en ce que dy est toujours la différentielle de y, quelle que soit la variable indépendante, tandis que la notation y' représente des fonctions bien différentes, suivant la nature de la variable indépendante. Je m'explique. Soient y une fonction de x et t une autre fonction de x; alors y sera par cela même fonction de t. Soient y'_x la dérivée de y relative à x, y'_t sa dérivée relative à t; soient $d_t u$, en général, la différentielle d'une fonction u relative à t, $d_x u$ la

différentielle de la même fonction relative à x; on a

$$\frac{d_x y}{d_x x} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t d_t t}{x'_t d_t t} = \frac{d_t y}{d_t x} \quad (*).$$

Ainsi $\frac{dy}{dx}$ représente la dérivée de y relative à x, que x soit variable indépendante ou que t soit variable indépendante, puisque $\frac{d_x y}{d_x x} = \frac{d_t y}{d_t x}$; au contraire, y'_x n'est pas égal à y'_t, puisque $y'_x = y'_t t'_x$ ou $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

3° Mais la notation différentielle présente encore un autre avantage sur celle des dérivées, et celui-là est immense.

Supposons que, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que l'on a conservés, on soit parvenu à une équation de la forme suivante, où A, B, C, D, sont finis :

$$(1) \qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dt = 0.$$

Une pareille équation, en vertu de la notation dont on a fait usage, est *rigoureusement* exacte; les erreurs se sont compensées d'elles-mêmes.

Pour expliquer cette proposition un peu paradoxale, observons que, si l'équation (1) est inexacte, la suivante sera parfaitement exacte :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dt = \varepsilon,$$

ε désignant un terme d'ordre supérieur à dt, puisque, par

(*) Il est à peine nécessaire de faire observer que $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, parce que l'on a

$$y'_x = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y : \Delta t}{\Delta x : \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

hypothèse, on n'a négligé que des termes d'ordre supérieur. Divisons alors par dt et observons que, quelle que soit la valeur de dt, on a

$$\frac{dx}{dt} = x'_t, \quad \frac{dy}{dt} = y'_t, \quad \frac{dz}{dt} = z'_t;$$

nous aurons

$$\mathrm{A}x'_t + \mathrm{B}y'_t + \mathrm{C}z'_t + \mathrm{D} = \frac{\varepsilon}{dt}.$$

Or $\frac{\varepsilon}{dt}$ tend vers zéro avec dt, puisque ε est d'un ordre supérieur à celui de dt. Le premier membre de l'équation précédente, pouvant être pris aussi petit que l'on veut en prenant dt suffisamment petit, est rigoureusement nul, puisqu'il est indépendant de dt; on a donc *rigoureusement*

$$\mathrm{A}x'_t + \mathrm{B}y'_t + \mathrm{C}z'_t + \mathrm{D} = 0.$$

En multipliant par dt et en observant que $x'_t dt = dx$, $y'_t dt = dy$, ..., on a aussi *rigoureusement*

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy + \mathrm{C}dz + \mathrm{D}dt = 0.$$

L'erreur ε était donc bien nulle.

V. — DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS.

Puisque la différentielle dy de y est le produit de sa dérivée y' par dx, on aura, en faisant $y = x^m$, a^x, ... dans la formule $dy = y'dx$,

$$d.x^m = mx^{m-1}dx,$$
$$d.a^x = a^x \log a\, dx,$$
$$d.\sqrt{1-x^2} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

....

On a

$$(u \pm v \pm w \pm \ldots)' = u' \pm v' \pm w' \pm \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en multipliant par dx,

$$d(u \pm v \pm w \pm \ldots) = du \pm dv \pm dw \pm \ldots.$$

On a

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

On en conclura, en multipliant par la différentielle dx de la variable

$$d.uv = (u'dx)v + (v'dx)u$$

ou

$$d.uv = vdu + udv.$$

De la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

on déduira, en multipliant par dx,

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Le théorème des fonctions de fonctions donne l'égalité

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x,$$

et, en remarquant que $y'_u = \frac{dy}{du}$, $u'_v = \frac{du}{dv}$, $v'_n = \frac{dx}{dv}$, on a

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx};$$

ou plus exactement, en mettant au bas de la lettre d la variable par rapport à laquelle on différentie,

$$\frac{d_x y}{d_x x} = \frac{d_u y}{d_u u}\frac{d_v u}{d_v v}\frac{d_x v}{d_x x};$$

mais on a vu que l'on pouvait supprimer les indices placés au bas de la lettre d et les supposer identiques (p. 230), en sorte que cette formule ou (1) est évidente.

Nous ferons au sujet du théorème des fonctions composées une remarque importante. Si $f(u, v)$ désigne une telle fonction, u, v désignant des fonctions de x, on a

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$$

ou, en multipliant par dx,

$$df = f'_u du + f'_v dv.$$

Je n'ai pas remplacé f'_u et f'_v par $\frac{df}{du}$ et $\frac{df}{dv}$ parce qu'il en résulterait une confusion; l'équation précédente pourrait en effet s'écrire

$$(2) \qquad df = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv.$$

On serait tenté de simplifier, et alors, en supprimant des facteurs communs, on trouverait $df = 2df$, ce qui est absurde; mais il est facile de voir que cette simplification ne doit pas se faire, les trois df figurant dans ces formules ayant des significations distinctes.

df qui est écrit dans le premier membre représente, aux termes du second ordre près, l'accroissement de f dû à l'accroissement dx donné à x. Au contraire, le premier df qui est écrit dans le second membre représente, aux termes d'ordre supérieur près, l'accroissement que prend f quand u seul croît de du, v restant constant. Or on conçoit que f prendra des accroissements tout différents, quand on fera varier à la fois u et v par un accroissement donné à x ou quand on fera varier v tout seul. Pour éviter toute confusion et pour marquer que l'on ne doit pas chasser les dénominateurs, on représentera les dérivées partielles de f

par les notations $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, et la formule (2) s'écrira

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

ou encore

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

et l'on convient de regarder $\frac{\partial f}{\partial u}$ comme un symbole irréductible (*). Si en particulier $u = x$, on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

équation qu'il serait difficile d'écrire avec les notations de Lagrange; en effet, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{df}{dx}$ sont essentiellement distincts, et avec la notation de Lagrange on les représenterait tous deux par f'_x. Si l'on considère la fonction x^u, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u x^{u-1}, \quad \frac{df}{dx} = u x^{u-1} + x^u \log x \frac{du}{dx};$$

ainsi, on n'a pas $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}$.

VI. — DIFFÉRENTIELLES DES DIFFÉRENTS ORDRES.

La fonction y a pour différentielle $y'dx$, et l'on peut écrire

$$dy = y'dx;$$

(*) En d'autres termes, on n'attache plus aucun sens à ∂f et à ∂x tout seuls, de telle sorte que $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut plus se simplifier quand on le multiplie par ∂x.

mais $y' dx$ ou dy a lui-même une différentielle que l'on désigne par d^2y et que l'on calculera en multipliant la dérivée de $y' dx$ par dx. En prenant cette dérivée, on doit regarder dx comme une constante, en d'autres termes, supposer $d\,dx$ ou d^2x nul, parce que l'accroissement de x est arbitraire, et par suite indépendant de x; on a donc

$$d^2y = y'' dx.dx = y'' dx^2.$$

Ainsi, ce qui caractérise la variable indépendante x, c'est que dx est indépendant de x ou que $d^2x = 0$. De même, d^2y ou $y'' dx^2$ a une différentielle égale au produit de sa dérivée $y''' dx^2$ par dx; on représente cette différentielle par d^3y, et l'on a

$$d^3y = y''' dx^3.$$

En général,

$$d^ny = y^{(n)} dx^n;$$

d^ny est ce que l'on appelle la *différentielle $n^{\text{ième}}$* de y. La formule précédente donne

$$y^n = \frac{d^ny}{dx^n},$$

d'où la notation $\frac{d^ny}{dx^n}$ pour représenter la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y.

VII. — CHANGEMENT DE VARIABLE.

Lorsque l'on considère des dérivées d'ordre supérieur, la notation différentielle perd une partie de ses avantages. Ainsi, en convenant de représenter par dy, d^2y, ... les différentielles d'une fonction y prises par rapport à x et par ∂y, $\partial^2 y$, ... les différentielles de la même fonction prises par rapport à t, on a, comme on l'a vu (p. 237),

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x};$$

mais on n'a pas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Nous allons calculer $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, ... en fonction de ∂y, $\partial^2 y$, ..., ∂x, $\partial^2 x$, ... A cet effet, différentions la formule (1) par rapport à x ; le premier membre deviendra $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Pour obtenir la dérivée par rapport à x du second, nous appliquerons le théorème des fonctions de fonctions et nous prendrons sa dérivée par rapport à t, que nous multiplierons par la dérivée $\frac{dt}{dx}$ de t prise par rapport à x ; nous aurons ainsi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial x}}{\partial t} \frac{dt}{dx}.$$

Mais $\frac{dt}{dx} = \frac{\partial t}{\partial x}$; quant à $\partial \frac{\partial y}{\partial x}$, il est égal à $\frac{\partial^2 y \, \partial x - \partial^2 x \, \partial y}{\partial x^2}$. On a donc

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y \, \partial x - \partial^2 x \, \partial y}{\partial x^3},$$

résultat qui diffère de $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ par le terme $-\frac{\partial^2 x \, \partial y}{\partial x^3}$. Si l'on voulait calculer $\frac{d^3 y}{dx^3}$, il faudrait prendre la dérivée du second membre de la formule précédente par rapport à t et la multiplier par $\frac{dt}{dx}$ ou $\frac{\partial t}{\partial x}$; on aurait ainsi

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial \frac{\partial^2 y \, \partial x - \partial^2 x \, \partial y}{\partial x^3}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x},$$

ou, réductions faites,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^3 y\, \partial x^2 - \partial^3 x\, \partial y\, \partial x^2 - 3\,\partial^2 x\, \partial^2 y\, \partial x + 3\,\partial^2 x^2\, \partial x}{\partial x^5},$$

et ainsi de suite.

Ces formules servent à changer de variable. Le changement de variable est un problème qui a pour but, étant donnée une expression contenant les dérivées d'une fonction y de x, la fonction y et la variable x, de calculer cette expression en n'employant que les dérivées d'une autre fonction η prises par rapport à une autre variable ξ, la fonction η et la variable ξ. y et x sont donnés, bien entendu, en fonction de ξ et de η. Pour résoudre cette question, on remplacera d'abord y et x par leurs valeurs en ξ et η, qui sont censées données; puis, désignant par un ∂ les dérivées de η relatives à ξ, on aura

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

(2) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y\, \partial x - \partial^2 x\, \partial y}{\partial x^3}, \quad \ldots,$$

et l'on remplacera ∂y, ∂x, $\partial^2 y$, $\partial^2 x$, ... par leurs valeurs tirées des équations donnant x et y en fonction de ξ et η.

EXEMPLE. — *Que devient l'équation* $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ *quand on remplace* x *et* y *par* ξ *et* η *donnés par les formules*

(a) $$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta.$$

En vertu de (2), on peut écrire l'équation proposée

(b) $$\frac{\partial^2 y\, \partial x - \partial^2 x\, \partial y}{\partial x^3} = 0;$$

or les équations (a) donnent

$$\partial x = \partial\xi + \partial\eta,\quad \partial^2 x = \partial^2\xi + \partial^2\eta,$$
$$\partial y = \partial\xi - \partial\eta,\quad \partial^2 y = \partial^2\xi - \partial^2\eta,$$

et (b) devient, en prenant ξ pour variable indépendante, c'est-à-dire en faisant $\partial^2\xi = 0$ (p. 242)

$$-\frac{\partial^2\eta(\partial\xi + \partial\eta) - \partial^2\eta(\partial\xi - \partial\eta)}{(\partial\xi + \partial\eta)^3} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} = 0.$$

VIII. — REMARQUE AU SUJET DE LA FORMULE DE TAYLOR.

La formule de Taylor peut s'écrire

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n f^n(x)}{1.2\ldots n} + Rh^n,$$

R désignant une quantité nulle pour $h=0$; ceci suppose seulement $f^n(x)$ continu. Si l'on fait $h = dx$, $f(x+h) - f(x)$ sera Δf et $hf'(x)$ sera df, $h^2 f''(x)$ sera égal à $d^2 f$, etc. (p. 242) par définition même ; on pourra donc écrire

$$(1)\qquad \Delta f = df + \frac{1}{2}d^2 f + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}d^n f + \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit d'ordre supérieur à n. Cette formule montre bien que la différence entre Δf et df n'est pas nulle ; on voit qu'elle est égale à $\frac{1}{2}d^2 f$, en négligeant des termes d'ordre supérieur au second. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que la formule (1) suppose $f^n(x)$ continu pour la valeur de x à laquelle on applique cette formule.

IX. — DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction de plusieurs variables ; on appelle *différentielle totale*, ou simplement *différentielle*

de f, et l'on dénote par df l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

dans laquelle dx, dy, dz sont des accroissements arbitraires donnés à x, y, z. Quant à $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, ce sont les dérivées partielles de f relatives à x, y, z; en d'autres termes, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée de f prise par rapport à x en laissant y et z constants, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée de f prise par rapport à y en laissant x et z constants, etc.

Si, conformément à l'usage, on suppose dx, dy, dz choisis de telle sorte que leurs rapports restent finis, en d'autres termes si on les suppose de même ordre, la différentielle df pourra remplacer dans la recherche d'une limite de rapport l'accroissement Δf de f. En effet, on a, en donnant à x, y, z des accroissements dx, dy, dz,

$$\Delta f = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z)$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x+dx, y+dy, z+dz) &- f(x, y+dy, z+dz)\\ + f(x, y+dy, z+dz) &- f(x, y, z+dz)\\ + f(x, y, z+dz) &- f(x, y, z).\end{aligned}$$

Δf est ainsi décomposé en trois différences qui peuvent respectivement se mettre sous les formes (p. 176)

$$dx f'_x(x+\theta dx, y+dy, z+dz), \quad dy f'_y(x, y+\theta' dy, z+dz)$$

et

$$dz f'_z(x, y, z+\theta'' dz),$$

θ, θ', θ'' désignant des nombres compris entre o et 1. Mais, si les fonctions f'_x, f'_y, f''_z sont continues (ce que nous supposerons), les coefficients de dx, dy, dz dans les trois expressions précédentes diffèrent infiniment peu de f'_x, f'_y, f'_z ou de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, et, par suite, ces trois expressions différeront de $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, $\frac{\partial f}{\partial z}dz$ par des infiniment petits d'ordre supérieur; on aura donc

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial f}dz + \alpha \quad \text{ou} \quad \Delta f = df + \alpha,$$

α désignant un infiniment petit d'ordre supérieur.

C. Q. F. D.

La différentielle de df se désigne par d^2f: c'est la *différentielle totale seconde* de df. La différentielle de d^2f que l'on désigne par d^3f est la différentielle troisième de f, ...

De même que nous avons remplacé les notations f_x, f'_y, f'_z par $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, de même nous remplacerons la notation $f^{\alpha+\beta+\cdots}_{x^\alpha y^\beta\cdots}$, assez incommode, par la notation symbolique irréductible $\frac{\partial^{\alpha+\beta\cdots}f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta\cdots}$, sans d'ailleurs chercher à attacher un sens précis aux éléments ∂x^α, ∂y^β, ..., $\partial^{\alpha+\beta\cdots}f$.

Cela posé, calculons d^2f. On a, par définition,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

et

$$d^2f = \frac{\partial . df}{\partial x}dx + \frac{\partial . df}{\partial y}dy + \frac{\partial . df}{\partial z}dz,$$

c'est-à-dire, en observant que dx, dy, dz ne sont pas fonc-

tions de x, y, z, puisqu'ils sont arbitraires,

$$\begin{aligned}d^2f = \quad & dx\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz\right)\\ &+ dy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz\right)\\ &+ dz\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}d^2f = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2\\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy.\end{aligned}$$

On peut écrire cette formule symboliquement

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f,$$

en traitant ∂ aux numérateurs comme une véritable quantité; puis, en effectuant la multiplication par f, en l'écrivant à côté et à droite de ∂^2 en numérateur, je dis que l'on a plus généralement

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n f,$$

pourvu que, après avoir développé le produit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n$$

en considérant ∂ aux numérateurs comme une véritable quantité, on écrive f immédiatement après la lettre ∂^n. Cela résulte de la formule

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

en vertu de laquelle, pour différentier une quantité f, il suffit de la multiplier symboliquement par

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz.$$

Pour différentier df, il faudra différentier chacun de ses termes, c'est-à-dire multiplier chaque terme symboliquement par $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz$, ce qui donnera

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f.$$

Pour avoir $d^3 f$, on multipliera cette expression par le symbole (1), comme il a été expliqué, ce qui donnera

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^3 f,$$

et ainsi de suite.

X. — QUELQUES THÉORÈMES SUR LES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

I. Le théorème de Taylor, appliqué à la fonction $f(x, y, z)$, donne, en appelant dx, dy, dz des accroissements arbitraires de x, y, z,

$$\Delta f = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + \frac{1}{1.2}(f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz)^2 + \ldots$$

ou, par définition,

$$\Delta f = df + \frac{1}{2}d^2 f + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}d^n f + \mathrm{E},$$

E désignant un infiniment petit d'ordre supérieur à n. Cette forme du théorème de Taylor est fréquemment employée.

II. *En général, si l'on trouve une relation de la forme*

$$df = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

il faudra, si dx, dy, dz sont arbitraires, que l'on ait

$$(1) \qquad P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial z},$$

car, df étant égal à $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, on aura

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

et, comme cette relation a lieu quels que soient dx, dy, dz, elle entraîne les formules (1) (t. I, p. 45, dernière ligne).

III. *Si la différentielle totale d'une fonction est toujours nulle, cette fonction est constante.*

En effet, dire que $df = 0$, c'est dire que l'on a, quels que soient dx, dy, dz,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Or, $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant nul, f est constant quand, faisant varier x, on laisse y et z constants : donc f ne contient pas x. On voit de même que f ne contient ni y ni z. Donc enfin f, ne dépendant ni de x, ni de y, ni de z, est une constante ou, plus exactement, ne varie pas quand, toutes choses égales d'ailleurs, on fait varier x, y, z.

IV. *Si l'on a établi une formule telle que*

$$A\,df + B\,dg + \ldots + P\,dx + Q\,dy + \ldots = 0,$$

en négligeant des infiniments petits d'ordre supérieur au premier, A, B, C, ... *ne contenant pas* dx, dy, ..., df, dg, ..., *différentielles des variables* x, y, ... *et des fonctions* f, g, ..., *cette formule se trouve rigoureusement établie en vertu de la notation employée.*

En effet, si cette formule n'est pas exacte, son second membre o doit être remplacé par un certain infiniment petit ε d'ordre supérieur; en divisant par dx, elle devient alors

$$\mathrm{A}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots\right) + \mathrm{B}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\cdots\right)+\cdots+\mathrm{P}+\mathrm{Q}\frac{dy}{dx}+\cdots=\frac{\varepsilon}{dx},$$

Or, si l'on fait tendre dx vers zéro en conservant aux rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{du}$, $\cdots$ des valeurs finies y', z', ..., fixes, $\frac{\varepsilon}{dx}$ tend vers zéro, et l'on a rigoureusement

$$\mathrm{A}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\cdots\right) + \mathrm{B}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}y'+\cdots\right)+\cdots+\mathrm{P}+\mathrm{Q}y'+\ldots=0,$$

ou, en multipliant par dx et en observant que $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\cdots$ sont restés les mêmes bien que dx ait pu varier, on a rigoureusement

$$\mathrm{A}\,df+\mathrm{B}\,dg+\ldots+\mathrm{P}\,dx+\mathrm{Q}\,dy+\ldots=0.$$

C. Q. F. D.

On verrait de même que, *si une équation telle que*

$$\mathrm{A}\,d^2f+\mathrm{B}\,d^2g+\ldots+\mathrm{P}\,dx^2+\mathrm{Q}\,dy^2+\ldots=0$$

a été établie en négligeant des termes d'ordre supérieur au second, elle est rigoureusement exacte, etc.

Nous terminerons ce qui est relatif aux différentielles totales en faisant observer que l'on a

$$d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw,$$
$$d\,uv = u\,dv + v\,du,$$
$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

dans le cas où *d* représente une différentielle totale comme dans le cas où il n'y a qu'une variable indépendante. Ainsi, par exemple, dans le cas où il y a deux variables x, y, on a

$$\begin{aligned} d\,uv &= \frac{\partial\, uv}{\partial x}dx + \frac{\partial\, uv}{\partial y}dy \\ &= u\frac{\partial v}{\partial x}dx + v\frac{\partial u}{\partial x}dx + u\frac{\partial v}{\partial y}dy + v\frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \\ &= u\,dv + v\,du. \end{aligned}$$

Les autres formules se démontrent de la même façon.

Si θ est fonction de u, v, et si u et v sont fonctions de x, y, la différentielle totale de θ sera

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial u}dy = &\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \\ &+ \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \\ = &\frac{\partial\theta}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \\ &+ \frac{\partial\theta}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \\ = &\frac{\partial\theta}{\partial u}du + \frac{\partial\theta}{\partial v}dv. \end{aligned}$$

XI. — UTILITÉ DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

La considération des différentielles totales permet de reconnaître s'il existe des relations entre des fonctions données $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En effet :

Si l'on a entre les différentielles $df_1, df_2, \ldots$ une, deux, trois, ... relations linéaires et homogènes telles que

$$A_1 df_1 + A_2 df_2 + \ldots + A_n df_n = 0, \tag{1}$$

il existera une, deux, trois, ... relations de la forme

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0, \tag{2}$$

entre les fonctions f et réciproquement.

En effet, toute équation de la forme (2) différentiée fournit une équation

$$\frac{\partial F}{\partial f_1} df_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_n} df_n = 0, \tag{3}$$

de la forme (1), et réciproquement, une relation de la forme (1) exprime que si $df_2, df_3, \ldots, df_n$ sont nuls, c'est-à-dire si $f_2, f_3, \ldots, f_n$ sont constants, df_1 est nul, c'est-à-dire que f_1 est constant, ce qui veut dire que f_1 est fonction de $f_2, \ldots, f_n$, ou qu'il existe une relation de la forme (2).

Cette proposition peut se traduire en d'autres termes. En effet, s'il existe entre les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ une relation telle que (2) on en déduit (3) ou, ce qui revient au même, les n relations

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0,$$

d'où l'on tire, en éliminant les dérivées $\frac{\partial F}{\partial f_i}$,

$$(4) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0.$$

Réciproquement, si cette relation a lieu, il existera des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que l'on peut appeler $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ telles que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

ou telles que l'on ait à la fois

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \ldots, \quad df_n = 0,$$

c'est-à-dire en même temps $f_1 = \text{const.}, f_2 = \text{const.}, \ldots$; donc la relation (4) entraîne une relation telle que (2).

Le déterminant (4) est ce que l'on appelle le *Jacobien* ou le *déterminant* du système des fonctions $f_1, f_2, \ldots$; on le représente souvent par la notation

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

On voit que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une relation entre $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est que leur Jacobien soit nul.*

XII. — NOTIONS SUR LES INTÉGRALES.

Nous avons vu (p. 220) que, si une fonction admettait une fonction primitive ou intégrale, elle en admettait une infinité différant entre elles par une constante. Dans les traités de Calcul intégral un peu étendus, on donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette une intégrale, et l'on donne de l'intégrale une définition un peu plus générale.

La fonction primitive de $f(x)$ ou, plus correctement, l'intégrale de la différentielle $f(x)\,dx$ se désigne par la notation

$$\int f(x)\,dx,$$

et cette notation représente l'une quelconque des intégrales de $f(x)\,dx$. Ainsi on a

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.},$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + \text{const.}, \ldots,$$

et en général

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + \text{const.}$$

On peut déterminer la constante en donnant à x une valeur particulière a, et il est facile de voir que $f(x) - f(a)$ est la valeur de l'intégrale de $f'(x)\,dx$ qui pour $x = a$ s'annule. Si l'on fait $x = b$, la valeur particulière $f(b) - f(a)$ de l'intégrale ainsi obtenue se représente par la notation

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

et porte le nom d'intégrale définie de $f(x)$ prise entre les limites a et b, on lit la formule précédente : somme de a à b de $f(x)\,dx$ égale $f(a) - f(b)$. L'intégrale sans limites s'énonce somme de $f'(x)\,dx$. La raison de ces dénominations et la notation $\int$ qui est l'ancienne forme de l'S découlent du théorème suivant :

L'intégrale

$$\int_a^b f'(x)\,dx,$$

est la limite vers laquelle converge la somme

$$[f'(a) + f'(a+h) + f'(a+2h) + \ldots + f'(a+\overline{n-1}\,h)]\,h,$$

ou $h = \dfrac{b-a}{n}$ *quand* n *croît indéfiniment.*

On a en effet

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+h\varepsilon_0,$$
$$f(a+2h)-f(a+h)=hf'(a+h)+h\varepsilon_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$f(b)-f(a+\overline{n-1}\,h)=hf'(a+\overline{n-1}\,h)+h\varepsilon_{n-1}$$

et, en ajoutant,

$$f(b)-f(a)=h[f'(a)+f'(a+h)\ldots+f'(a+\overline{n-1}h)]+h\Sigma\varepsilon;$$

or nous admettrons que, quand h tend vers o, tous les ε tendent vers o. En appelant E le plus grand d'entre eux, $h\Sigma\varepsilon$ sera moindre que $nh\mathrm{E}$ ou que $(b-a)\mathrm{E}$, c'est-à-dire tendra vers o, et l'on aura

$$f(b)-f(a) \text{ ou } \int_a^b f'(x)\,dx=\lim[f'(a)+\ldots+f'(a+\overline{n-1}h)]h.$$

Cette démonstration n'est pas très rigoureuse, mais elle suffit pour le moment, la question qui nous occupe devant être reprise plus tard et étudiée avec beaucoup de soin. Maintenant, appliquons ces considérations à un exemple et reprenons la question traitée à la page 222.

Trouver le volume d'un segment sphérique à deux bases.

Soient, comme à l'endroit cité, R le rayon de la sphère, h la hauteur du segment; supposons l'une des bases variable, soit r son rayon, z sa distance au centre de la sphère, soit dz un accroissement donné à z, le volume V du segment prendra l'accroissement $\Delta\mathrm{V}$ ou dv aux termes du second ordre près; cet accroissement est, aux termes du second ordre près aussi, égal à $\pi r^2\,dz$, car la quantité négligée dans son évaluation est inférieure à

$$\pi[(r+\Delta r)^2-r^2]\,dz;$$

on a donc

$$d\mathrm{V}=\pi r^2\,dz,$$

et cette formule est rigoureuse en vertu du théorème p. 231. En intégrant alors depuis z_0, distance de la base inférieure du segment au centre de la sphère, jusqu'à z, on a

$$V = \int_{z}^{z} \pi r^2 \, dz$$

ou

$$V = \int_{z_0}^{z} \pi (R^2 - z^2) \, dz;$$

l'intégrale indéfinie étant $\pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)$, on aura

$$V = \pi R^2 (z - z_0) - \frac{\pi}{3}(z - z_0)^3,$$

comme plus haut.

EXERCICES ET NOTES.

1. Les seules fonctions d'une variable dont les différentielles sont égales aux accroissements sont de la forme $ax + b$, a et b désignant des constantes.

2. Traiter les exercices 26 et 27 du paragraphe précédent en faisant usage de la méthode infinitésimale.

3. Déterminer l'ordre infinitésimal de $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sin x$, $1 - \cos x$ par rapport à x.

4. Déterminer l'ordre infinitésimal de $(1 + \alpha)^{\frac{1}{2\alpha}}$ par rapport à α, de $\log^2 x$ par rapport à $x - 1$, de $x^\alpha - 1$ par rapport à α.

5. Calculer les différentielles totales de

$$x^y + y^x, \quad \text{arc tang} \frac{y}{x}, \quad \log\sqrt{x^2 + y^2}.$$

6. Interpréter géométriquement les expressions dx, dy et d^2y.

7. Démontrer à l'aide du théorème § 11 que si l'on a

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf,$$

la fonction f est toujours homogène et de degré m.

8. Démontrer à l'aide du même théorème que si la normale à une surface rencontre une droite fixe elle est de révolution.

CHAPITRE IX.

CALCUL DES DIFFÉRENCES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Considérons une fonction $y=f(x)$ de x, et donnons à x l'accroissement Δx, y subira un accroissement

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Les accroissements Δx, Δy portent souvent le nom de *différences finies* ou simplement de *différences* de x et de y. Δy est une fonction de x, elle a une différence $\Delta.\Delta y$ que l'on désigne par $\Delta^2 y$ et qui porte le nom de différence seconde de y; la différence de $\Delta^2 y$ se représente par $\Delta^3 y$ et porte le nom de différence troisième de y, et ainsi de suite.

Appliquons ces considérations au polynôme entier

$$y = \mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} x + \mathrm{A}_m.$$

Si, pour abréger, nous supposons $\Delta x = h$, nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta y = {} & \mathrm{A}_0(x+h)^m + \mathrm{A}_1(x+h)^{m-1} + \mathrm{A}_{m-1}(x+h) + \mathrm{A}_m \\ & - \mathrm{A}_0 x^m - \mathrm{A}_1 x^{m-1} \ldots - \mathrm{A}_{m-1} x - \mathrm{A}_m\end{aligned}$$

ou

$$\Delta y = m\mathrm{A}_0 x^{m-1} h + \left[\frac{\overline{m-1}}{1}\mathrm{A}_1 + \frac{m(m-1)}{2}\mathrm{A}_0\right] x^{m-2} h^2 + \ldots \mathrm{A}_{m-1} h,$$

en sorte que Δy sera un polynôme de degré $m-1$ dont le coefficient de x^{m-1} sera $m\mathrm{A}_0 h$, la différence seconde $\Delta^2 y$ sera un polynôme de degré $m-2$, et le coef-

ficient de x^{m-2} dans $\Delta^2 y$ sera $m(m-1)A_0 h^2$, ... Enfin, $\Delta^m y$ sera égal à $m(m-1)\ldots 2.1\, A_0 h^m$ et les différences suivantes seront nulles.

Nous nous bornerons à citer les formules suivantes que le lecteur vérifiera sans peine.

u, v, w, ... désignant des fonctions de x et a, b, c, ... des quantités indépendantes de x, on a

$$\Delta(au \pm bv \pm cw \ldots) = a\,\Delta u \pm b\,\Delta v \pm c\,\Delta w \ldots,$$
$$\Delta uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v,$$
$$\Delta \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v+\Delta v)}, \quad \ldots.$$

II. — CALCUL DE $\Delta^n y$.

On peut calculer $\Delta^n y$ directement comme il suit :

Posons $\Delta x = h$, et

$$y_0 = f(x), \quad y_1 = f(x+h),$$
$$y_2 = f(x+2h), \quad \ldots, \quad y_n = f(x+nh),$$

on aura

(1) $$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

et, par suite,

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1;$$

de ces deux formules on déduit par soustraction, en observant que $\Delta y_1 - \Delta y_0$ est égal à $\Delta^2 y_0$,

(2) $$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

et, par suite aussi,

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

en retranchant ces formules membre à membre et en observant que $\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$ est égal à $\Delta^3 y_0$

(3) $$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

L'examen attentif des formules (1), (2), (3) conduit à soupçonner la formule

$$(4) \qquad \Delta^n y_0 = y_n - C_n^1 y_{n-1} + C_n^2 y_{n-2} - \ldots \pm y_0,$$

dont elles ne sont que des cas particuliers et où l'on a posé

$$C_n^1 = \frac{n}{1}, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \quad \ldots,$$

comme dans la formule du binôme. On démontre bien facilement cette formule (4) en montrant que, si elle a lieu pour la différence $n^{\text{ième}}$, elle a encore lieu pour la différence $n+1^{\text{ième}}$. A cet effet, observons qu'en vertu de (4)

$$\Delta^n y_1 = y_{n+1} C_n^1 y_n + C_n^2 y_{n-1} - \ldots,$$

et en soustrayant (4)

$$\Delta^{n+1} y = y_{n+1} - (C_n^1 - 1) y_n + (C_n^2 - C_n^1) y_{n-1} - \ldots,$$

c'est-à-dire en vertu d'une propriété connue des nombres C_m^n,

$$\Delta^{n+1} v = y_{n+1} - C_{n+1}^1 y_n + C_{n+1}^2 y_{n-1} - \ldots \pm y_0;$$

cette formule ne différant de (4) que par le changement de n en $n+1$, la formule (4) est générale.

Pour faire une application de la formule (4), faisons

$$y_0 = 0^i, \quad y_1 = 1^i, \quad y_2 = 2^i, \quad \ldots,$$

nous aurons

$$\Delta^n y_0 \text{ ou } \Delta^n x^i = n^i - C_n^1 (n-1)^i + C_n^2 (n-2)^i - \ldots \pm 0^i,$$

en particulier si $i < n$

$$\Delta^n x^i = 0 = n^i - C_n^1 (n-1)^i + \ldots$$

et si $i = n$

$$1.2.3 \ldots n = n^n - C_n^1 (n-1)^n + \ldots.$$

THÉORÈME. — *La limite de $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ pour $\Delta x = 0$ est la $n^{ième}$ dérivée de y, en sorte que $d^n y$ et $\Delta^n y$ diffèrent entre eux par un infiniment petit d'ordre supérieur à n.* (Cela n'est vrai que si y est développable par la formule de Taylor.)

En effet, si dans la formule (4) on fait

$$y = f(x), \quad \Delta x = h,$$

on a

$$\Delta^n f(x) = f(x+nh) - C_n^1 f(x+\overline{n-1}\,h) + \ldots \pm f(x),$$

et si l'on applique la formule de Taylor

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) = {} & f(x)(1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n) \\ & + \frac{hf'(x)}{1}(n - \overline{n-1}\,C_n^1 + \overline{n-2}\,C_n^2 - \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{h^n f^n(x)}{1.2\ldots n}\left(n^n - \overline{n-1}^n C_n^1 + \overline{n-2}^n C_n^2 - \ldots\right) \\ & + \varepsilon,\end{aligned}$$

ε désignant des termes d'ordre supérieur à n; en vertu des deux dernières formules du paragraphe précédent, on a donc

$$\Delta^n f(x) = h^n f^n(x) + \varepsilon$$

ou

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^n(x) + \frac{\varepsilon}{h^n}.$$

Or $\frac{\varepsilon}{h^n}$ a pour limite zéro pour $h = \Delta x = 0$; donc

$$\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^n(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

III. — CALCUL DE y_n AU MOYEN DE Δy_0, ...

On peut calculer y_n en fonction de y_0, Δy_0, ..., $\Delta^n y_0$ comme il suit.

On a

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

et, par suite,

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \quad \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1,$$

et, en éliminant y_1 et Δy_1,

$$y_2 = y_0 + 2\,\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$

on vérifie que l'on a

$$(1) \qquad y_n = y_0 + C_n^1 \Delta y_0 + C_n^2 \Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0,$$

en montrant que cette formule qui a lieu pour $n = 1$ et $n = 2$ a encore lieu quand on remplace n par $n+1$, si l'on admet qu'elle a lieu pour une valeur déterminée de n. Et, en effet, en l'appliquant à la suite Δy_0, Δy_1, Δy_2, ..., on a

$$\Delta y_n = \Delta y_0 + C_n^1 \Delta^2 y_0 + C_n^2 \Delta^3 y_0 + \ldots;$$

en ajoutant cette formule à (1) et en tenant compte des relations

$$1 + C_n^1 = C_{n+1}^1, \quad C_n^1 + C_n^2 = C_{n+1}^2, \quad C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^3, \quad \ldots,$$

on trouve

$$y_{n+1} = y_0 + C_{n+1}^1 \Delta y_0 + C_{n+1}^2 \Delta^2 y_0 + \ldots,$$

ce qui établit la formule (1) pour toutes les valeurs de n.

IV. — FORMULE D'INTERPOLATION DE NEWTON.

La formule (4) du paragraphe précédent permet de trouver un polynôme de degré n prenant $n+1$ valeurs

données y_0, y_1, ..., y_n pour n valeurs données x_0, x_0+h, ..., x_0+nh de sa variable x en progression arithmétique. En effet, si l'on considère le polynôme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) = y_0 &+ \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2}+\ldots \\ &+ \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n y_0}{1.2.3\ldots n}, \end{aligned}\right.$$

il se réduit pour $x=x_0$ à y_0; pour $x=x_0+h$ ou $\frac{x-x_0}{h}=1$, il se réduit à $y_0+\Delta y_0$ ou à y_1, ... pour $\frac{x-x_0}{h}=i$ ou pour $x=x_0+ih$ il se réduit à

$$y_0+\frac{i}{1}\Delta y_0+\frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 y_0+\ldots+\Delta^i y_0$$

ou à y_i et cela quand $i=0, 1, \ldots, n$; le polynôme $\varphi(x)$ jouit donc de la propriété énoncée. La formule (1) porte le nom de *formule d'interpolation de Newton*.

V. — USAGE DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

Le calcul des différences peut servir à abréger considérablement le calcul des tables. Supposons d'abord que l'on veuille calculer une table des valeurs d'une fonction entière x^4, par exemple, pour des valeurs de x en progression arithmétique et qui seront si l'on veut 0, 1, 2, 3, 4, ..., on s'appuiera sur ce fait que $\Delta^4 x^4$ est constant et égal à $1.2.3.4=24$. On calculera alors -1^4, 0^4, 1^4, 2^4, 3^4, ce qui permettra de former les différences

$$\Delta-1^4,\quad \Delta 0^4,\quad \Delta 1^4,\quad \Delta 2^4,$$

et par suite les différences

$$\Delta^2-1^4,\quad \Delta^2 0^4,\quad \Delta^2 1^4,$$

et par suite

$$\Delta^3 - 1^4,\quad \Delta^3 0^4,$$

et enfin

$$\Delta^4 - 1^4$$

qui comme vérification devra être égal à 24. On formera alors toutes les différences, $\Delta^3 1^4$, $\Delta^3 2^4$, $\Delta^3 3^4$, ... qui sont en progression arithmétique de raison égale à 24; connaissant les différences $3^{\text{ième}}$ et $\Delta^2 0^4$, on formera $\Delta^2 1^4$, $\Delta^2 2^4$, ... par de simples additions, puis les différences premières et enfin les nombres 1^4, 2^4, 3^4, ... eux-mêmes.

La même méthode s'applique encore aux fonctions transcendantes quand la différence constante de la variable est suffisamment petite.

EXERCICES ET NOTES.

1. La formule de Newton peut s'écrire en supposant la fonction f quelconque, mais possédant une $n+1^{\text{ième}}$ dérivée bien déterminée, et pour $h = \Delta x$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\frac{\Delta f(x_0)}{1} + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2} + \dots$$
$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\cdots\left(\frac{x - x_0}{h} - n\right)\frac{f^{n+1}(\xi)}{1.2\ldots(n+1)},$$

ξ désignant un nombre compris entre x_0 et $x_0 + nh$.

2. On déduit de là

$$hf'(x) = \Delta f - \frac{1}{2}\Delta^2 f + \frac{1}{3}\Delta^3 f - \dots \pm \frac{h^{n+1}}{n+1} f^{n+1}(\xi).$$

3. Former une table de la fonction x^3 pour des valeurs de x en progression arithmétique de raison un.

4. Former la différence $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{x}$, ou de e^x.

5. Il y a deux moyens de faire la différence $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{x}$, soit directement ainsi $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{h}{x(x+h)} = \Delta \frac{1}{x}, \ldots,$ soit en faisant usage de la formule § 2; en identifiant les résultats, on a une formule remarquable.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

Pages.

CHAPITRE PREMIER. — ANALYSE COMBINATOIRE 1

I. — Des arrangements 1
II. — Des permutations 2
III. — Des combinaisons 3
IV. — Remarques au sujet des théories précédentes 5
V. — Formule du binôme 7
VI. — Du triangle arithmetique 11
VII. — Somme des puissances semblables des termes d'une progressiou arithmétique 16
VIII. — Application des théories précédentes à la sommation des piles de boulets 18

CHAPITRE II. — NOTIONS GÉNÉRALES 27

I. — Introduction 27
II. — Rappel de quelques définitions et théorèmes fondamentaux. 28
III. — De la continuité 29
IV. — Sur la variation des fonctions 34

CHAPITRE III. — DE LA FONCTION SIMPLE ALGÉBRIQUE, DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DES LOGARITHMES 37

I. — Préliminaires 37
II. — De l'exposant fractionnaire 37
III. — De l'exposant incommensurable 39
IV. — De l'exposant négatif et nul 41
V. — De la fonction exponentielle 44
VI. — Continuité de la fonction algébrique et de la fonction exponentielle 44
VII. — Sur la propriété fondamentale de l'exponentielle 48
VIII. — Des logarithmes 49

Pages.

IX. — Concordance de la définition népérienne des logarithmes avec la définition nouvelle 52
X. — Du module d'un système de logarithmes 52

CHAPITRE IV. — Des imaginaires 57

I. — Préliminaires 57
II. — Explication d'un paradoxe 58
III. — Des quantités imaginaires 59
IV. — Des quatre opérations 61
V. — Du module et de l'argument 65
VI. — Théorie des radicaux algébriques 71
VII. — Calcul des radicaux algébriques 75
VIII. — Sur les équations en général 77
IX. — Sur les équations du second degré 78
X. — Des fonctions de variables imaginaires 81
XI. — Définition de la fonction exponentielle 82

CHAPITRE V. — Théorie générale des séries 87

I. — Définitions 87
II. — Théorèmes sur la convergence 89
III. — Règles de convergence 99
IV. — Des calculs que l'on peut effectuer sur les séries 105
V. — Théorème d'Abel 111
VI. — Limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ pour $m=\infty$, m étant entier 115
VII. — Limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$. Étude du cas où m est quelconque. Développement de e^x, calcul de e 118
VIII. — Limite de $\left(1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m$ pour $m=\infty$. Séries de Newton 122
IX. — Quelques mots sur les transcendantes imaginaires 125
X. — Généralisation de la formule du binôme, résolution de $ax^2+bx+c=0$ quand a est très petit 128
XI. — Séries logarithmiques, calcul de π 133
XII. — Conclusion 138

CHAPITRE VI. — Des fractions continues 146

I. — Définitions 146

Pages.

II. — Étude du cas où les numérateurs des fractions intégrantes sont égaux à l'unité........ 150
III. — Applications de la théorie des fractions continues à l'analyse numérique........ 153
IV. — Applications de la théorie des fractions continues à la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du premier degré........ 156

CHAPITRE VII. — Théorie des fonctions dérivées........ 164

I. — Définitions........ 164
II. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient........ 168
III. — Dérivées des fonctions de fonctions et des fonctions composées........ 174
IV. — Théorème des fonctions homogènes........ 177
V. — Dérivées des fonctions implicites........ 178
VI. — Dérivées des fonctions simples........ 179
VII. — Dérivées des fonctions circulaires........ 182
VIII. — Application des principes précédents........ 186
IX. — Dérivées des fonctions de variable imaginaire........ 187
X. — Propriétés des fonctions dérivées........ 190
XI. — Théorème de Taylor........ 193
XII. — Quelques développements en série........ 196
XIII. — Extension au cas de plusieurs variables........ 198
XIV. — Sur la continuité des fonctions implicites........ 202
XV. — Des expressions qui se présentent sous les formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, etc........ 205
XVI. — Applications........ 210
XVII. — Quelques mots sur les maxima et les minima........ 213
XVIII. — Des fonctions primitives........ 220

CHAPITRE VIII. — Calcul des différentielles........ 231

I. — Notions sur les infiniment petits........ 231
II. — Théorème fondamental........ 232
III. — Des différentielles........ 234
IV. — Avantages de la notation leibnitzienne........ 236
V. — Différentielles des fonctions........ 238
VI. — Différentielles des différents ordres........ 241
VII. — Changement de variable........ 242
VIII. — Remarque au sujet de la formule de Taylor........ 245

Pages.
IX. — Des différentielles totales.............................. 245
X. — Quelques théorèmes sur les différentielles totales 249
XI. — Utilité des différentielles totales........................ 253
XII. — Notions sur les intégrales.............................. 254

CHAPITRE IX. — Calcul des différences.......................... 259

I. — Préliminaires.. 259
II. — Calcul de $\Delta^n y$.. 260
III. — Calcul de y_n au moyen de Δy_0........................ 263
IV. — Formule d'interpolation de Newton............ 263
V. — Usage de la théorie des différences..................... 264

Table des matières.... 267

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA DEUXIÈME PARTIE.

20393 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

CINQUIÈME ÉDITION,

EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES,

REVUE

PAR J.-B. MARCHAND,

ancien Élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE,

A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894



TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

CINQUIÈME ÉDITION,

EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES,

revue

Par J.-H. MARCHAND,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE,

A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

TRAITÉ
D'ALGÈBRE.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.
THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

I. — QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES.

THÉORÈME I. — *Tout polynôme* F(x) *entier en* x *est une fonction continue de* x.

En effet, x^m est une fonction continue de x, Ax^m également, A désignant une constante; donc un polynôme entier qui est une somme de termes de la forme Ax^m est aussi une fonction continue. *Autrement,* le polynôme F(x) a une dérivée finie F$'(x)$ qui est un autre polynôme et qui est finie pour toute valeur finie de x; donc $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ tend vers une limite finie, et à un accroissement infiniment petit quelconque de x correspond un accroissement infiniment petit de F; donc, etc. C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — *Le polynôme*

$$F(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0$$

tend vers A_0 *quand* x *tend vers zéro, et il devient infini pour* $x = \infty$. *Si les coefficients* $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$ *sont réels pour de très grandes valeurs de* x, *ce polynôme sera très grand et de même signe que son premier terme* $A_m x^m$.

Pour $x = 0$ on a évidemment $F(x) = A_0$, et, comme $F(x)$ est continu, quand x tend vers zéro $F(x)$ tend vers A_0.

On peut écrire

$$F(x) = A_m x^m \left(1 + \frac{A_{m-1}}{A_m}\frac{1}{x} + \frac{A_{m-2}}{A_m}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{A_0}{A_m}\frac{1}{x^m}\right).$$

Quand le module de x croît indéfiniment, $\frac{1}{x}$ tend vers zéro : donc la quantité écrite entre parenthèses tend vers 1, et $F(x)$ se composant de deux facteurs, dont l'un $A_m x^m$ devient infini pour $x = \infty$ et dont l'autre tend vers 1, est infini lui-même pour $x = \infty$.

Enfin, si les coefficients $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$ sont réels, on voit que la quantité entre parenthèses ayant pour limite 1 finit, pour de grandes valeurs de x positives ou négatives, par devenir positive ; $F(x)$ est alors de même signe que $A_m x^m$. C. Q. F. D.

Rappelons enfin que

Si le polynôme $F(x)$ *s'annule pour* $x = a$, *il est divisible par* $x - a$, *et s'il s'annule pour* $x = a$, $x = b$, $\ldots$, $x = l$, *on peut le mettre sous la forme*

$$\varphi(x)(x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

Si un polynôme est nul quel que soit x, *ou même seulement pour plus de valeurs de* x *qu'il n'y a d'unités dans son degré, il a tous ses coefficients nuls.*

Deux polynômes égaux pour plus de valeurs de x qu'il n'y a d'unités dans leurs degrés sont égaux quel que soit x et ont leurs coefficients égaux deux à deux.

II. — THÉORÈME DE D'ALEMBERT.

Toute équation de la forme

$$F(z) = 0,$$

dans laquelle $F(z)$ *représente un polynôme entier à coefficients réels ou imaginaires de la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, *admet nécessairement une racine de la même forme.*

Ce théorème est souvent attribué à Cauchy. Voici comment Gauss s'exprime à ce sujet dans un Mémoire publié en 1799 (*) :

« Prima theorematis demonstratio illustri geometræ d'Alembert debetur (*Recherches sur le Calcul intégral, Histoire de l'Académie de Berlin,* année 1746, p. 182 et suiv.). Eadem exstat in Bougainville (*Traité de Calcul intégral;* Paris, 1754, p. 47 et suiv.). »

Gauss, dans le Mémoire en question, discute successivement plusieurs démonstrations données par d'Alembert, Euler, Foncenex et Lagrange; enfin il propose la sienne, qui, extrêmement remarquable en elle-même, prête cependant à des objections sérieuses.

Pour démontrer le théorème qui nous occupe, considérons l'équation

$$(1)\quad A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + A_{m-2} z^{m-2} + \ldots + A_0 = 0 \quad \text{ou} \quad F(z) = 0,$$

dans laquelle A_0, A_1, A_2, ... sont des coefficients réels ou

(*) Cauchy, né vers 1789, n'avait donc guère plus de dix ans.

imaginaires. Posons

$$z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$
$$A_i = \rho_i(\cos\omega_i + \sqrt{-1}\sin\omega_i).$$

Le premier membre $F(z)$ de l'équation (1) prendra la forme

$$F(z) = \Sigma r^i(\cos i\theta + \sqrt{-1}\sin i\theta).\rho_i(\cos\omega_i + \sqrt{-1}\sin\omega_i)$$

ou

$$F(z) = \Sigma\rho_i r^i\left[\cos(i\theta + \omega_i) + \sqrt{-1}\sin(i\theta + \omega_i)\right] = P + Q\sqrt{-1};$$

l'argument de $F(z)$ est l'une des valeurs de l'expression

$$(2) \qquad \text{arc tang}\frac{\Sigma\rho_i r^i \sin(i\theta + \omega_i)}{\Sigma\rho_i r^i \cos(i\theta + \omega_i)} = \text{arc tang}\frac{Q}{P}.$$

Ceci posé, laissons r constant et faisons varier θ de θ_0 à $\theta_0 + 2\pi$, l'expression précédente subira un certain accroissement positif, négatif ou nul qui ne pourra être qu'un multiple de 2π, puisque l'argument de $F(z)$ est déterminé à un multiple de 2π près, et que, pour $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_0 + 2\pi$, l'expression placée sous le signe arc tang a la même valeur. Cependant l'accroissement en question pourrait être indéterminé si P et Q s'annulaient en même temps; or le module de $F(z)$ est $\sqrt{P^2 + Q^2}$. Si donc nous admettons que P et Q puissent être nuls à la fois, nous admettons par cela même que $F(z)$ peut s'annuler; c'est le théorème qu'il faut établir. Admettons donc que P et Q ne puissent jamais s'annuler ensemble, et alors la variation de l'expression (2) sera nécessairement un multiple de 2π.

Maintenant, considérons deux valeurs de r très voisines, à savoir r_1 et r_2; soit P_1 et Q_1, P_2 et Q_2 ce que deviennent P et Q quand on y fait $r = r_1$, $r = r_2$, les rap-

ports $\frac{Q_1}{P_1}$ et $\frac{Q_2}{P_2}$ différeront peu l'un de l'autre, et les arcs dont ils sont les tangentes différeront peu l'un de l'autre si on les a choisis peu différents pour $\theta = \theta_0$. Les arcs en question seront encore peu différents pour $P_1 = 0$ ou $P_2 = 0$, parce que leurs cotangentes $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ seront peu différentes; les différences des arcs considérés pour $\theta = \theta_0 + 2\pi$ seront donc peu différentes, et, par suite, si l'un des arcs a varié de $n\pi$, il faut que l'autre ait varié aussi de $n\pi$, sans quoi leur différence serait voisine d'un multiple de π, puisqu'alors leurs tangentes sont peu différentes; cette différence ne resterait donc pas très petite.

En résumé, si P et Q ne s'annulent à la fois ni pour $r = r_1$, ni pour $r = r_2$, ni pour des valeurs intermédiaires de r, de telle sorte que l'on puisse admettre que $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ diffèrent toujours peu l'un de l'autre, arc tang $\frac{Q_1}{P_1}$ et arc tang $\frac{Q_2}{P_2}$ varieront de quantités égales pour une variation de 2π de l'argument θ. Ceci revient à dire que, si P et Q ne peuvent s'annuler en même temps, ou que si $F(z) = 0$ n'a pas de racines, la variation de l'expression (2) pour une variation 2π de θ sera la même, quel que soit r.

Or, si r est très petit, l'expression (2) se réduit à peu près à arc tang $\frac{\rho_0 \sin \omega_0}{\rho_0 \cos \omega_0}$ ou à $\omega_0 + k\pi$, k désignant un entier, et varie très peu avec θ; donc sa variation totale, quand θ varie de 2π, est nulle.

Au contraire, si r est très grand, l'expression (2) se réduit sensiblement à arc tang $\frac{\rho_m r^m \sin(m\theta + \omega_m)}{\rho_m r^m \cos(m\theta + \omega_m)}$ ou à $m\theta + \omega_m + k\pi$, k désignant un entier; cette quantité varie de $2m\pi$ quand θ varie de 2π.

La variation de l'expression (2) n'est donc pas constante

quand r varie; il faut en conclure, d'après ce qui précède, que $F(z)$ doit s'annuler pour certaines valeurs de r et θ, c'est-à-dire au moins pour une valeur de z.

III. — COROLLAIRES DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT.

Corollaire I. — *Tout polynôme* $F(z)$ *du degré* n *peut se mettre sous la forme*

$$F(z) = F_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n),$$

F_n *désignant une constante.*

En effet, si nous posons $F(z)=0$, l'équation ainsi obtenue a une racine. Soit α_1 cette racine, $F(z)$ s'annulant pour $z=\alpha_1$ est divisible par $z-\alpha_1$; on peut donc poser

(1) $$F(z) = F_1(z)(z-\alpha_1);$$

on trouvera de la même façon

(2) $$F_1(z) = F_2(z)(z-\alpha_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

(n) $$F_{n-1}(z) = F_n(z-\alpha_n),$$

F_n désignant une constante, F_{n-1} un polynôme du premier degré, F_{n-2} un polynôme du second degré, etc. En multipliant les équations (1), (2), ..., (n) membre à membre, on a

$$F(z) = F_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

C. Q. F. D.

Nous admettrons maintenant que la décomposition ne peut se faire que d'une seule manière, ainsi du reste que nous l'établissons page 10.

Corollaire II. — *Si donc on pose*

$$F(z) = 0$$

l'équation ainsi obtenue peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)=0,$$

à laquelle on peut satisfaire en posant $x=\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; *donc toute équation du degré n a en général n racines. Il pourrait se faire que quelques-uns des facteurs* $z-\alpha_1$, $z-\alpha_2, \dots$ *fussent égaux, et l'équation*

$$F(z)=0$$

n'aurait pas n racines; mais alors on considère comme racines doubles, triples, etc., celles qui correspondent aux facteurs binômes qui entrent deux, trois, etc., fois dans $F(z)$. A l'aide de cette convention, on peut énoncer ce théorème général :

Toute équation du degré n a n racines.

Corollaire III. — *Supposons le polynôme* $F(z)$ *à coefficients réels; si l'équation* $F(z)=0$ *admet pour racine* $\mu+\nu\sqrt{-1}$, *elle admettra un nombre égal de fois pour racine* $\mu-\nu\sqrt{-1}$.

En effet, décomposons $F(z)$ en facteurs linéaires, nous aurons

$$F(z)=F_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n).$$

Ce polynôme ayant ses coefficients réels ne doit pas changer quand on change $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, z restant réel ([1]); en désignant alors par $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots$ ce que de-

---

([1]) En général, si $F(x)$ est une fonction rationnelle, et si l'on a

$$F(\sqrt{-1})=a+b\sqrt{-1},$$

on aura

$$F(-\sqrt{-1})=a-b\sqrt{-1}.$$

En effet, pour former $F(\sqrt{-1})$, on forme $F(i)$ en traitant i comme une

viennent α_1, α_2, ... par ce changement, on a

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)=(z-\alpha'_1)\ldots(z-\alpha'_n).$$

Comme un polynôme de degré n ne peut s'annuler pour plus de n valeurs de sa variable, il en résulte que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ sont égales deux à deux; donc $\mu+\nu\sqrt{-1}$ sera aussi souvent racine que $\mu-\nu\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV. — *Un polynôme réel est décomposable en un produit de facteurs réels du premier et du second degré.*

En effet, considérons toujours la formule

$$F(z)=F_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n).$$

Si l'on considère deux facteurs binômes correspondant à deux racines conjuguées $\mu+\nu\sqrt{-1}$, $\mu-\nu\sqrt{-1}$, leur produit

$$(z-\mu-\nu\sqrt{-1})(z-\mu+\nu\sqrt{-1})=z^2-2\mu z+\mu^2+\nu^2$$

se réduit à un trinôme réel du second degré. Or, les racines imaginaires étant conjuguées deux à deux, il en résulte que $F(z)$ se réduit, comme nous l'avions annoncé, à un produit de facteurs réels du premier et du second degré.

Ce corollaire est le théorème que Gauss substitue au

---

quantité dont le carré serait -1; $F(\sqrt{-1})$ ne peut donc différer de $F(-\sqrt{-1})$ que par le signe de i ou de $\sqrt{-1}$.

Ce raisonnement ne s'applique évidemment plus aux fonctions irrationnelles ou transcendantes, car les opérations qui ne dépendent pas exclusivement des quatre opérations de l'Arithmetique ne peuvent pas se définir comme les premières.

théorème de d'Alembert, tel que nous l'avons énoncé, dans son Mémoire publié en 1799; la démonstration de Gauss est très-curieuse, car cet auteur ne se sert pas des quantités imaginaires.

IV. — RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

Théorème I. — *Si l'on désigne par* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *les racines de l'équation*

$$(1)\quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0,$$

on aura les relations

$$(2)\quad \begin{cases} a_{n-1} = -\sum \alpha = -(\alpha + \beta + \ldots + \lambda), \\ a_{n-2} = \sum \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots + \beta\gamma + \ldots, \\ a_{n-3} = -\sum \alpha\beta\gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 = \pm \alpha\beta\gamma\ldots\lambda. \end{cases}$$

En effet, le premier membre de l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda).$$

Or, nous avons appris (t. II, p. 8) à former ce produit Le coefficient de x^n est 1; celui de x^{n-1} s'obtient en prenant le second terme dans chacun des facteurs binômes et en ajoutant les résultats; celui de x^{n-2} s'obtient en multipliant entre eux les seconds termes de deux facteurs pris de toutes les manières possibles, etc., ce qui fournit les relations (2).

Remarque. — Puisque le théorème précédent fournit m relations entre les racines, il semble que l'on pourrait profiter de ces relations pour résoudre l'équation (1); effectivement, ces relations peuvent être utiles dans certains cas, mais on peut montrer que, en cherchant à éliminer β, γ, ..., λ, l'équation en α que l'on obtient ainsi ne diffère pas de (1). En effet, si l'on multiplie par α^{n-1} la première des équations (2), par α^{n-2} la seconde, et ainsi de suite, si l'on ajoute les résultats, on trouve, réductions faites,

$$a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_0 = -\alpha^n,$$

équation identique avec (1). On aurait pu écrire cette formule *a priori*, en observant que le résultat obtenu en éliminant $n-1$ quelconques des n racines devait être toujours le même à cause de la symétrie des formules (2); le résultat de l'élimination devait donc admettre pour racines α, β, ..., λ, c'est-à-dire être identique avec l'équation (1).

V. — DES DIVISEURS ALGÉBRIQUES.

Si l'on désigne par $F(x)$ un polynôme du degré m, nous avons vu que ce polynôme s'annule en général pour m valeurs réelles ou imaginaires de sa variable x, ou, pour parler plus exactement, nous avons vu que tout polynôme $F(x)$ du degré m pouvait être mis sous la forme d'un produit de m facteurs linéaires multipliés par une quantité indépendante de x. Cette décomposition ne peut évidemment se faire que d'une seule manière; en effet, si l'on pouvait avoir à la fois

$$F(x) = A\,(x-\alpha)^{\mu}\,(x-\beta)^{\nu}\ldots,$$
$$F(x) = A'(x-\alpha')^{\mu'}(x-\beta')^{\nu'}\ldots,$$

A et A' désignant des quantités indépendantes de x, on en

conclurait

$$A(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu} = \ldots = A'(x-\alpha')^{\mu'}(x-\beta')^{\nu'} \ldots .$$

Or, le premier membre s'annulant pour $x=\alpha, \beta, \ldots$ et seulement pour ces valeurs de x, il doit en être de même du second, ce qui ne peut avoir lieu que si les quantités $\alpha', \beta', \ldots$ sont respectivement égales à $\alpha, \beta, \ldots$; en outre, je dis que $\mu=\mu'$. En effet, si l'on supposait, par exemple, $\mu > \mu'$, en divisant les deux membres de l'équation précédente par $(x-\alpha)^{\mu'}$, le premier membre s'annulerait encore pour $x=\alpha$, tandis que le second serait essentiellement différent de zéro. On a donc $\mu=\mu'$, $\nu=\nu'$, ... et par suite $A=A'$; les facteurs linéaires d'un polynôme jouent donc le même rôle que les nombres premiers en Arithmétique.

On appelle *plus grand commun diviseur entre deux polynômes* P *et* Q le produit des facteurs linéaires communs à ces deux polynômes multiplié ou non par un facteur constant.

Problème. — *Trouver le plus grand commun diviseur entre deux polynômes* U *et* V.

Pour résoudre ce problème, nous suivrons une marche analogue à celle que l'on suit en Arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres; nous diviserons U par V en supposant le degré de U égal ou supérieur à celui de V. Si V divise U, il sera le plus grand commun diviseur cherché; sinon, en désignant par Q le quotient et par R le reste, nous aurons

$$U = VQ + R.$$

Or R, en vertu de cette formule, est identique à $U - VQ$; il doit donc forcément admettre les facteurs linéaires

communs à U et V; donc le plus grand commun diviseur entre V et R contient les mêmes facteurs que celui qui existe entre U et V. De même, U admettant les facteurs linéaires communs à V et à R, le plus grand commun diviseur de U et V contient les mêmes facteurs que celui de V et R; donc enfin les deux plus grands communs diviseurs en question, se composant des mêmes facteurs linéaires, sont égaux, à un facteur constant près, c'est-à-dire sont les mêmes puisque nous faisons abstraction des facteurs constants. Mais R est de degré inférieur à V; donc la recherche du plus grand commun diviseur de V et R est plus simple que celle du plus grand commun diviseur de U et V.

Divisons V par R; si la division se fait exactement, R sera le plus grand commun diviseur cherché; sinon, en appelant Q′ le quotient et R′ le reste, on aura

$$V = RQ' + R'.$$

Un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire nous conduit à diviser R par R′; si la division se fait exactement, R′ sera le plus grand commun diviseur cherché; sinon on posera

$$R = R'Q'' + R'',$$

et l'on divisera R′ par R″, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on tombe sur un reste divisant le précédent (et dans ce cas ce reste est le plus grand commun diviseur cherché), ou bien jusqu'à ce que l'on tombe sur un reste indépendant de x, et dans ce cas il n'existe pas de diviseur commun entre U et V.

Remarque. — On n'altère évidemment pas les facteurs linéaires du reste d'une division algébrique en multipliant chaque dividende partiel par une quantité indépendante de la lettre ordonnatrice x; car cette multiplication n'in-

troduit dans le reste que des facteurs indépendants de x. On pourra donc, pour éviter les dénominateurs, multiplier par des facteurs convenables les dividendes partiels que l'on rencontre dans la recherche des restes successifs dont le dernier doit être le plus grand commun diviseur.

Théorème I. — *Pour que le polynôme* $F(x)$ *admette* n *fois le facteur* $x-\alpha$, *il faut et il suffit que ce polynôme s'annule pour* $x=\alpha$, *ainsi que ses* $n-1$ *premières dérivées.*

En d'autres termes :

Pour que l'équation $F(x)=0$ *admette* m *fois la racine* α, *il faut et il suffit que* $F(x)$ *s'annule pour* $x=\alpha$, *ainsi que ses* $n-1$ *premières dérivées.*

En effet, on a identiquement

$$F(x)=F(\alpha+x-\alpha),$$

et par suite, en posant dans la formule de Taylor (t. II, p. 190) $x=\alpha$, $h=x-\alpha$, il vient

$$F(x)=F(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1}F'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}F''(\alpha)+\ldots$$
$$+\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}F^{n-1}(\alpha)+\Omega,$$

Ω désignant un ensemble de termes qui contiennent tous le facteur $(x-\alpha)^n$; les termes qui précèdent Ω étant de degré inférieur à $(x-\alpha)^n$ représentent le reste de la division de $F(x)$ par $(x-\alpha)^n$, et, pour que $F(x)$ soit divisible par $(x-\alpha)^n$, il faut que ce reste soit nul quel que soit x, et, par suite, quel que soit $x-\alpha$; on devra donc avoir

$$F(\alpha)=0,\quad F'(\alpha)=0,\quad F''(\alpha)=0,\ldots,\quad F^{n-1}(\alpha)=0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, il est bien évident que $F(x)$ sera divisible par $(x-\alpha)^n$ (*).

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Le plus grand commun diviseur entre* $F(x)$ *et* $F'(x)$ *se compose de tous les facteurs linéaires multiples de* $F(x)$ *élevés chacun à une puissance égale à leur ordre de multiplicité diminué de* 1.

En effet, soit

$$F(x) = A(x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu \ldots,$$

on aura (t. II, p. 165)

$$F'(x) = A\mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^\nu + \ldots$$
$$+ A\nu(x-\alpha)^\mu (x-\beta)^{\nu-1} + \ldots.$$

Les seuls facteurs linéaires communs à $F(x)$ et $F'(x)$ sont $x-\alpha$, $x-\beta$, ..., et $x-\alpha$ n'entre que $\mu-1$ fois dans la dérivée, $(x-\beta)$, $\nu-1$ fois, etc.; le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F'(x)$ est donc

$$(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}\ldots.$$

On verrait de même que le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F''(x)$ est

$$(x-\alpha)^{\mu-2}(x-\beta)^{\nu-2}\ldots,$$

et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Applications. — 1° $x^m - 1$ a pour dérivée mx^{m-1}; si l'on divise $x^m - 1$ par mx^{m-1}, ou, pour éviter les déno-

(*) Nous verrons plus loin, Chap. X, § VIII, comment on exprime par des relations entre les coefficients qu'une équation a une racine double, triple, etc.

minateurs, si l'on divise $mx^m - m$ par mx^{m-1}, on trouve pour reste $-m$; $x^m - 1$ n'a donc jamais de diviseur commun avec sa dérivée; donc $x^m - 1 = 0$ n'a pas de racines égales.

2° Cherchons le plus grand commun diviseur entre

$$x^3 + px^2 + qx + r = \text{U}$$

et sa dérivée

$$3x^2 + 2px + q = \text{U}';$$

le reste de la division de U par U' est

$$(6q - 2p^2)x + 9r - pq,$$

à un facteur constant près. En divisant $\text{U}' = 3x^2 + 2px + q$ par ce reste, on trouve, à un facteur constant près, pour nouveau reste

$$3(9r - pq)^2 - 2p(6q - 2p^2)(9r - pq) + q(6q - 2p^2)^2;$$

en égalant ce reste à zéro, l'équation proposée acquiert deux racines égales.

La méthode du plus grand commun diviseur est bien simple en théorie, mais d'une complication inouïe dès que l'on entre dans le domaine des applications; on cache cette difficulté aux élèves en leur donnant des exemples choisis d'avance et pour lesquels les calculs se font avec facilité. Si le lecteur veut se convaincre du fait que j'avance, il n'a qu'à chercher les conditions pour qu'une équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

ait ses racines égales deux à deux. On doit exprimer que le plus grand commun diviseur est du second degré; les calculs sont fort longs, et l'on arrive aux conditions bien simples

$$p^2s - r^2 = 0, \quad (4q - p^2)^2 = 64s,$$

si faciles à obtenir en exprimant que le premier membre de l'équation est un carré parfait.

VI. — THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Lorsqu'une équation algébrique a des racines égales, on peut la décomposer en plusieurs autres, de degrés moindres et, partant, plus faciles à résoudre; cette décomposition n'exige pas, comme nous allons le voir, d'opération d'un ordre plus élevé que la division.

Soit $F(x) = 0$ une équation algébrique : pour reconnaître si cette équation a des racines égales, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$; si ce plus grand commun diviseur est une quantité indépendante de x, l'équation $F(x) = 0$ n'a pas de racines égales (p. 14). Si au contraire il existe entre $F(x)$ et $F'(x)$ un plus grand commun diviseur, il est de la forme

$$(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}(x-\gamma)^{p-1}\ldots,$$

abstraction faite d'un facteur numérique qui est le coefficient de la plus haute puissance de x dans $F(x)$. Si donc on désigne d'une manière générale par V_i le produit des facteurs binômes de $F(x)$ correspondant aux racines dont l'ordre de multiplicité est i, et par D_1 le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F'(x)$, on pourra écrire

$$\begin{aligned} F(x) &= V_1 V_2^2 V_3^3 \ldots V_i^i \ldots, \\ (1) \qquad D_1 &= V_2 V_3^2 \ldots V_i^{i-1} \ldots, \end{aligned}$$

et par suite

$$(2) \qquad \frac{F(x)}{D_1} = V_1 V_2 V_3 \ldots V_i.$$

On est ainsi ramené à une équation

$$\frac{F(x)}{D_1} = 0,$$

qui ne contient plus que des racines simples, à savoir les racines de $F(x) = 0$ dont le degré de multiplicité aurait été réduit à l'unité. Mais on peut calculer séparément $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ et abaisser considérablement le degré de l'équation à résoudre en procédant comme il suit.

Soit D_2 le plus grand commun diviseur entre D_1 et sa dérivée, l'équation (1) donnera

$$D_2 = V_3 V_4^2 \ldots V_i^{i-2} \ldots,$$

et par suite

$$\text{(3)} \qquad \frac{D_1}{D_2} = V_2 V_3 \ldots V_i \ldots;$$

les équations (2) et (3) donnent alors

$$\frac{F(x)}{D_1} : \frac{D_1}{D_2} = V_1.$$

On calculerait $V_2, V_3, \ldots, V_i$ d'une manière analogue; ainsi, en appelant D_3 le plus grand commun diviseur entre D_2 et sa dérivée, D_4 le plus grand commun diviseur entre D_3 et sa dérivée, et ainsi de suite, on aura

$$D_3 = V_4 V_5^2 \ldots V_i^{i-3} \ldots, \qquad \frac{D_2}{D_3} = V_3 V_4 \ldots V_i \ldots,$$

$$\frac{D_1}{D_2} : \frac{D_2}{D_3} = V_2,$$

$$D_4 = V_5 V_6^2 \ldots V_i^{i-4}, \qquad \frac{D_3}{D_4} = V_4 V_5 \ldots V_i \ldots.$$

$$\frac{D_2}{D_3} : \frac{D_3}{D_4} = V_3 \ldots.$$

Les équations $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0 \ldots$ que l'on forme ainsi par de simples divisions feront alors connaître les racines simples, doubles, triples, etc., de $F(x) = 0$.

Remarque. — Toute racine d'une équation $F(x) = 0$ algébrique, seule de son degré de multiplicité, sera alors fournie par une équation $V_i = 0$ du premier degré, et, comme V_i se trouve par de simples divisions, cette racine sera une fonction rationnelle des coefficients de l'équation; ainsi :

Théorème I. — *Toute racine d'une équation seule de son degré de multiplicité est fonction rationnelle des coefficients de l'équation.*

VII. — DE L'IRRÉDUCTIBILITÉ.

On dit qu'une équation $F(x) = 0$ est *irréductible* quand, en considérant ses coefficients comme des fonctions rationnelles de quantités *données* p, q, r, ... (qui peuvent, être ces coefficients eux-mêmes), elle ne peut pas se décomposer en d'autres équations à coefficients rationnels par rapport à p, q, r, ...

L'irréductibilité d'une équation est donc une chose relative; ainsi, par exemple, l'équation $x^2 + 1 = 0$ sera irréductible si l'on considère comme *donnés* tous les nombres réels, et seulement ces nombres; elle devient réductible dès que l'on adjoint à ces nombres l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

Une équation dont les coefficients sont *donnés* est réductible quand elle a des racines égales, etc.

Théorème II. — *Lorsque deux équations,* $f = 0$ $F(x) = 0$, *ont une racine commune, si* $f = 0$ *est irréductible,* $F(x) = 0$ *admet toutes les racines de* $f = 0$.

En effet, cherchons le plus grand commun diviseur entre f et F : ce plus grand commun diviseur sera au moins du premier degré et à coefficients rationnels par rapport aux quantités données, puisque la recherche du plus grand commun diviseur n'exige que des divisions. Mais f étant divisible par D, qui est rationnel, $f=0$ ne pourra être irréductible que si f est le produit de D par une constante; mais alors F est divisible par f, et $F=0$ admet toutes les racines de $f=0$. (F est une puissance de f.)

Corollaire I. — *Une équation irréductible a toutes ses racines simples.* (Les coefficients sont donnés.)

Car les racines multiples sont données par des équations à coefficients rationnels.

Corollaire II. — *Si une équation à coefficients entiers admet la racine $a+\sqrt{b}$, où $\sqrt{b}$ est irrationnel mais où a et b sont entiers, elle admet aussi la racine $a-\sqrt{b}$, car $a+\sqrt{b}$ et $a-\sqrt{b}$ sont racines de l'équation irréductible*

$$x^2-2ax+a^2-b=0,$$

quand on suppose donnés tous les nombres rationnels.

Corollaire III. — *Si une équation à coefficients réels admet la racine $a+b\sqrt{-1}$ de l'équation irréductible*

$$x^2-2ax+b^2+a^2=0,$$

elle admet l'autre racine $a-b\sqrt{-1}$, etc. etc.

VIII. — REMARQUE AU SUJET DES ÉQUATIONS QUELCONQUES.

Nous nous occuperons plus spécialement des équations dont le premier membre est de la forme $f(x)=0$, $f(x)$

2.

désignant un polynôme entier; mais souvent nos raisonnements s'appliqueront à des équations quelconques : nous en préviendrons toujours le lecteur. On dit qu'une équation $f(x)=0$ est *algébrique* ou *transcendante*, suivant que la fonction f est algébrique ou transcendante.

Quand f n'est pas un polynôme entier, on dit que a est racine d'ordre de multiplicité α de $f(x)=0$, α pouvant être entier ou fractionnaire, si $\dfrac{f(x)}{(x-a)^\alpha}$ a une limite finie et différente de zéro pour $x=a$.

Théorème. — *Si $f(x)$ a ses n premières dérivées finies et continues pour $x=a$, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)=0$ admette n fois la racine a (n étant entier, bien entendu) est que : 1° $f(x)$ soit nul ainsi que ses $n-1$ premières dérivées pour $x=a$; 2° que $f^n(a)$ soit différent de zéro.*

En effet, on a par la formule de Taylor, applicable au moins pour de petites valeurs de $x-a$,

$$f(x)=f(a+x-a)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\dots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(\theta),$$

θ désignant un nombre compris entre a et x; pour que $\dfrac{f(x)}{(x-a)^n}$ soit fini et différent de zéro, il faut et il sufit que

$$f(a)=0,\quad f'(a)=0,\quad \dots,\quad f^{n-1}(a)=0,\quad \lim f^n(\theta)\gtrless 0;$$

mais dire que $\lim f^n(\theta)$ doit être différent de zéro, cela veut dire que $f^n(a)$ doit être lui-même différent de zéro, car $f^n(\theta)$ tend vers $f(a)$.

IX. — QUELQUES MOTS SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

On appelle *transformée* d'une équation une seconde équation dont les racines soient des fonctions données des racines de la proposée.

PROBLÈME I. — *Soient* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *les racines d'une équation* $F(x) = 0$; *on propose de former une équation admettant pour racines* $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\ldots$, $\varphi(\lambda)$, *sans résoudre l'équation donnée.*

Voici une solution, et la seule qu'il soit utile de mentionner pour le moment. Posons

$$(1) \qquad \varphi(x) = z;$$

en résolvant cette équation, on en déduit

$$(2) \qquad x = \psi(z).$$

Si l'on forme alors l'équation

$$(3) \qquad F[\psi(x)] = 0,$$

il est clair que cette dernière sera satisfaite quand on y remplacera x par $\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \ldots, \varphi(\lambda)$. En effet, des équations (1) et (2) on tire

$$x = \psi(z) = \psi[\varphi(x)],$$

et par suite

$$\alpha = \psi[\varphi(\alpha)], \quad \beta = \psi[\varphi(\beta)], \quad \ldots;$$

donc

$$F(\alpha) = F\{\psi[\varphi(\alpha)]\} = 0, \quad F(\beta) = F\{\psi[\varphi(\beta)]\} = 0, \quad \ldots;$$

donc enfin l'équation (3) est bien la transformée demandée.

PREMIÈRE APPLICATION. — *Changer les signes des racines de l'équation* $F(x) = 0$.

On a

$$\varphi(x) = -x, \quad \psi(x) = -x, \quad F[\psi(x)] = F(-x).$$

L'équation qui satisfait à la question est donc

$$F(-x) = 0;$$

elle porte le nom de *transformée en* $-x$.

DEUXIÈME APPLICATION. — On verrait de même que

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

a pour racines les inverses des racines de l'équation $F(x) = 0$; c'est la *transformée en* $\frac{1}{x}$ de cette équation.

TROISIÈME APPLICATION. — *Augmenter d'une quantité* h *toutes les racines de l'équation* $F(x) = 0$.

On a

$$\varphi(x) = x + h, \quad \psi(x) = x - h;$$

la transformée est ici

$$F(x - h) = 0 \quad (*),$$

c'est-à-dire

$$F(x) - \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) - \ldots = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$F(-h) + \frac{x}{1}F'(-h) + \frac{x^2}{1.2}F''(-h)\ldots = 0.$$

(*) Tout ce qui vient d'être dit jusqu'ici dans ce paragraphe s'applique aux équations transcendantes.

REMARQUE. — En augmentant d'une quantité convenable les racines d'une équation, on obtient une équation transformée de même degré que la proposée. Supposons que l'équation proposée soit du degré n; si l'on pose alors

$$F^{i}(-h) = 0,$$

le terme en x^{i} disparaîtra de l'équation transformée, et l'on voit que pour faire disparaître ce terme il faudra résoudre l'équation précédente, qui est de degré $n - i$. Les solutions feront alors connaître les quantités dont il faut augmenter les racines de l'équation proposée pour faire disparaître le terme en x^{i} de la transformée. On voit que pour faire disparaître le terme indépendant de x il faudrait résoudre l'équation

$$F(-h) = 0,$$

ce qui revient au fond à résoudre l'équation proposée. On conçoit, en effet, que, la transformée ayant alors une racine égale à zéro, il faille diminuer chaque racine de la proposée d'une quantité égale à l'une d'elles, ce qui suppose que l'on sache résoudre celle-ci.

L'évanouissement du terme en x^{n-1} dépend de la résolution d'une équation du premier degré

$$F^{n-1}(-h) = 0.$$

Si l'on a

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$-na_n h + a_{n-1} = 0;$$

d'où l'on déduira

$$h = \frac{a_{n-1}}{na_n},$$

et l'équation

$$F\left(x - \frac{a_{n-1}}{na_n}\right) = 0$$

ne contiendra pas de terme en x^{n-1}.

Par exemple. l'équation générale du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

pourra toujours se ramener à la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

A cet effet, il suffira de remplacer x par $x - \frac{b}{3a}$ et de diviser le résultat par le coefficient de x^3 dans la transformée.

L'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$

se ramènera à la forme

$$x^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0.$$

En remplaçant x par $x - \frac{p}{2}$, les racines de la transformée sont

$$x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

celles de la proposée sont donc

$$x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2}.$$

X. — RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES.

Théorème I. — *Une équation de la forme*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité et dans laquelle les autres coefficients sont entiers, ne saurait avoir de racines fractionnaires.

En effet, si $x = \frac{p}{q}$ satisfaisait à cette équation, p et q désignant des entiers premiers entre eux, on aurait

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q}\, a_0 = 0,$$

ou bien, en multipliant par q^{n-1},

$$\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0,$$

et l'on déduirait de là pour $\frac{p^n}{q}$ une valeur entière, ce qui est absurde puisque p^n et q sont premiers entre eux. (On sait, en effet, que si p et q sont premiers entre eux, p^n et q le sont également.)

Si l'on donne une équation à coefficients entiers de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

et si l'on change x en $\frac{x}{a_n}$, cette équation prend la forme

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}a_n x^{n-2} + \ldots + a_1 a_n^{n-2} x + a_0 a_n^{n-1} = 0.$$

Ses racines ont été multipliées par a_n, mais, en vertu du théorème précédent, elle ne contient plus de racines fractionnaires; la recherche des racines commensurables se ramène donc en dernière analyse à la recherche des racines entières.

Théorème II. — *Les racines entières de l'équation à coefficients entiers*

$$F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

ne peuvent se trouver que parmi les diviseurs de son dernier terme.

Soit, en effet, ω une racine entière de cette équation, $F(x)$ devra être divisible par $x - \omega$ (t. I, p. 41); d'après la manière même dont se forment les différents termes du quotient (t. I, p. 41), on voit que ces termes auront des coefficients entiers. Or, de quelque manière que l'on opère la division, on doit toujours trouver pour quotient le même polynôme. Nous allons alors ordonner par rapport aux puissances croissantes de x et nous diviserons $F(x)$ par $\omega - x$, ce qui ne fait que changer le signe du quotient; les coefficients devant être entiers, $a_0 : \omega$, premier terme du quotient, devra donc être un nombre entier, ce qui démontre notre théorème.

En poursuivant le raisonnement précédent, il est facile de constater si le nombre ω, diviseur de a_0, est une racine de $F(x) = 0$. Achevons la division : si dans le courant de l'opération nous rencontrons un coefficient fractionnaire, nous nous arrêterons, car ω ne sera pas racine. Cette méthode a l'avantage de fournir immédiatement une équation débarrassée de la racine ω, de degré inférieur à $F(x)$, partant plus facile à résoudre et admettant du reste toutes les autres racines de $F(x)$.

Pour bien faire saisir l'esprit de la méthode précédente, nous l'appliquerons à l'équation

$$x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 74x^2 - 160x + 32 = 0;$$

nous vérifions immédiatement que $+1$ et -1 ne sont pas racines; il faut essayer successivement les diviseurs de 32 : nous commencerons par les plus petits, les calculs étant ainsi plus faciles. (Nous verrons un peu plus loin qu'il n'est pas toujours nécessaire d'essayer tous les diviseurs, parce que l'on détermine facilement des nombres au delà desquels il n'existe pas de racines de l'équation.)

Si l'on essaye le diviseur 2 et si l'on divise

$$32 - 160x + 74x^2 + 7x^3 - 8x^4 + x^5$$

par $2 - x$, on trouve pour quotient

$$16 - 72x + x^2 + 4x^3 - 2x^4 \ldots;$$

le terme en x^4 donne un reste; donc 2 n'est pas racine : c'est du reste ce qu'indique la suite de la division. On verrait de même que -2 n'est pas racine. Si l'on divise par $4 - x$, on trouve au contraire pour quotient exact

$$8 - 38x + 9x^2 + 4x^3 - x^4.$$

En divisant de nouveau par $4 - x$, on reconnaît que 4 est encore racine, et l'on trouve pour quotient

$$2 - 9x + x^3.$$

On est ainsi ramené à chercher les racines de l'équation

$$x^3 - 9x + 2 = 0,$$

qui n'admet pas de racines entières.

EXERCICES ET NOTES.

1. Toute équation algébrique peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} x^m & x^{m-1} & \ldots & x^2 & x & 1 \\ a^m & a^{m-1} & \ldots & a^2 & a & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l^m & l^{m-1} & \ldots & l^2 & l & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines sont alors $a, b, c, \ldots, l$, mais elles sont supposées inégales.

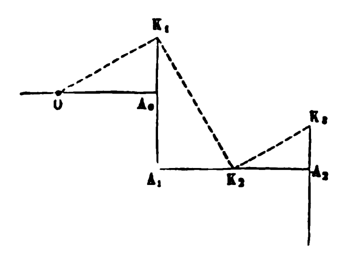
2. Soient a et b des nombres commensurables, et $\sqrt{b}$ un nombre

irrationnel, toute équation à coefficients entiers qui admet n fois la racine $a+\sqrt{b}$ admet le même nombre de fois la racine $a-\sqrt{b}$.

3. Soit $F(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, le déterminant suivant est indépendant de x :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & \ldots & l \\ a^2 & b^2 & \ldots & l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n-2} & b^{n-2} & \ldots & l^{n-2} \\ \dfrac{F(x)}{x-a} & \dfrac{F(x)}{x-b} & \ldots & \dfrac{F(x)}{x-l} \end{vmatrix}$$

4. OA_0, A_0A_1, A_1A_2, ... sont des droites de longueurs données a_0, a_1, a_2, ...; la première est perpendiculaire sur la seconde, celle-ci sur la troisième, etc. OK_1 fait avec OA_0 un angle φ; par le point K_1, où



OK_1 rencontre A_0A_1, on mène une perpendiculaire K_1K_2 sur OK_1; par le point K_2, où elle rencontre A_1A_2, on lui mène une perpendiculaire, et ainsi de suite, etc. Prouver que

$$A_nK_n = a_0 + a_1 \operatorname{tang}\varphi + a_2 \operatorname{tang}^2\varphi + \ldots + a_n \operatorname{tang}^n\varphi.$$

En conclure un moyen de résoudre graphiquement l'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0.$$

Un appareil pour la résolution des équations, fondé sur ce principe, a été construit par M. Lill.

5. Trouver le plus grand commun diviseur de plus de deux polynômes

6. Prouver que le polynôme de moindre degré divisible à la fois par P et Q est le produit PQ divisé par le plus grand commun diviseur de P et Q.

7. Si les racines de l'équation

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots = 0$$

sont en progression arithmétique, les racines extrêmes sont données par la formule

$$\frac{(nx + A)^2(n+1)}{3(n-1)} = (n-1)A^2 - 2nB.$$

(Gatti.)

8. Résoudre l'équation

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0,$$

dont les racines sont en progression arithmétique.

9. Pour que l'équation

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + kx + 1 = 0$$

ait toutes ses racines réelles, a, b, c ..., k désignant des nombres positifs, il faut que $a > m$. En général, il faut que

$$a > m, \quad b > \frac{m(m-1)}{1.2}, \quad c > \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \quad \ldots.$$

10. L'équation

$$1 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 x^2 + \ldots + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x^{m-1} + x^m = 0$$

a toutes ses racines réelles.

11. Dans toute équation qui n'a pas de coefficients nuls, et qui a toutes ses racines réelles, un coefficient quelconque est plus grand que la moyenne géométrique du précédent et du suivant.

(De Gua.)

12. Étant donnée une équation

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

on remplace les coefficients $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ respectivement par des nombres $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ qui en diffèrent peu; calculer l'erreur commise ainsi sur les valeurs de x.

Posons $b_i = a_i + \Delta a_i$: on aura, par exemple,

$$x = \varphi(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0) \tag{1}$$

et, par suite,

$$x + \Delta x = \varphi(a_m + \Delta a_m, \ldots, a_0 + \Delta a_0).$$

En développant le second membre par la formule de Taylor, on a, en tenant compte de l'équation (1),

$$\begin{aligned}\Delta x = &\Delta a_m \varphi_m(a_m + \theta \Delta a_m, a_{m-1} + \theta \Delta a_{m-1}, \ldots) \\ &+ \Delta a_{m-1} \varphi_{m-1}(a_m + \theta \Delta a_m, a_{m-1} + \theta \Delta a_{m-1}, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$\varphi_m, \varphi_{m-1}, \ldots$ désignant les dérivées de φ relatives à $a_m, a_{m-1}, \ldots$ et θ désignant un nombre compris entre 0 et 1. Δx est l'erreur : la formule précédente en donnera facilement une limite supérieure. On a en effet

$$\varphi_i = -x^i : [m a_m x^{m-1} + (m-1) a_{m-1} x^{m-2} \ldots];$$

ainsi, en appelant ξ ce que devient x quand on remplace a_i par

$$a_i + \theta \Delta a_i,$$

$$\Delta x = \frac{\xi^m \Delta a_m + \xi^{m-1} \Delta a_{m-1} + \ldots}{m \xi^{m-1}(a_m + \theta \Delta a_m) + (m-1)\xi^{m-2}(a_{m-1} + \theta \Delta a_{m-1}) + \ldots},$$

d'où l'on conclut facilement une limite supérieure de l'erreur Δx.

13. L'équation $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots T = 0$ a des racines imaginaires si $P^2 - 2Q < m\sqrt[m]{T^2}$.

(FAA DE BRUNO, *Journal de Liouville*, 1re série, t. XIV).

14. Une équation du troisième degré à coefficients rationnels ne peut pas avoir de racine de la forme $\alpha + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$, à moins que $\sqrt{\beta\gamma}$ soit un nombre rationnel. (LÉONARD DE PISE.)

15. Dans quel cas un polynôme est-il divisible par sa dérivée?

16. Si un polynôme P du premier degré divise les dérivées f'_x, f'_y, f'_z de la fonction homogène $f(x, y, z,)$, P^2 divisera la fonction f.

17. Condition pour que

$$x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0$$

ait une racine double, triple, quadruple.

18. Soient U et V deux polynômes entiers en x et λ une quantité indépendante de x. Si

$$U - \lambda V = 0$$

a une racine double, elle satisfait à l'équation

$$UV' - VU' = 0.$$

(Jacobi, *Fundamenta nova.*)

19. Soit D le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$; soient de plus

$$\frac{f(x)}{D} = P, \quad \frac{f'(x)}{D} = Q.$$

Le produit des facteurs de $f(x)$ dont l'ordre de multiplicité est n est le plus grand commun diviseur entre P et $Q - nP'$, P' désignant la dérivée de P. (Ostrogradsky.)

20. Soient $a, b, c, \ldots, l$ les racines de $f(x) = 0$ au nombre de m, le reste de la division de $f(x)$ par $f'(x)$ est

$$-\frac{1}{m^2}\sum(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-l).$$

(Sylvester.)

21. Résoudre les équations

$$x^7 - 8x^6 + 26x^5 - 41x^4 + 33x^3 - 26x^2 + 40x - 25 = 0,$$
$$x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

22. Déterminer a de telle sorte que

$$x^4 - 4ax^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$$

ait une racine double, et résoudre cette équation.

23. Déterminer a et b de telle sorte que

$$x^4 - 4ax^3 + 6bx^2 - 5x + 1 = 0$$

ait une racine triple.

24. Trouver les racines commensurables de

$$8x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 3 = 0.$$

25. Résoudre

$$1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^{n-1} + x^n = 0.$$

26. Résoudre

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 4 = 0.$$

27. L'équation

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{1.2} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{1.2.3\ldots(n+1)} = 0$$

n'a que des racines entières; les trouver.

28. Démontrer la formule du binôme en résolvant l'équation

$$x^m + \frac{m}{1}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\ldots = 0.$$

29. Soit M le plus grand coefficient de l'équation

$$-K + x + Ax^2 + Bx^3 \ldots = 0,$$

où K est positif; si l'on a

$$K < \frac{1}{4(M+1)},$$

l'équation aura une racine réelle positive et moindre que $\frac{1}{2(M+1)}$.

(MURPHY.)

CHAPITRE II.

SÉPARATION DES RACINES.

I. — MARCHE A SUIVRE POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION.

On ignore à qui l'on doit la résolution des équations du premier et du second degré; Tartaglia, Hudde, Cardan, etc., nous ont appris à résoudre celles du troisième (*); Louis Ferrari, disciple de Cardan, a résolu celles du quatrième; les efforts des géomètres ne les ont pas conduits au delà du quatrième degré, et Abel a démontré que l'équation générale du cinquième degré ne pouvait être résolue en ne faisant usage que des signes $+$, $-$, $.$, $:$, $\sqrt{\ }$ usités en Algèbre. (Pour la démonstration du théorème d'Abel, voir : 1° ses *OEuvres* ou 2° l'*Algèbre supérieure* de J.-A. Serret; 3° ou la *Théorie des substitutions et des équations algébriques* de C. Jordan.) On ne sait pas en général résoudre les équations algébriques; on sait encore moins résoudre (j'entends au moyen de formules analytiques) les équations transcendantes, mais on peut approcher tant que l'on veut de la valeur numérique des racines. Viète (1540-1600) est le premier qui se soit occupé de la résolution numérique des équations de degré quelconque (*De numerosa potestatum adfectarum resolutione.*)

(*) L'équation du second degré est résolue dans les OEuvres de Léonard de Pise (Fibonacci).

Pour résoudre une équation algébrique, on la débarrasse de ses racines multiples par la méthode donnée (p. 15); pour résoudre une équation transcendante, on essaye également d'en faire disparaître les racines multiples, mais souvent on ne pourra pas constater leur présence et encore moins s'en débarrasser. Cela fait :

1° On cherche des limites au delà desquelles il n'existe plus de racines; afin de diminuer l'intervalle dans lequel on doit chercher les racines, on essaye de resserrer autant que possible ces limites : nous verrons comment on peut trouver de telles limites.

2° S'il s'agit de résoudre une équation algébrique, on procédera à la recherche des racines entières, parce que cette recherche simplifie toujours l'équation, mais on ne procédera à cette recherche qu'après avoir trouvé les limites des racines, afin d'éviter les essais infructueux autant que possible.

3° On cherche des nombres *séparant* les racines, c'est-à-dire tels qu'entre deux de ces nombres il n'existe qu'une seule racine de l'équation à résoudre.

Le but de ce Chapitre est de montrer comment on peut séparer les racines d'une équation.

Quand ces opérations préliminaires sont terminées, on applique alors les méthodes d'approximation, qui feront l'objet du Chapitre suivant.

II. — PROPOSITIONS FONDAMENTALES.

Nous allons avoir souvent besoin de former la valeur d'un polynôme donné pour une valeur donnée de sa variable : voici le moyen le plus expéditif d'arriver au résultat.

Soient m la plus haute puissance de x, a_i le coefficient de x^i, s la valeur numérique attribuée à x; après avoir

formé le produit sa_m, on y ajoute a_{m-1} et l'on multiplie le résultat par s. On ajoute a_{m-2} au produit et l'on multiplie ce nouveau résultat par s, et ainsi de suite. Cette règle n'a pas besoin d'être démontrée.

Théorème. — *Désignons par* $\mathrm{F}(x)$ *un polynôme entier en* x *à coefficients réels.*

1° *Si* $\mathrm{F}(a)$ *et* $\mathrm{F}(b)$ *sont de signes contraires, l'équation*

$$\mathrm{F}(x)=0 \tag{1}$$

admettra au moins une racine réelle comprise entre a *et* b, *et en tout cas un nombre impair de racines comprises entre ces limites.*

2° *Si* $\mathrm{F}(a)$ *et* $\mathrm{F}(b)$ *sont de mêmes signes, l'équation* (1) *n'aura pas de racines comprises entre* a *et* b, *ou bien en aura un nombre pair.*

En effet, la fonction $\mathrm{F}(x)$ étant continue entre les limites a et b, si $\mathrm{F}(a)$ et $\mathrm{F}(b)$ sont l'un positif, l'autre négatif, zéro sera une valeur intermédiaire par laquelle $\mathrm{F}(x)$ devra passer; en second lieu, je dis qu'entre a et b il existe forcément un nombre impair de racines. Pour le démontrer, désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ les racines comprises entre a et b; plusieurs d'entre elles pouvant être égales, on aura

$$\mathrm{F}(x)=\varphi(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda), \tag{2}$$

$\varphi(x)$ désignant le produit des facteurs binômes de $\mathrm{F}(x)$ correspondant aux racines non comprises entre a et b. $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont deux quantités de même signe, sans quoi $\varphi(x)$ pourrait s'annuler entre les limites a et b, serait par conséquent divisible par un facteur tel que $x-\omega$, ω étant compris entre a et b, et pourrait se mettre sous forme

$$\varphi(x)=\psi(x)(x-\omega);$$

par suite, on aurait

$$F(x) = \psi(x)(x-\omega)(x-\alpha)\ldots(x-\lambda),$$

et $F(x)$ s'annulerait pour $x=\omega$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ne seraient donc pas les seules racines comprises entre a et b.

Ceci posé, si l'on fait successivement $x=a$, $x=b$ dans l'équation (2), le premier membre prend des valeurs de signe contraire; il doit donc en être de même du second. Or $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont de même signe; donc

$$(a-\alpha)(a-\beta)\ldots(a-\lambda) \quad \text{et} \quad (b-\alpha)(b-\beta)\ldots(b-\lambda)$$

sont de signe contraire, ce qui ne peut avoir lieu que si les facteurs $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $\ldots$, $(x-\lambda)$ sont en nombre impair, car $a-\alpha$ et $b-\alpha$, $a-\beta$ et $b-\beta$, ... sont de signes contraires, et par suite le nombre des racines α, $\beta, \ldots, \lambda$ est impair. Si au contraire $F(a)$ et $F(b)$ étaient de même signe, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ devraient être en nombre pair ou nul. C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème aurait encore lieu si $F(x)$ était une fonction quelconque continue entre a et b, mais n'ayant entre ces limites que des racines d'un ordre de multiplicité entier, car $F(x)$ serait encore de la forme (2).

Corollaire I. — *Toute équation* $F(x)=0$ *de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle et toujours un nombre impair de racines réelles.*

Car le premier membre prend les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ quand on y fait $x=\pm\infty$ et $x=\mp\infty$.

Corollaire II. — *Toute équation* $F(x)=0$ *de degré pair à coefficients réels admet un nombre pair de racines réelles, ce nombre pouvant du reste se réduire à zéro.*

Car son premier membre a le même signe pour $x=+\infty$ et $x=-\infty$.

Corollaire III. — *Toute équation* $F(x)=0$ *de degré pair, dans laquelle le premier terme et le dernier sont de signe contraire, a au moins deux racines réelles.*

En effet, $F(0)$ et $F(+\infty)$ sont de signes contraires, $F(0)$ et $F(-\infty)$ aussi.

III. — LIMITES DES RACINES.

On appelle *limite supérieure* (ou *limite inférieure*) des racines d'une équation un nombre supérieur (ou inférieur) à la plus grande (ou à la plus petite) des racines de cette équation.

Une limite supérieure des racines d'une équation $F(x)=0$ est un nombre qui, substitué à la place de l'inconnue x, fait acquérir au premier membre un signe qu'il ne perd plus pour des valeurs supérieures de x.

Soit, en effet, λ une limite supérieure des racines positives de $F(x)=0$ et supposons $F(\lambda)$ positif; si l'on avait, pour une valeur α de x supérieure à λ, $F(\alpha)<0$, il y aurait une racine de $F(x)=0$ entre λ et α, ce qui est impossible, puisque λ est plus grand que la plus grande racine de $F(x)=0$.

Une remarque analogue pourrait être faite sur la limite inférieure des racines positives et sur chacune des limites des racines négatives.

Réciproquement, si, pour $x\geqq\lambda$, $F(x)$ conserve toujours le même signe, λ est une limite supérieure des racines; si, au contraire, pour $x\leqq\lambda$, $F(x)$ conserve toujours le même signe, λ est une limite inférieure des racines.

C'est sur ce principe que nous allons nous appuyer dans la recherche des limites des racines; nous indiquerons seulement le moyen de trouver une limite supérieure des racines positives. En effet, la limite inférieure des racines

positives de $F(x)=0$ est égale à la limite supérieure des racines positives de $F\left(\frac{1}{x}\right)=0$, que l'on peut ramener à la forme $f(x)=0$, f désignant un polynôme entier en x, en chassant les dénominateurs; de même, la limite supérieure des racines négatives de $F(x)=0$ est égale à la limite inférieure des racines positives de $F\left(-\frac{1}{x}\right)=0$. Enfin la limite inférieure des racines négatives n'est autre chose que la limite supérieure des racines positives de

$$F(-x)=0.$$

Première méthode. — Considérons l'équation

$$F(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_ix^i+\ldots+a_0.$$

En supposant $x>0$, en désignant par N la valeur du plus grand coefficient négatif et par a_ix^i le premier terme négatif, on a

$$F(x)>x^n-N(x^i+x^{i-1}+\ldots+1),$$

ou bien

$$F(x)>x^n-N\frac{x^{i+1}-1}{x-1},$$

c'est-à-dire

$$F(x)>\frac{x^n(x-1)-Nx^{i+1}+N}{x-1},$$

et *a fortiori*

$$F(x)>\frac{x^n(x-1)-Nx^{i+1}}{x-1}.$$

On rendra donc $F(x)$ positif en prenant à la fois

$$x>1,\quad x^n(x-1)-Nx^{i+1}>0.$$

La seconde formule peut s'écrire comme il suit :

$$x^{n-i-1}(x-1)-N>0,$$

et elle sera satisfaite *a fortiori* si l'on prend

$$(x-1)^{n-i} - N > 0,$$

ou

$$x > 1 + \sqrt[n-i]{N};$$

$1 + \sqrt[n-i]{N}$ est donc une limite supérieure des racines positives, et, si $N > 1$, on voit que $N + 1$ sera *a fortiori* une limite supérieure des racines (*).

SECONDE MÉTHODE, DITE DE NEWTON. — Si λ est une valeur de x qui rend positif le polynôme $F(x)$ et toutes ses dérivées, λ est une limite supérieure des racines positives de $F(x) = 0$.

(*) Cette méthode permet aussi de trouver une limite supérieure des modules des racines. Soient en effet $\rho_{n-1}, \rho_{n-2}, \ldots, \rho_0$ les modules respectifs de $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$; on peut écrire

$$F(x) = x^m \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}\right),$$

et il est clair que, si l'on choisit le module r de x tel que

$$\frac{\rho_{n-1}}{r} + \frac{\rho_{n-2}}{r^2} + \cdots + \frac{\rho_0}{r^m} < 1,$$

on aura

$$\text{mod.}\left(\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}\right) < 1;$$

cette inégalité subsistera pour des valeurs croissantes de r, et l'on satisfera à la première inégalité en prenant

$$R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots\right) < 1,$$

R étant le plus grand des modules $\rho_{n-1}, \rho_{n-2}, \ldots, \rho_0$, ou en prenant $r > 1$ et

$$\frac{r-1}{R} > 1,$$

ou enfin en prenant $r > R + 1$; $R + 1$ *est donc une limite supérieure des modules des racines de* $F(x) = 0$.

En effet, en désignant par h une quantité positive, la formule de Taylor donne

$$F(\lambda+h)=F(\lambda)+hF'(\lambda)+\frac{h^2}{1.2}F''(\lambda)+\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\lambda)+\ldots.$$

Si donc $F(\lambda)$, $F'(\lambda)$, ... sont positifs ainsi que h, $F(\lambda+h)$ le sera aussi, quelle que soit la quantité positive h; ce qui revient à dire que λ est une limite supérieure des racines positives.

On peut généraliser le théorème précédent et lui donner une forme plus utile :

Soit $F(x)=0$ *une équation quelconque dans laquelle* $F(x)$ *reste fini et continu ainsi que ses n premières dérivées quel que soit* x; *si pour une valeur* λ *de* x *on a*

$$F(\lambda)>0,\quad F'(\lambda)>0,\quad \ldots,\quad F^n(\lambda)>0,$$

et si en outre, pour toute valeur de x *supérieure à* λ, *on a* $F^n(x)>0$, λ *sera une limite supérieure des racines de* $F(x)=0$.

En effet, quel que soit le nombre positif h, on a

$$F(\lambda+h)=F(h)+hF'(\lambda)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(\lambda+\theta h),$$

θ étant compris entre zéro et 1, et l'on voit que $F(\lambda+h)$ est une somme de termes essentiellement positifs si les hypothèses admises sont satisfaites; donc, pour toute valeur de x supérieure à λ, $F(x)$ est positif et, par suite, ne peut être nul.

Pour appliquer la méthode de Newton, on commence par former les dérivées successives du premier membre de l'équation proposée $F(x)=0$ en les divisant, si cela sim-

plifie, par les facteurs numériques $1, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \ldots$; puis on change le signe de $F(x)$ s'il y a lieu, de telle sorte que $F(+\infty)$ soit positif.

Soit $F^n(x)$ une dérivée de $F(x)$ qui reste positive pour $x > a$. [Si $F(x)$ est un polynôme entier, l'avant-dernière dérivée de ce polynôme, qui est du premier degré, restera évidemment positive pour toute valeur a de x supérieure à la racine de l'équation obtenue en égalant cette dérivée à zéro.] Si a rend positifs $F^{n-1}(x)$, $F^{n-2}(x)$, $\ldots$, $F(x)$, a sera la limite cherchée; s'il n'en est pas ainsi, soit $F^{n-p}(x)$ la dérivée d'ordre le plus élevé qui cesse d'être positive pour $x = a$: on substituera dans cette dérivée des nombres plus grands que a jusqu'à ce que l'on trouve un nombre b qui la rende positive. $F^{n-p+1}(b), \ldots, F^n(b)$ seront positifs, puisqu'ils le sont pour $x = a < b$, en vertu du théorème que nous venons de démontrer. On substituera alors b dans les dérivées d'ordre inférieur à $n-p$ et dans $F(x)$. Si l'on obtient des résultats positifs, b sera la limite cherchée; sinon, on déterminera un nombre c d'une façon analogue à celle dont on a déterminé b, et ainsi de suite.

Considérons, par exemple, l'équation

$$F(x) = x^6 - 3x^4 + 8x^2 - 7x - 8 = 0;$$

on a

$$F'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 16x - 7,$$

$$\frac{1}{2}F''(x) = 15x^4 - 18x^2 + 8,$$

$$\frac{1}{6}F'''(x) = 20x^3 - 12x = 4x(5x^2 - 3).$$

Cette dernière dérivée est positive pour $x > \frac{3}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}F''(x)$ est positif pour cette valeur de x; $F'(x)$ est encore positif

pour cette valeur de x; mais $F(x)$ est négatif pour $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$; tout nombre plus grand que $\frac{2}{\sqrt{3}}$ rendant $F(x)$ positif sera alors une limite supérieure des racines de cette équation, $x = \sqrt{3}$ par exemple.

M. Laguerre a fait connaître une méthode beaucoup plus simple que celle de Newton pour trouver une limite supérieure des racines de l'équation algébrique

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m.$$

On a (t. I, p. 42), en divisant $f(x)$ par $x - a$,

$$f(x) = (x - a)[x^{m-1} f_1(a) + x^{m-2} f_2(a) + \ldots + f_{m-1}(a)] + f(a),$$

formule où l'on a posé

$$f_1(a) = A_m,$$
$$f_2(a) = A_m a + A_{m-1},$$
$$f_3(a) = A_m a^2 + A_{m-1} a + A_{m-2}, \quad \ldots.$$

Il résulte de cette formule que :

Si le nombre positif a rend positifs $f_1(a), f_2(a), \ldots, f_{m-1}(a)$, ce nombre a sera une limite supérieure des racines positives de $f(x) = 0$.

La supériorité de cette méthode sur celle de Newton consiste en ce que le calcul des polynômes $f_1, f_2, \ldots$ est infiniment plus facile que celui des dérivées de f, chacun d'eux se déduisant du précédent en le multipliant par a et en lui ajoutant un nombre A.

Méthode du groupement des termes. — Souvent la meilleure manière de trouver une limite supérieure des racines d'une équation consiste à décomposer son premier membre en plusieurs parties qui restent toutes positives;

mais cette méthode, laissant beaucoup d'arbitraire dans les calculs, demande à être maniée avec habileté. Le théorème général qui suit en facilitera l'application :

Considérons une expression de la forme

$$\begin{aligned}F(x) = {} & A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots \\ & + A_n x^n - A_{n-1} x^{n-1} - A_{n-2} x^{n-2} - \ldots - A_p x^p,\end{aligned}$$

dans laquelle il existe une série de termes positifs suivie d'une série de termes négatifs, ces termes étant ordonnés suivant les puissances décroissantes de x ; *si* $F(x)$ *est positif pour* $x = a > 0$, $F(x)$ *restera positif pour toute valeur supérieure de* x.

En effet, on peut écrire

$$F(x) = x^n \left(A_m x^{m-n} + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_n - \frac{A_{n-1}}{x} - \ldots - \frac{A_p}{x^{n-p}} \right);$$

or la quantité entre parenthèses se compose de deux parties, l'une additive croissante, l'autre soustractive décroissante quand x croît à partir d'une valeur positive a quelconque de x ; si donc $F(a)$ est positif, $F(x)$ sera, *a fortiori*, positif pour des valeurs de x supérieures à a.

L'équation considérée tout à l'heure

$$x^6 - 3x^4 + 8x^2 - 7x - 8 = 0$$

peut se décomposer en deux groupes, $x^6 - 3x^4 = x^4(x^2 - 3)$ et $8x^2 - 7x - 8$; le premier est positif pour $x > \sqrt{3}$, le second aussi ; donc $\sqrt{3}$ est une limite supérieure des racines de l'équation.

IV. — MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES POUR SÉPARER LES RACINES D'UNE ÉQUATION.

Lorsque l'on veut séparer les racines d'une équation $F(x)=0$, la première idée qui se présente est de substituer à la place de l'inconnue, dans le premier membre de l'équation, différents nombres; lorsque deux nombres suffisamment rapprochés donneront au premier membre des valeurs de signes contraires, ils comprendront au moins une racine (p. 34). En substituant des nombres intermédiaires, on pourra donc resserrer indéfiniment l'espace comprenant une racine et, ainsi, calculer les racines réelles avec une approximation qui ne peut être limitée que par la patience du calculateur.

Cependant, cette manière de procéder, dite *méthode des substitutions successives,* présente de graves inconvénients.

Il peut se faire que deux racines soient peu différentes, et alors on sera exposé à faire un nombre très considérable de substitutions avant de soupçonner l'existence d'une racine dans un intervalle déterminé. Lagrange, à la vérité, a proposé de former l'équation aux carrés des différences (*). Soit λ^2 une limite inférieure des racines positives de cette équation; si, à partir de la limite inférieure Λ des racines de l'équation proposée, on substitue des nombres Λ, $\Lambda+\lambda$, $\Lambda+2\lambda$, ..., jusqu'à ce que l'un deux, $\Lambda+n\lambda$, devienne égal à la limite supérieure des racines de l'équation proposée, on est sûr que l'on aura ainsi séparé toutes les racines, et deux valeurs consécutives $\Lambda+i\lambda$ et $\Lambda+(i+1)\lambda$, qui donneront des résultats de signes con-

(*) C'est-à-dire l'équation dont les racines sont les carrés des différences des racines de l'équation proposée.

traires, comprendront une racine de l'équation proposée et une seule. Si les valeurs $\Lambda + i\lambda$ et $\Lambda + (i+1)\lambda$ donnaient des résultats de même signe, ces quantités ne comprendraient pas de racine de l'équation proposée; mais la méthode de Lagrange est encore très difficile à appliquer, car la formation de l'équation aux carrés des différences est une opération très pénible, qui peut ne pas dispenser d'un nombre très considérable de substitutions.

Quoi qu'il en soit, la méthode des substitutions successives ne doit pas être complètement bannie et, dans un grand nombre de cas, elle sera encore plus avantageuse que d'autres procédés dont la perfection théorique ne laisse rien à désirer. Nous allons, dans les paragraphes suivants, faire connaître divers théorèmes qui conduisent aux méthodes de séparation le plus fréquemment en usage.

V. — THÉORÈME DE DESCARTES.

Deux termes consécutifs d'une suite $a, b, c, \ldots, l$ forment une *permanence* lorsqu'ils sont de même signe et une *variation* lorsqu'ils sont de signes contraires; nous appellerons *variations* ou *permanences* d'un polynôme $F(x)$ ou d'une équation $F(x) = 0$ les variations ou les permanences que présente la suite des termes de $F(x)$. Ceci posé, voici en quoi consiste le théorème de Descartes.

Théorème I. — *Si* $F(x) = 0$ *désigne une équation algébrique dans laquelle* $F(x)$ *représente un polynôme ordonné par rapport aux puissances de* x, *le nombre des racines positives de* $F(x) = 0$ *ne pourra jamais surpasser le nombre des variations de la même équation, et la différence entre ces deux nombres, si elle n'est pas nulle, est toujours paire.*

Pour démontrer cette proposition, considérons un polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x

$$(1)\qquad \mathrm{A}x^m + \ldots - \mathrm{B}x^n - \ldots + \mathrm{C}x^p + \ldots \pm \mathrm{S}x^u.$$

Le signe de chaque terme ayant été mis en évidence, nous supposerons que de $\mathrm{A}x^m$ à $-\mathrm{B}x^n$ exclusivement il n'y ait que des termes positifs, de $-\mathrm{B}x^n$ à $+\mathrm{C}x^p$ exclusivement il n'y ait que des termes négatifs, etc., le signe du dernier terme $\mathrm{S}x^u$ pouvant être quelconque.

Multiplions ce polynôme par $x - a$, a désignant une quantité positive ; le résultat de cette multiplication pourra s'écrire comme il suit, en plaçant l'un au-dessous de l'autre les coefficients des mêmes puissances de x provenant des produits partiels du polynôme par x et par $-a$:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \mathrm{A}x^{m+1} + \ldots - \mathrm{B} & x^{n+1} + \ldots + \mathrm{C} & x^{p+1} + \ldots \pm \mathrm{S} & x^{u+1} \\ \ldots\ldots\ldots - & \ldots\ldots\ldots + & \ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad \mp \mathrm{S}ax^u. \end{array}$$

Dans la première ligne, les coefficients des différents termes sont identiques aux coefficients de même rang dans le polynôme (1) ; dans la seconde ligne, les termes, à partir du premier jusqu'au terme en x^{n+1} exclusivement, ont le signe $-$; ces termes pourront se réduire avec certains termes de la première ligne, mais, en tout cas, le terme $\mathrm{A}x^{m+1}$ de la première ligne ne se réduira avec aucun autre. Quant au terme en x^{n+1}, il a encore le signe $-$, puisqu'il provient du produit par $-a$ du terme en x^{n+1} dans le polynôme (1), terme positif par hypothèse ; en se réduisant avec le terme immédiatement supérieur dans la première ligne, il fournira un terme négatif en x^{n+1} au produit total. Le même raisonnement prouve qu'au produit total le terme en x^{p+1} a le signe $+$, et ainsi de suite, en sorte que les termes en x^{m+1}, x^{n+1}, x^{p+1}, ... du produit cherché ont les mêmes signes que les termes en x^m, x^n, x^p, ...

du multiplicande (1); donc, jusqu'au terme en x^{r+1}, r désignant l'exposant du terme à partir duquel le multiplicande ne présente plus que des permanences, le produit présente au moins autant de variations que le multiplicande. J'ajoute que, si ce nombre n'est pas le même au multiplicande et au produit, la différence est nécessairement un nombre pair; en effet :

Si l'on considère deux termes présentant des signes contraires, pour passer de l'un à l'autre il a fallu changer de signe un nombre impair de fois; chaque changement de signe représentant une variation, ils comprennent un nombre impair de variations. Si l'on considère alors les termes en x^{m+1} et en x^{n+1} du produit, on voit qu'ils comprennent un nombre impair de variations; les termes en x^m et en x^n au multiplicande en comprenant une, la différence est un nombre pair. Ce qui vient d'être dit de l'intervalle compris entre les termes en x^m et x^n pourrait se répéter pour les autres intervalles qui correspondent à une variation du multiplicande; en sorte que, depuis le terme en x^{m+1} jusqu'au terme en x^{r+1} inclusivement, le produit possède un nombre pair de variations de plus que le multiplicande.

Mais le dernier terme $\mp \mathrm{S}ax^u$ du produit est évidemment de signe contraire au terme en x^{r+1} : il y a donc là un nombre impair de variations qui n'ont pas leurs correspondantes au multiplicande; donc le produit présente au moins une variation de plus que le multiplicande, et en tout cas un nombre impair de variations de plus que le multiplicande.

En résumé, *si l'on multiplie par $x - a$ un polynôme à coefficients réels, le produit présente un nombre impair de variations de plus que le multiplicande.*

Ceci posé, considérons une équation algébrique à coef-

ficients réels

(2) $$F(x) = 0.$$

Appelons X le quotient de $F(x)$ par le produit de ses facteurs linéaires correspondant aux racines positives de l'équation (2); si X n'est pas une quantité indépendante de x, ce sera un polynôme qui pour $x = 0$ et $x = \infty$ conservera le même signe, et dont le premier et le dernier terme seront par conséquent de mêmes signes : il présentera donc un nombre pair de variations. Si nous multiplions alors X successivement par chacun des facteurs linéaires de $F(x)$ correspondant à ses racines positives, on introduira à chaque opération un nombre impair de variations et l'on reproduira finalement le polynôme $F(x)$. Soit alors p le nombre des racines positives de $F(x)$, le nombre de variations de $F(x)$ sera un nombre pair augmenté de p nombres impairs, c'est-à-dire un nombre pair plus p (*).

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Considérons une équation à coefficients réels $F(x) = 0$ et *sa transformée en* $-x$, $F(-x) = 0$, le nombre des racines négatives de $F(x) = 0$ ne pourra pas surpasser le nombre des variations de la transformée en $-x$.

Corollaire II. — *Si une équation algébrique a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des variations de la transformée en* $-x$.

En effet, soient m le degré de l'équation, v le nombre des variations, v' le nombre des variations de la transformée en $-x$, p le nombre des racines positives, n celui des racines négatives. Soient Gx^{μ} et Hx^{ν} deux termes consécu-

(*) Cette démonstration est de Gauss.

tifs quelconques de l'équation. Si ν est égal à $\mu - 1$, il est évident que, si ces termes présentent une variation, les termes correspondants de la transformée en $-x$ n'en présenteront pas, et *vice versa*. Il résulte de là que, relativement aux deux termes Gx^μ, Hx^ν, la somme des variations de l'équation proposée et de sa transformée en $-x$ est au plus égale à 1 si $\mu - \nu$ est égal à 1, et au plus égale à 2 dans les autres cas. Donc cette somme est toujours égale ou inférieure à $\mu - \nu$. On a donc

$$v + v' \leqq \sum (\mu - \nu),$$

c'est-à-dire

(3) $$v + v' \leqq m.$$

Mais on a

(4) $$p \leqq v, \quad n \leqq v',$$

ou

$$p + n \leqq v + v'.$$

Mais, puisque l'équation a toutes ses racines réelles,

$$p + n = m;$$

on a donc

$$m \leqq v + v'.$$

En comparant cette formule avec (3), on en conclut

$$m = v + v',$$

ou bien

$$p + n = v + v'.$$

Les formules (4) donnent alors

$$p = v, \quad n = v'.$$

COROLLAIRE III. — *Toutes les fois qu'il manque un terme entre deux de mêmes signes, ou deux termes entre deux de signes contraires, cette circonstance introduit un couple de racines imaginaires au moins.*

En effet, si l'on considère deux termes consécutifs Gx^{μ}, Hx^{ν}, la somme des variations de la proposée et de la transformée en $-x$ relativement à ces deux termes est

o	s'il manque	un terme	entre Gx^{μ} et Hx^{ν}	de mêmes signes.
1	»	deux termes	»	de signes contraires.
1	»	deux termes	»	de mêmes signes.

Dans ces trois cas, et *a fortiori* s'il manquait plus de deux termes, la somme des variations de la proposée et de la transformée en $-x$ relatives à ces deux termes serait au plus égale à $\mu - \nu - 2$. On peut donc écrire

$$v + v' \leqq \Sigma(\mu - \nu - 2),$$

ou

$$(1) \qquad v + v' \leqq m - 2s,$$

s désignant le nombre de fois que la circonstance en question dans l'énoncé se présente. On a en outre, en appelant i le nombre de couples de racines imaginaires,

$$(2) \qquad m = n + p + i,$$

$$(3) \qquad n + p \leqq v + v';$$

de (1) et (3) on tire

$$n + p \leqq m - 2s;$$

ajoutant avec l'équation (2), on a

$$0 \leqq i - 2s \quad \text{ou} \quad i \geqq 2s,$$

ce qu'il fallait prouver.

VI. — DÉMONSTRATION D'UN LEMME IMPORTANT.

Théorème I. — *Soit $f(x)$ une fonction continue ainsi que sa dérivée pour $x=a$; si l'on a $f(a)=0$, $f(x)$ et $f'(x)$ seront de mêmes signes pour des valeurs de x un peu supérieures à x, et de signes contraires pour des valeurs de x un peu inférieures à a.*

a

Soit m l'ordre de multiplicité de la racine a, on aura

$$f(x)=(x-a)^m\varphi(x);$$

$\varphi(x)$ n'étant ni nul, ni infini pour $x=a$, on en conclut

$$f'(x)=m(x-a)^{m-1}\varphi(x)+(x-a)^m\varphi'(x),$$

d'où

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-a)\frac{\varphi(x)}{m\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)};$$

or, si x est suffisamment voisin de a, le multiplicateur de $x-a$ sera très voisin de $\frac{1}{m}$ et $\frac{f(x)}{f'(x)}$ aura le signe de $x-a$. Il passera donc comme $x-a$ du négatif au positif quand x croîtra en passant par a, ce qui démontre notre théorème. Cette démonstration suppose que $\varphi'(x)$ n'est pas infini; en voici une autre qui n'est pas sujette au même inconvénient. On a, par la formule de Taylor,

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'[a+\theta(x-a)],$$

θ étant compris entre 0 et 1. Si l'on fait $f(a)=0$, on a

$$f(x)=(x-a)f'[a+\theta(x-a)];$$

$f'[a+\theta(x-a)]$ est de même signe que $f'(x)$ si x est suffisamment voisin de a : le théorème se trouve donc ainsi établi pour le cas où $f'(x)\gtrless 0$.

On peut encore démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME II. — *Soit $f(x)$ une fonction qui s'annule pour $x = a$, mais en restant continue ainsi que ses dérivées; soit $f^n(x)$ la première de ces dérivées différente de zéro pour $x = a$; si l'on désigne par ε une quantité positive suffisamment petite, $f(a \pm \varepsilon)$ aura le signe de $(\pm 1)^n f^n(a)$.*

En effet, la formule de Taylor donne

$$f(a \pm \varepsilon) = f(a) \pm \varepsilon f'(a) \cdots \frac{(\pm \varepsilon)^n}{1.2.3\ldots n} f^n(a \pm \theta\varepsilon);$$

or, $f(a), f'(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ étant nuls, on a

$$f(a \pm \varepsilon) = \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} (\pm 1)^n f^n(a \pm \theta\varepsilon);$$

or, $f^n(a \pm \theta\varepsilon)$ est de même signe que $f^n(a)$, si ε est assez petit; le théorème est donc démontré.

VII. — THÉORÈME DE ROLLE.

On donne aujourd'hui le nom de *théorème de Rolle* à des théorèmes qui sont des généralisations plus ou moins étendues d'un théorème énoncé par Rolle, et dont il a fait usage dans une méthode qu'il avait inventée pour la résolution des équations et à laquelle il a donné le nom de *méthode des cascades* (*).

(*) Rolle donne le nom de *cascades* à une équation algébrique $f(x) = 0$, dans laquelle $f(x)$ est un *polynôme entier*, et aux équations $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0, \ldots$; il appelle *hypothèses* d'une cascade $f^i(x) = 0$, les racines de l'équation $f^{i+1}(x) = 0$ et une limite supérieure des racines de $f^1(x) = 0$. Enfin il appelle *racines effectives d'une équation* ses racines positives.

Voici maintenant l'énoncé du théorème de Rolle textuellement copié dans son Algèbre (1690) :

« *Lorsqu'il y a des racines effectives dans une cascade, les hypothèses de cette cascade donnent alternativement l'une + et l'autre —.* »

Nous ferons d'abord quelques remarques; nous rappellerons que (t. II, p. 165) :

Si $f(x)$ s'annule pour $x = a$ et $x = b$ et a une dérivée bien déterminée pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, $f'(x)$ s'annulera pour une valeur c de x comprise entre a et b.

En particulier :

Si $f(x)$ est un polynôme entier, deux racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ comprendront au moins une racine de l'équation $f'(x) = 0$.

Mais on peut aller plus loin :

$f(x)$ désignant toujours un polynôme entier, deux racines consécutives a et b de $f(x) = 0$ comprennent toujours un nombre impair de racines de $f'(x) = 0$.

En effet, soit ε une quantité positive assez petite pour que ni $f(x)$ ni $f'(x)$ ne change de signe quand x varie entre a et $a + \varepsilon$ ou entre $b - \varepsilon$ et b ; d'après le lemme démontré au paragraphe précédent, $\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)}$ et $\frac{f'(b-\varepsilon)}{f(b-\varepsilon)}$ seront de signes contraires; mais, a et b étant racines *consécutives* de $f(x)$, $f(a + \varepsilon)$ et $f(b - \varepsilon)$ sont de mêmes signes; donc $f'(a + \varepsilon)$ et $f'(b - \varepsilon)$ sont de signes contraires; donc entre $a + \varepsilon$ et $b - \varepsilon$, ou entre a et b, il y a un nombre impair de racines de $f'(x) = 0$.

Ce théorème s'appliquerait encore à une fonction transcendante continue entre a et b $f(x)$, *si, entre a et b,* $f(x) = 0$ *n'avait que des racines d'un ordre de multiplicité entier*. En effet, rien n'a supposé $f(x)$ entier dans notre raisonnement; on a seulement admis que, $f'(a+\varepsilon)$ et $f'(b-\varepsilon)$ étant de signes contraires, $a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon$ comprenaient un nombre impair de racines de $f'(x) = 0$. Ce qui n'est pas vrai pour toutes les formes de $f(x)$.

Il résulte de la remarque précédente que :

Entre deux racines de $f'(x) = 0$ *consécutives, il ne peut exister plus d'une racine de* $f(x) = 0$; sans quoi, entre deux racines de $f(x) = 0$, il n'y aurait pas toujours une racine de $f'(x) = 0$.

De toutes ces remarques résulte le théorème de Rolle, que nous traduisons en langage moderne :

Théorème de Rolle. — *Soit* $f(x)$ *un polynôme entier; soient* $a, b, c, \ldots, l$ *les racines réelles de* $f'(x) = 0$ *rangées par ordre de grandeur croissante. Formons la suite*

$$f(-\infty),\ f(a),\ f(b),\ \ldots,\ f(l),\ f(\infty).$$

Elle présentera autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ *aura de racines réelles, et les quantités* $-\infty$, $a, b, \ldots, l + \infty$ *serviront à séparer les racines de* $f(x) = 0$, c'est-à-dire que *si* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont, par exemple, de mêmes signes, il n'y aura pas de racines de* $f(x)$ *entre a et b, tandis qu'il n'y en aura qu'une si* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont de signes contraires.*

En effet, soient p et q deux termes consécutifs de la suite $-\infty, a, b, \ldots, l + \infty$; entre p et q il ne peut y avoir au plus qu'une racine de $f(x) = 0$; il y en aura une si $f(p)$ et $f(q)$ présentent une variation, il n'y en aura pas s'ils présentent une permanence.

Corollaire. — Pour qu'une équation $f(x)=0$, $f(x)$ désignant un polynôme entier, ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que, $a, b, \ldots, l$ désignant les racines de $f'(x)=0$, 1° toutes ces racines soient réelles; 2° qu'étant rangées par ordre de grandeur, la suite

$$f(-\infty), f(a), f(b), \ldots, f(l), f(\infty)$$

ne présente que des variations.

Nous appliquerons ces considérations à la recherche de la condition de réalité des racines de l'équation

$$(1) \qquad x^3+px+q=0;$$

sa dérivée est

$$(2) \qquad 3x^2+p=0.$$

Si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, l'équation (2) aura ses racines réelles aussi. Il faut donc que p soit négatif pour que l'équation (1) ait toutes ses racines réelles; mais il faut en outre, et il suffit, que les racines de l'équation (2), substituées à la place de x dans l'équation (1), fournissent, la première un résultat positif, la seconde un résultat négatif.

Les racines de (2) sont $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$; en substituant ces valeurs dans le premier membre de l'équation (1), on a

$$\mp\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\pm p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q;$$

en prenant le signe —, on devra donc avoir

$$(3) \qquad \sqrt{-\frac{p^3}{27}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0,$$

ou bien

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0,$$

ce qui a lieu si $q > 0$ et ce qui donne, si $q < 0$,

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0;$$

en prenant le signe + devant le radical, on aura au contraire

(4) $$-\sqrt{-\frac{p^3}{27}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0,$$

ce qui a lieu si $q < 0$ et ce qui fournit le même résultat que tout à l'heure si $q > 0$; ainsi $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ est la condition de réalité des racines. Si l'on veut savoir dans quel cas les racines sont égales, il suffit d'exprimer que les équations (1) et (2) ont une racine commune : le résultat auquel on arrive ainsi est l'une des formules (3) ou (4), dans laquelle on remplacerait le signe $>$ ou $<$ par $=$. On est donc conduit à l'équation de condition

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0.$$

Pour que l'équation (1) ait ses trois racines égales, en d'autres termes, pour que $x^3 + px + q$ soit un cube parfait, il faut que l'équation (2) ait deux racines égales, ce qui ne peut avoir lieu que si $p = 0$; mais alors l'équation (1) se réduit à

$$x^3 + q = 0.$$

Pour que cette équation ait ses racines égales, il faut que $q = 0$. Du reste, $x = 0$ satisfaisant à l'équation dérivée, $x = 0$ devait satisfaire à l'équation (1), ce qui exigeait que l'on eût $p = q = 0$.

VIII. — THÉORÈME DE BUDAN ET FOURIER (*).

Théorème. — *Soit* $F(x) = 0$ *une équation algébrique; si l'on considère la suite*

(1) $$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ \ldots,\ F^m(x),$$

formée de la fonction $F(x)$ *et de ses dérivées, et les deux suivantes :*

(2) $$F(\alpha),\ F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ \ldots,\ F^m(\alpha),$$

(3) $$F(\beta),\ F'(\beta),\ F''(\beta),\ \ldots,\ F^m(\beta),$$

dans lesquelles α *représente un nombre inférieur à* β; *si, de plus, on désigne par* v *le nombre des variations de la suite* (2) *et par* v' *le nombre des variations de la suite* (3),

1° *On aura toujours*

$$v \geqq v';$$

2° *Si l'on désigne par* N *le nombre des racines de* $F(x) = 0$ *comprises entre* α *et* β, *on aura*

$$N \leqq v - v';$$

3° *Enfin, la différence* $(v - v') - N$ *sera toujours un nombre pair.*

Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que le nombre des variations de la suite (1) ne peut changer que si l'un des termes passe par zéro ; le dernier terme étant

(*) Ce théorème, trouvé à peu près en même temps par Fourier et par Budan, a eu un grand succès, mais il a beaucoup perdu de son importance après la découverte du théorème de Sturm que l'on va lire ci-après; quoi qu'il en soit, le théorème de Budan, moins parfait en théorie que celui de Sturm, est d'une application assez facile, tandis que celui de Sturm rebutera souvent le calculateur le plus intrépide.

indépendant de x, nous n'aurons que deux cas à examiner.

1° Le premier terme de la suite (1) passe par zéro pour $x = \lambda$; soit $F^\mu(x)$ la première dérivée de $F(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = \lambda$; $F(\lambda + \varepsilon)$, $F'(\lambda + \varepsilon)$, ... seront de même signe que $F^\mu(\lambda)$; quant à $F(\lambda - \varepsilon)$, $F'(\lambda - \varepsilon)$, ..., ils seront alternativement de même signe et de signe contraire à $F^\mu(\lambda)$, en sorte que le passage par λ fera perdre à la suite (1) μ variations. Or, nous avons vu (p. 13) que, si $F^\mu(x)$ était la première dérivée de $F(x)$ qui ne s'annulait pas pour $x = \lambda$, $F(x) = 0$ avait μ racines égales à λ; on peut donc dire que, toutes les fois que x passe par une racine de $F(x) = 0$, la suite (1) perd une variation, une racine multiple d'ordre μ étant considérée comme jouant le même rôle que μ racines simples.

2° Si l'un des termes $F^i(x)$ de la suite (1) passe par zéro pour $x = \lambda$, $F(\lambda)$ étant censé différent de zéro, nous supposerons $F^{i-1}(\lambda)$ différent de zéro. Soit alors $F^j(x)$ la première dérivée de $F^i(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = \lambda$; $F^i(\lambda + \varepsilon)$, $F^{i+1}(\lambda + \varepsilon)$, ... seront de même signe que $F^i(\lambda)$, et $F^i(\lambda - \varepsilon)$, $F^{i+1}(\lambda - \varepsilon)$, ... seront alternativement de même signe et de signe contraire à $F^j(\lambda)$. Le passage par λ a donc fait perdre à la suite (1) un certain nombre de variations, et, comme $F^{i-1}(x)$ et $F^j(x)$ n'ont pas changé de signe, le nombre des variations comprises entre ces termes n'a pas changé de parité.

En résumé, x variant de α à β, la suite (1) a perdu un nombre pair de variations (ou zéro variations) par ses termes intermédiaires, et un nombre de variations N égal à celui des racines comprises entre α et β par son premier terme; on a donc

$$v - v' = \text{N} + \text{un nombre pair}.$$

C. Q. F. D.

IX. — THÉORÈME DE STURM.

Aucun des théorèmes précédents ne peut servir à séparer à coup sûr les racines d'une équation, mais ils suffisent dans la plupart des cas. Au contraire, le théorème que l'on va démontrer permet de décider combien il existe de racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux limites données : il est à regretter que ce théorème soit d'une application aussi pénible.

Théorème I. — *Soient V_0 un polynôme entier en x, V_1 sa dérivée; divisons V_0 par V_1; soient Q_1 le quotient et $-V_2$ le reste; divisons V_1 par V_2; soient Q_2 le quotient et $-V_3$ le reste, et ainsi de suite. Supposons que l'équation $V_0 = 0$ n'ait pas de racines égales (et l'on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi), on finira par tomber sur un reste numérique différent de zéro que nous désignerons par $-V_n$; ceci posé, le nombre des racines réelles de $V_0 = 0$ comprises entre deux limites données α et β est égal au nombre de variations que perd la suite*

$$V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n \tag{1}$$

quand x varie de α à β.

D'après la définition des quantités $V_0, V_1, \ldots, V_n$, $Q_1, Q_2, \ldots$, on doit avoir

$$\begin{aligned}
V_0 &= V_1 Q_1 - V_2,\\
V_1 &= V_2 Q_2 - V_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
V_{i-1} &= V_i Q_i - V_{i+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
V_{n-2} &= V_{n-1} Q_{n-1} - V_n.
\end{aligned}$$

Or, 1° deux fonctions V_{i-1}, V_i consécutives de la suite (1)

ne peuvent s'annuler à la fois, sans quoi de

$$(2) \qquad V_{i-1} = V_i Q_i - V_{i+1}$$

on déduirait $V_{i+1} = 0$ et par suite $V_{i+2} = 0$, etc., enfin $V_n = 0$, ce qui est contre notre hypothèse, V_n étant supposé indépendant de x; 2° si l'une des quantités V_0, V_1, V_2, ... s'annule, celle qui la précède et celle qui la suit immédiatement sont de signes contraires; si, en effet, dans l'équation (2) on fait $V_i = 0$, on a $V_{i-1} = -V_{i+1}$.

Il résulte de là que le passage par zéro d'une des fonctions V_1, V_2, ..., V_{n-1} n'altère pas le nombre des variations de la suite (1). En effet, V_{i-1} et V_{i+1} ne pouvant s'annuler avec V_i conservent leur signe quand V_i change de signe; or, V_{i-1} et V_{i+1} étant de signes contraires, on ne peut avoir avant et après le passage de V_i par zéro que les combinaisons de signes suivantes :

Pour V_{i-1}	+	+	+	+	−	−	−	−
Pour V_i	+	−	−	+	+	−	−	+
Pour V_{i+1}	−	−	−	−	+	+	+	+

qui présentent constamment une seule variation; mais quand V_0 passe par zéro, d'après ce que nous avons vu (p. 51), il est d'abord de signe contraire à V_1, puis, après le passage, de même signe que V_1; la suite (1) perd donc une variation, et à chaque racine de $V_0 = 0$ correspond ainsi une variation perdue; donc enfin le nombre total de variations perdues par la suite (1), quand x varie de α à β, est bien égal au nombre des racines de $V_0 = 0$ comprises dans cet intervalle.

C. Q. F. D.

On peut considérablement généraliser le théorème de Sturm, ainsi que Sturm lui-même l'a fait, et lui donner une forme qui le rend infiniment plus utile dans les applica-

tions ; car, il faut l'avouer, si le théorème de Sturm, tel que nous venons de l'énoncer, permet, théoriquement, de séparer les racines d'une équation comprises entre des limites données, il est d'une application presque impossible, à cause de la longueur des calculs qu'il exige. Voici le nouvel énoncé dont nous voulons parler :

Théorème II. — *Si l'on a une série de fonctions de x, continues entre les limites α et β, de la variable* ($\alpha < \beta$), *à savoir*

$$(1) \qquad V_0,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_m,\ \ldots,\ V_n$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Deux fonctions consécutives V_m, V_{m+1} ne s'annulent jamais pour la même valeur de x ;*

2° *Quand l'une des fonctions V_m s'annule, celle qui la précède et celle qui la suit sont de signes contraires ;*

3° *La dernière (ou la première) ne change jamais de signe quand x varie de α à β,*

Le nombre des racines réelles de $V_0 = 0$ (ou de $V_n = 0$) comprises entre α et β est égal ou inférieur à la différence qui existe entre le nombre de variations que présente la suite (1) *pour $x = \alpha$ et $x = \beta$.*

En effet, la suite (1) ne peut gagner ou perdre des variations que par son premier (ou par son dernier terme), et à chaque variation gagnée ou perdue correspond une racine de $V_0 = 0$ (ou $V_n = 0$).

Théorème III. — *Si, toutes les conditions du théorème précédent étant remplies pour la suite* (1), *quand la fonction V_0 (ou V_n) s'annule, la fonction V_1 (ou V_{n-1}) est de signe contraire à V_0 (ou à V_n) avant le passage de cette fonction par zéro et de même signe après, la suite* (1) perdra *nécessairement autant de variations*

quand on y fera successivement $x = \alpha$, $x = \beta$, *que* $V_0 = 0$ (*ou* $V_n = 0$) *a de racines réelles comprises entre* α *et* β.

Si V_0 (*ou* V_n) *était de même signe que* V_1 (*ou* V_{n-1}) *avant le passage par zéro et de signe contraire après, la suite* (1) gagnerait *nécessairement autant de variations que* $V_0 = 0$ (*ou* $V_n = 0$) *a de racines réelles entre* α *et* β.

En effet, les variations ne pouvant se perdre ou se gagner que par le premier (ou par le dernier terme), chaque fois que x passera par une racine de $V_0 = 0$ (ou de $V_n = 0$), il se perdra une variation si V_1 (ou V_{n-1}) est d'abord de signe contraire à V_0 (ou V_n); il se gagnera une variation si V_1 (ou V_{n-1}) est d'abord de même signe que V_0 (ou V_n).

Pour faire comprendre l'utilité de ces théorèmes, nous allons en faire quelques applications.

Première application. — *Le théorème I est encore vrai quand l'équation* $V_0 = 0$ *a des racines multiples.*

V_n dans ce cas est le plus grand commun diviseur de V_0 et V_1. Divisons tous les termes de la suite

$$V_0, V_1, \ldots, V_n$$

par V_n et soient

$$U_0, U_1, \ldots, U_n$$

les quotients; de l'égalité

$$V_{i-1} = V_i Q_i - V_{i+1}$$

on conclut

$$U_{i-1} = U_i Q_i - U_{i+1}.$$

Donc : 1° U_{i-1} et U_i ne peuvent s'annuler en même temps, sans quoi U_{i+1}, U_{i+2}, ... et $U_m = 1$ seraient nuls, ce qui est absurde; 2° quand $U_i = 0$, U_{i+1} et U_{i-1} sont de signes contraires; 3° $U_m = 1$ ne change pas de signe;

4° comme on a $\frac{U_0}{U_1} = \frac{V_0}{V_1}$, $\frac{U_0}{U_1}$ passe comme $\frac{V_0}{V_1}$ du négatif au positif quand U_0 ou V_0 s'annule; donc enfin le nombre des racines réelles de $U_0 = 0$ ou de $V_0 = 0$, abstraction faite de leur degré de multiplicité, comprises entre α et β est égal au nombre des variations perdues par la suite $U_0, U_1, \ldots, U_n$ ou, ce qui revient au même, par la suite $V_0, V_1, \ldots, V_n$, quand on fait successivement $x = \alpha, x = \beta$. C. Q. F. D.

Deuxième application. — Considérons la fraction continue

$$\cfrac{a_1}{x - \cfrac{a_2}{x - \cfrac{a_3}{x - \ldots}}}$$

Appelons $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ les dénominateurs des réduites successives, et supposons $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positifs; nous aurons $Q_1 = x$, $Q_2 = x^2 - a_2$, $Q_3 = x^3 - x(a_2 + a_3), \ldots$ et, en général,

$$(2) \qquad Q_{n+1} = Q_n x - a_n Q_{n-1}.$$

Si l'on suppose $n = 1$ dans cette formule, elle servira à définir le terme $Q_0 = \frac{a_2}{a_1}$ indépendant de x. Ceci posé, considérons la suite

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m.$$

1° Deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler en même temps, car en vertu de l'équation (2), si $Q_n = 0$ et $Q_{n+1} = 0$, on aura $Q_{n-1} = 0, \ldots$ et $Q_0 = 0$, ce qui est absurde. 2° Toujours en vertu de (2), si $Q_n = 0$, Q_{n+1} et Q_{n-1} sont de signes contraires. 3° Q_0 a un signe constant. Pour $x = -\infty$, la suite n'a que des variations; pour $x = +\infty$, elle n'a que des permanences; donc $Q_m = 0$ a au moins

m racines réelles; or Q_m est de degré m; donc $Q_m = 0$ a toutes ses racines réelles. Résultat d'autant plus curieux que l'on n'a même pas l'expression générale de Q_m.

Un dernier mot sur le théorème de Sturm.

Le théorème de Sturm donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles (ou comprises entre α et β). Pour trouver ces conditions, il suffit de substituer à la place de x, dans la suite des fonctions de Sturm, $-\infty$ et $+\infty$ (ou α et β) et d'exprimer que, pour la première valeur de x, la suite ne présente que des variations, et que pour la seconde valeur de x elle ne présente que des permanences.

Par exemple, considérons l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Les fonctions de Sturm sont

$$x^3 + px + q, \quad 3x^2 + p, \quad -(2px + 3q), \quad -(27q^2 + 4p^3).$$

Si l'on fait $x = -\infty$ et $x = +\infty$, on trouve

$$\begin{array}{cccc} -\infty & +\infty & p.\infty & -(27q^2 + 4p^3), \\ +\infty & +\infty & -p.\infty & -(27q^2 + 4p^3). \end{array}$$

Si l'on a $p < 0$ et $-(4p^3 + 27q^2) > 0$ ou $4p^3 + 27q^2 < 0$, la première suite n'aura que des variations et la seconde n'aura que des permanences, et, comme $4p^3 + 27q^2 < 0$ entraîne la condition $p < 0$, il en résulte que $4p^3 + 27q^2 < 0$ est la condition de réalité des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

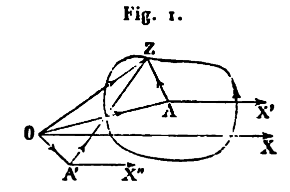
X. — MÉTHODE DE CAUCHY POUR LA SÉPARATION DES RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS.

La méthode de Cauchy consiste dans l'application du théorème suivant :

Soit $2\pi N$ *la quantité dont varie l'argument de la fonction entière* $F(z)$ *quand le point* z *décrit un contour fermé* C; *le nombre des racines de* $F(z) = 0$ *contenues dans le contour* C *est précisément égal à* N.

Lemme. — *Quand le point* z *décrit le contour* C, *l'argument de* $z - a$ *croît de zéro ou de* 2π *selon que le point* a *est extérieur ou intérieur au contour*. (Le contour sera

Fig. 1.



toujours supposé décrit par un personnage qui aurait l'aire du contour à sa gauche : c'est de cette manière que l'on peut définir le sens positif en Trigonométrie, quand le mobile qui décrit les arcs se meut sur la circonférence du cercle trigonométrique.)

En effet, soient OZ la droite qui représente l'imaginaire z, OA (ou OA') la droite qui représente la quantité a; la droite AZ (ou A'Z) représentera $z - a$ (t. II, p. 66), et l'argument de $z - a$ sera l'angle X'AZ (ou X"A'Z) que AZ (ou A'Z) fait avec l'axe fixe OX (*fig.* 1).

Si le point A qui représente l'imaginaire a est intérieur au contour, on voit que l'argument X'AZ de $z - a$ varie de 2π quand le point Z décrit le contour et revient à son point de départ. Au contraire, si le point A' qui représente a est extérieur au contour, l'argument de $z - a$ varie entre deux limites qui sont données par les tangentes extrêmes menées de A' au contour et que le rayon A'Z ne doit pas franchir. Cet argument reprendra alors sa valeur primitive quand le point Z reviendra à son point de départ.

C. Q. F. D.

Passons à la démonstration du théorème. Soit

$$F(z) = (z - a)(z - b)\ldots(z - l).$$

On a (t. II, p. 68)

$$\arg F(z) = \arg(z - a) + \arg(z - b) + \ldots + \arg(z - l).$$

Si le point z décrit le contour C, les arguments des binômes $(z - a)$ pour lesquels a est intérieur à C croîtront de 2π, les arguments des autres binômes reprendront leurs valeurs primitives. Donc l'argument de $F(z)$ aura précisément varié d'autant de fois 2π que l'équation $F(z) = 0$ possède de racines à l'intérieur du contour.

Nous supposons, bien entendu, qu'il n'existe pas de racine de $F(z)$ sur le contour même, ce dont on s'apercevrait d'ailleurs en faisant varier z sur ce contour.

Le nombre $2N$ *est égal à la différence entre le nombre de fois que le rapport* $\frac{\psi}{\varphi}$ *devenant infini passe du positif au négatif et le nombre de fois où il passe du négatif au positif, les fonctions* φ *et* ψ *étant données par la formule*

$$F(z) = \varphi + \psi\sqrt{-1}.$$

En effet, si l'on suppose que sur le contour C il n'y ait pas de racine de $F(z) = 0$, φ et ψ ne seront jamais nuls à la fois; alors $\frac{\psi}{\varphi}$, qui est la tangente de l'argument de $F(z)$, peut devenir infinie sur le contour C, mais ne prend jamais de valeur indéterminée. L'argument de $F(z)$ est donc lui-même toujours bien déterminé. Soit ω l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ qui a pour tangente $\frac{\psi}{\varphi}$, l'argument de $F(z)$ sera $\omega + k\pi$, k désignant un entier. Faisons cheminer le point z sur le contour C. Tant que $\frac{\psi}{\varphi}$ reste fini,

l'argument de $F(z)$ reste compris entre les mêmes multiples de $\frac{\pi}{2}$; mais, si $\varphi(z)$ s'annule, $\frac{\psi}{\varphi}$ devient infini et l'argument de $F(z)$ passe par un multiple de $\frac{\pi}{2}$. Alors :

1° Si $\frac{\psi}{\varphi}$ ne change pas de signe, l'argument de $F(z)$ ne franchit pas le multiple de $\frac{\pi}{2}$ qu'il a atteint.

2° Si $\frac{\psi}{\varphi}$ passe du positif au négatif, l'argument de $F(z)$ qui a pour tangente $\frac{\psi}{\varphi}$ franchit un multiple de $\frac{\pi}{2}$ en croissant, et sa valeur devient de la forme $\omega + (k+1)\pi$.

3° Si $\frac{\psi}{\varphi}$ passe du négatif au positif, l'argument de $F(z)$ franchit un multiple de $\frac{\pi}{2}$ en décroissant, et sa valeur prend la forme $\omega + (k-1)\pi$.

Alors, si n désigne le nombre de fois que $\frac{\psi}{\varphi}$ devenant infini passe du positif au négatif, n' le nombre de fois qu'il passe du négatif au positif, la valeur de l'argument de $F(z)$, quand z aura parcouru tout le contour C, sera de la forme $\omega + k\pi + (n-n')\pi$, et ω aura repris sa valeur initiale: donc $(n-n')\pi$ est la variation $2\pi N$ de l'argument de $F(z)$.

C. Q. F. D.

EXERCICES ET NOTES.

Exercices sur la recherche des limites des racines d'une équation.

1. Si l'on considère l'équation $f(x) = 0$, dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance m de x est 1, si l'on appelle

$$-N_1 x^{m-n_1},\quad -N_2 x^{m-n_2},\ \ldots$$

les termes négatifs et si N_i et N_j sont les deux plus grandes des quantités $N_1, N_2, \ldots, \sqrt[n_i]{N_i} + \sqrt[n_j]{N_j}$ sera une limite supérieure des racines positives de $f(x) = 0$. (LAGRANGE.)

2. Divisons chaque coefficient négatif de l'équation $f(x) = 0$ par la somme des coefficients positifs qui le précèdent : la plus grande des quantités ainsi formées augmentée de 1 donne une limite supérieure des racines de $f(x) = 0$. (BRET.)

3. Cauchy appelle *indice* d'une fonction, pour une valeur a de la variable qui la rend infinie, $+1$, 0, -1 suivant que la fonction passe en devenant infinie du positif au négatif, ne change pas de signe, ou passe du négatif au positif. Cette notion de l'indice lui a été très utile pour démontrer d'une manière uniforme tous les théorèmes exposés dans ce Chapitre. Lire le Mémoire de l'illustre auteur intitulé : *Sur la théorie des indices des fonctions* (XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*).

4. Dans l'équation

$$x^{2n+1} + Bx^{2n-1} + \ldots + k = 0,$$

qui ne renferme que les puissances impaires de x, il y a toujours une racine réelle comprise entre

$$+2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \text{ et } -2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{2n+1}}.$$

(TCHEBYCHEFF.)

Exercices sur le théorème de Descartes.

5. Si, en multipliant le premier membre d'une équation algébrique par $x - a$, on introduit $2k + 1$ variations, elle a au moins $2k$ racines imaginaires.

6. Si, dans une équation ordonnée, il y a un coefficient nul entre deux coefficients de même signe, cette équation a au moins un couple de racines imaginaires, et au moins autant de couples de racines imaginaires que cette circonstance se présente de fois.

Si, dans une équation ordonnée, il existe deux coefficients consécutifs nuls entre deux autres différents de zéro, cette équation a au moins un couple de racines imaginaires.

Si, dans une équation ordonnée, il existe trois coefficients consécutifs nuls entre deux coefficients de même signe, cette circonstance décèle la présence d'au moins deux couples de racines imaginaires.

Si, dans une équation ordonnée, il existe quatre coefficients consécutifs nuls, cette équation a au moins deux couples de racines imaginaires, et ainsi de suite.

7. Quand, dans une équation ordonnée, il existe trois termes consécutifs en progression géométrique, elle a des racines imaginaires. (En effet, soient $kx^i + k\alpha x^{i+1} + k\alpha^2 x^{i+2}$ ces trois termes. En multipliant le premier membre par $1 - \alpha x$, on obtient une nouvelle équation dans laquelle il existe deux termes consécutifs nuls.) (De Gua.)

8. Quand, dans une équation ordonnée, il existe quatre termes consécutifs en progression arithmétique, elle a des racines imaginaires. (En effet, soient $\alpha x^i + (\alpha + \beta)x^{i+1} + (\alpha + 2\beta)x^{i+2} + (\alpha + 3\beta)x^{i+3}$ les termes en question. En multipliant par $1 - x$, trois termes consécutifs deviennent $\beta x^{i+1} + \beta x^{i+2} + \beta x^{i+3}$ et forment une progression géométrique.) (Hermite.)

9. Si, dans l'équation à termes alternativement positifs et négatifs

$$a_{2m} x^{2m} - a_{2m-1} x^{2m-1} + a_{2m-2} x^{2m-2} + \dots + a_0 = 0,$$

on a, quel que soit i,

$$a_{2i-1} < a_{2i} > a_{2i+1}$$

cette équation a toutes ses racines imaginaires.

10. Soit

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m, \quad f_1(x) = A_m,$$
$$f_2(x) = A_m x + A_{m-1}, \quad f_3(x) = A_m x^2 + A_{m-1} x + A_{m-2}, \dots$$

Le nombre des variations de la suite

$$f_1(a),\ f_2(a),\ \dots,\ f_m(a),\ f(a)$$

est au moins égal au nombre des racines de $f(x) = 0$ supérieures à a, et, s'il est plus grand, la différence est paire (on suppose $A_0 \gtrless 0$ et $a > 0$).

Ce théorème est dû à Laguerre. M. Lucas propose de le démontrer en prouvant que, si l'on multiplie l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a} = x^{m-1}f_1(a) + x^{m-2}f_2(a) + \ldots + f_m(a) + \frac{f(a)}{x-a}$$

par $x-b$ ou $b>a$, on introduit au moins une variation dans le second membre de cette formule.

Exercices sur le théorème de Rolle.

11. On démontrera la formule

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)},$$

dans laquelle les exposants entre parenthèses représentent des dérivées relatives à x. Ainsi

$$(uv)' = uv' + vu', \quad (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'', \quad \ldots.$$

12. On prouvera, en s'appuyant sur le théorème précédent, que l'équation

$$x^m + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x^{m-1} + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 x^{m-2} + \ldots + 1 = 0$$

a toutes ses racines réelles.

13. L'équation

$$x^m + \frac{m}{1^2}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1^2.2^2}x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1^2.2^2.3^2}x^{m-3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots m} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

14. Si l'équation

$$f(x) + af'(x) + a^2f''(x) + \ldots + a^nf^n(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles, l'équation $f(x) = 0$ aura aussi toutes ses racines réelles (on s'en assure en multipliant φ par $e^{-\frac{x}{a}}$ et en prenant la dérivée)

15. Si $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en sera de même de $f(x) + xf'(x) = 0$, de $f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) = 0$. Généraliser ce théorème.

16. Si $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, $f'(x) + af(x) = 0$ aura aussi toutes ses racines réelles. (Généraliser.)

17. Si $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, $f''f - f'^2 = 0$ aura toutes ses racines imaginaires.

18. Si l'on a $\varphi(a) - \varphi(b) = 0$ et si la fonction φ reste finie et continue entre a et b, si de plus elle a une dérivée bien déterminée dans cet intervalle, $\varphi'(x)$ s'annulera pour une valeur de x comprise entre a et b.

19. L'équation

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} = 0,$$

si n est impair, n'a qu'une racine réelle, et, si n est pair, n'a que deux racines réelles; l'une des racines est zéro.

20. L'équation

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n = 0$$

ne saurait avoir plus d'une racine réelle.

21. Condition de réalité des racines de l'équation

$$x^m + mpx + q = 0.$$

22. Condition de réalité des racines de

$$x^{2m+1} + px^{m+1} + qx + r = 0.$$

23. Si A, B, C, ... sont des nombres positifs, l'équation

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l} = 0$$

aura toutes ses racines réelles. Ne peut-on pas déduire de là le théorème de Rolle relatif aux équations algébriques? Faire $A = B = \dots = L = 1$.)

24. Les racines de $f(x) = 0$ et de $\varphi(x)\,F(x) - f(x)\,F'(x) = 0$ séparent celles de $F(x) = 0$. On suppose que $f(x)$ et $F(x)$ n'ont pas de racines communes. En appelant α et β deux racines successives de $F = 0$, substituer $\alpha + \varepsilon$ et $\beta - \varepsilon$ dans $F(x)\left[\varphi(x) - f(x)\dfrac{F'(x)}{F(x)}\right] = 0$.

(MALEYX.)

25. Si λ désigne un nombre positif et si $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles, $\varphi(x)\psi'(x) + \lambda\psi(x)\varphi'(x) = 0$ aura aussi toutes ses racines réelles. — Comment doit être modifié ce théorème quand $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ n'ont pas toutes leurs racines réelles?

26. Si l'on multiplie les termes successifs d'une équation $\varphi(x) = 0$ ordonnée suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x par les termes d'une progression arithmétique ou géométrique, la nouvelle équation $\psi(x) = 0$ aura toutes ses racines réelles si $\varphi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles. Il en sera encore de même si l'on remplace les progressions par des suites de la forme $1^m, 2^m, 3^m, \ldots$, m désignant un entier.

Exercices sur le théorème de Sturm.

27. L'équation

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

n'a jamais plus d'une racine réelle. (En effet, on a $y = y' + \dfrac{x}{1.2\ldots n}$ et y, y' et $-x^n$ forment une suite de fonctions de Sturm.)

28. L'équation

$$y = f(x) + af'(x) + a^2 f''(x) + \ldots + a^n f^n(x) = 0,$$

où $f(x)$ est un polynôme de degré n, a toutes ses racines imaginaires si $f(x)$ a aussi toutes ses racines imaginaires. [S'appuyer sur l'égalité $ay' = y - f(x)$.]

On peut en conclure que $f(x) + xf'(x) + x^2 f''(x) + \ldots + x^n f^n(x) = 0$ a aussi ses racines imaginaires en même temps que $f(x) = 0$.

29. Le théorème de Sturm permet de séparer et de compter exacte-

ment le nombre des racines réelles de l'équation

$$y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n = 0.$$

[A cet effet, on observe que

$$\frac{1}{m}(1+x)y' = y + x^n\frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(1-\frac{m}{n}\right).\Big]$$

30. Si l'on prend la $n^{\text{ième}}$ dérivée de

$$\frac{1}{1+x^2},$$

on trouve qu'elle est de la forme

$$\frac{P_n}{(1+x^2)^{n+1}},$$

P_n désignant un polynôme de degré n, montrer qu'il existe une relation linéaire entre P_{n-1}, P_n et P_{n+1} et prouver que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

31. Soit R le reste de la division de $f(x)$ par sa dérivée; si $f = 0$ a toutes ses racines réelles, les racines de $R = 0$ sépareront celles de $f'(x) = 0$.

32. Trouver la condition pour que

$$x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0$$

ait deux racines réelles, quatre racines réelles, quatre racines imaginaires, deux racines positives, etc.

33. Si l'on pose

$$\frac{1}{1 + 2\alpha x + \alpha^2} = V_0 + V_1\alpha + V_2\alpha^2\ldots,$$

V_0, V_1, V_2, ... seront des polynômes entiers en x ayant toutes leurs racines réelles. (On admettra la possibilité du développement et l'on emploiera la méthode des coefficients indéterminés pour calculer V_0, V_1, V_2, ...)

34. Si l'on pose

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = X_0 + X_1\alpha + \ldots + X_n\alpha^n + \ldots,$$

les coefficients $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ seront des polynômes entiers en x, étudiés par Legendre; toutes leurs racines sont réelles. (On admettra la possibilité du développement, mais on pourra la démontrer à l'aide de la formule du binôme généralisée.)

35. Si l'on pose

$$x + \frac{1}{x} = Z_1 = z,$$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = Z_2, \ldots, x^m + \frac{1}{x^m} = Z_m, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots, Z_m, \ldots$ seront des polynômes entiers en z; ces polynômes auront toutes leurs racines réelles. Si l'on pose

$$1 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = U_n,$$

l'équation $U_n = 0$ aura toutes ses racines réelles.

36. Soient V_0 un polynôme en x, V_1 la dérivée prise par rapport à y de ce polynôme rendu homogène en multipliant ses termes par des puissances convenables de y; soit V_2 le reste de la division changé de signe de V_0 par V_1, ...; soient α et β deux nombres positifs : le nombre de racines réelles de $V_0 = 0$ comprises entre α et β sera égal au nombre de variations gagnées par la suite $V_0, V_1, \ldots, V_n$ quand on fera successivement $x = \alpha$, $x = \beta$.

37. Soient V_n un polynôme quelconque, V_{n-1} sa dérivée, où un autre polynôme tel que $\frac{V_n}{V_{n-1}}$ passe toujours du positif au négatif, ou toujours du négatif au positif en s'annulant. Si $V_n = 0$ n'a pas de racines communes avec V_{n-1}, on pourra toujours déterminer deux polynômes V_{n-2} et V'_{n-2} de degrés inférieurs à V_{n-1} et à V_n, tels que l'on ait

$$V_n V_{n-2} - V_{n-1} V'_{n-2} = -1,$$

puis deux polynômes V_{n-3} et V'_{n-3} de degrés inférieurs à V_{n-1} et V_{n-2}, tels que

$$V_{n-1} V_{n-3} - V_{n-2} V'_{n-3} = -1,$$

et ainsi de suite. Les polynômes $V_n, V_{n-1}, \ldots, V_1, V_0$ jouissent des propriétés des polynômes de Sturm.

38. Pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que l'équation aux carrés des différences soit complète et ne présente que des variations.

39. Prouver que la $n^{\text{ième}}$ dérivée de e^{-x^2} est de la forme $P_n e^{-x^2}$, la lettre P_n désignant un polynôme de degré n. On a

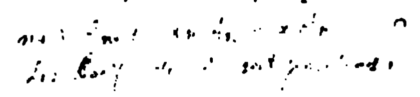
$$P_{n+1} + 2 P_n x + 2 n P_{n-1} = 0.$$

En conclure que $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

(HERMITE.)

40. La $n^{\text{ième}}$ dérivée de $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est de la forme $P_n (1+x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}$, où P_n est un polynôme entier de degré n, et $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

41. La fonction $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-x}$ a pour $n^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à x une fonction qui, pour $x = 0$, se réduit à un polynôme P_n entier en α; l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles, et soit nulles, soit positives.



CHAPITRE III.

FORMULES D'APPROXIMATION POUR LE CALCUL DES RACINES ET DES ÉQUATIONS QUE L'ON SAIT RÉSOUDRE.

I. — FORMULE D'APPROXIMATION DE NEWTON ET DE FOURIER.

Concevons que, ayant convenablement séparé les racines d'une équation algébrique

$$F(x) = 0,$$

on ait substitué à la place de x deux nombres a et $b > a$ peu différents l'un de l'autre, donnant à $F(x)$ des valeurs de signes contraires et comprenant par conséquent une racine, mais une seule. On arrivera toujours à ce résultat après un nombre plus ou moins considérable d'essais. Soit $a + h$ la racine cherchée, on aura par la formule de Taylor

$$F(a+h), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2} F''(a+\theta h).$$

On tire de cette formule

$$(3) \qquad h = -\frac{F(a)}{F'(a)} - \frac{h^2}{2} \frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)}.$$

En partant au contraire de la valeur approchée b, en désignant par $b - k$ la racine exacte et par λ un nombre compris, comme θ, entre 0 et 1, on trouve de la même façon

$$0 = F(b) - kF'(b) + \frac{k^2}{2} F''(b - \lambda k),$$

et par suite

$$(4)\qquad k = \frac{F(b)}{F'(b)} + \frac{k^2}{2}\,\frac{F''(b-\lambda k)}{F'(b)}.$$

Si les quantités k et h sont suffisamment petites, on peut négliger leurs carrés et prendre

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a)},\qquad k = \frac{F(b)}{F'(b)}.$$

Telle est la méthode indiquée par Newton pour l'approximation des racines des équations; elle est peu sûre, comme on voit, et, pour qu'elle puisse être appliquée avec succès, en un mot, pour approcher de la racine à l'aide des *termes de correction* $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ et $\frac{F(b)}{F'(b)}$, il faut être sûr qu'ils sont positifs; il faut ensuite, en vertu des formules (3) et (4), que les quantités $-\frac{h^2}{2}\,\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)}$ et $\frac{k^2}{2}\,\frac{F''(b-\lambda k)}{F'(b)}$ soient positives, car alors seulement on sera sûr que $a - \frac{F(a)}{F'(a)}$ et $b - \frac{F(b)}{F'(b)}$ sont plus approchés que a et b.

Nous supposerons les limites a et b assez resserrées pour que, dans l'intervalle, $F'(x)$ et $F''(x)$ n'aient pas de racines, ce qui sera toujours possible si les équations $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$ et $F''(x) = 0$ n'ont pas les mêmes racines (on voit ici l'utilité de la théorie des racines égales).

Alors : 1° je dis que $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ et $\frac{F(b)}{F'(b)}$ sont positifs; en effet, si $F(a)$ est négatif, par exemple, $F(x)$ devenant positif pour $x = b$ croît dans l'intervalle a, b, et $F'(x)$ est positif; donc $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ est positif, et il en est de même

de $\frac{F(b)}{F'(b)}$: si, au contraire, $F(a)$ était positif, $F(x)$ serait décroissant, $F'(x)$ négatif, et l'on arriverait toujours aux mêmes conclusions.

2° Puisque $F''(x)$ et $F'(x)$ n'ont pas de racines dans l'intervalle a, b, $F''(a+\theta h)$ et $F''(b-\lambda k)$ auront les mêmes signes, $F'(a)$ et $F'(b)$ aussi, et alors l'une des quantités

$$-\frac{h^2}{2}\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)},\quad \frac{k^2}{2}\frac{F''(b-\lambda k)}{F'(b)}$$

sera positive.

Donc, pourvu que $F'(x)$ et $F''(x)$ ne s'annulent pas entre a et b, l'un des termes de correction de Newton donnera toujours une valeur plus approchée de la racine cherchée, et le terme qu'il faudra employer sera $-\frac{F'(a)}{F(a)}$ si $F''(x)$ et $F'(x)$ sont de signes contraires, et $\frac{F'(b)}{F(b)}$ si $F''(x)$ et $F'(x)$ sont de même signe. Mais nous venons de voir que $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ et que $\frac{F(b)}{F'(b)}$ étaient positifs; si donc $F''(a)$ et $F'(a)$ sont de signes contraires, $F(a)$ et $F''(a)$ seront de même signe; si $F''(b)$ et $F'(b)$ sont de même signe, $F(b)$ et $F''(b)$ le seront aussi. De cette petite discussion il résulte que :

Le terme de correction à employer est celui pour lequel $F(x)$ *et* $F''(x)$ *sont de même signe.*

Cette proposition est due à Fourier; si l'on veut avoir une limite de l'erreur commise en employant le terme de correction, il suffit de considérer le terme complémentaire

$$-\frac{h^2}{2}\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)}\quad\text{ou}\quad\frac{k^2}{2}\frac{F''(b-\lambda k)}{F'(b)},$$

et d'y remplacer k ou h par $b-a$, et $F''(b-\lambda k)$ par le maximum M de $F''(x)$ dans l'intervalle a, b ; on a ainsi

$$\text{erreur} < \frac{(b-a)^2}{F'(a)} \frac{M}{2}.$$

II. — INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉTHODE DE NEWTON. MÉTHODE DE FAUSSE POSITION.

Soit

(1) $$f(x)=0$$

une équation transcendante ou algébrique; la discussion de la courbe représentée par l'équation

(2) $$y=f(x)$$

fera souvent connaître avec une certaine approximation les racines de l'équation (1); d'autres fois on arrivera au même résultat par l'intersection de deux courbes. Ces procédés sont décrits dans les Traités de Géométrie analytique : mon intention n'est pas de m'y arrêter, et je supposerai que l'une des racines de l'équation (1) ait été séparée.

Soient a et $b > a$ deux nombres qui ne comprennent qu'une seule racine de l'équation (1); supposons qu'entre a et b, $f'(x)$ et $f''(x)$ restent continues et ne changent pas de signe.

Construisons la courbe représentée par l'équation (2); soient M le point où elle coupe l'axe des x, O l'origine des coordonnées. Soient de plus $OA'=a$, $OB'=b$, $AA'=f(a)$, $BB'=f(b)$; la courbe que nous avons considérée ne pourra entre a et b affecter que l'une des quatre formes suivantes; dans les quatre figures, si l'on mène la corde AB, OD sera une valeur approchée de la racine

et plus exacte que a et b. On remarquera en outre que, si l'on mène en A et en B une tangente, l'une d'elles coupera l'axe des x en C, entre la courbe et l'abscisse du

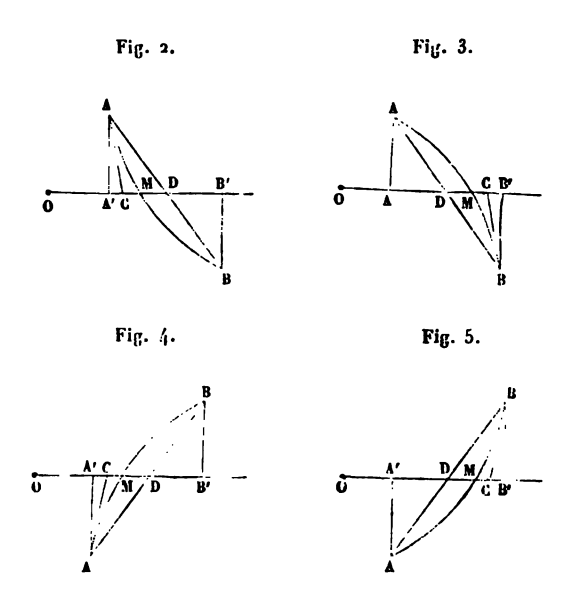


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

point de contact; OC sera une seconde valeur approchée de la racine et, ce qui est précieux, l'approximation sera en sens contraire de celle fournie par la corde AB.

Voyons comment on doit choisir le point de contact pour que le point C remplisse la condition dont nous venons de parler. Sur la *fig.* 3 on a $f(b) < 0$: le point B' satisfait à la question, le point A n'y satisfait évidemment pas. Or, on peut observer que $f'(x)$ décroît; donc $f''(x) < 0$: ainsi, au point de contact, $f''(x)$ et $f(x)$ sont de même signe. Le même fait peut se constater sur chacune des *fig.* 2, 4, 5; reste à calculer OD et OC. Nous ne ferons le calcul que pour la *fig.* 3; les autres fourniraient des résultats semblables.

L'équation de AB est

$$y - f(a) = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

on en conclut, en faisant $y = 0$ et en résolvant par rapport à x,

$$x = \text{OD} = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}:$$

c'est la valeur approchée donnée par la méthode dite *de fausse position* (*).

L'équation de la tangente en B est

$$y - f(b) = (x - b)f'(b);$$

on en conclut, pour $y = 0$,

$$x = \text{OC} = b - \frac{f(b)}{f'(b)}:$$

c'est la valeur approchée fournie par la méthode de Newton. Ainsi, en résumé :

Si $f'(x)$ et $f''(x)$ conservent le même signe entre a et b en restant continues, on aura deux valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut, en appliquant la méthode de fausse position et la méthode de Newton, pourvu qu'en appliquant cette dernière on parte de la valeur approchée de la racine pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Application. — *Résoudre*

$$2x - \cos x = 0.$$

(*) On obtiendrait le terme $\frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)} = h$ en admettant que les accroissements h et $b - a$ de la variable sont proportionnels aux accroissements $f(a)$ et $f(b) - f(a)$ de la fonction.

Il est facile de reconnaître que cette équation n'a qu'une racine réelle comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; si l'on pose $2x - \cos x = f(x)$, on reconnaît, après quelques essais, que

$$f(25^\circ) = -0,0237,$$
$$f(26^\circ) = 0,0088.$$

Entre 25° et 26°, $f''(x)$ est positif; nous partirons donc de $f(26^\circ)$, et la méthode de Newton fournira

$$x = \text{arc}\,26^\circ - \frac{0,0088}{2,4384} = 0,4502 = 25^\circ 47' 40''.$$

La méthode de fausse position donne

$$x = \text{arc}\,26^\circ - \frac{0,0088 \times 0,0175}{0,0325} = 0,4490 = 25^\circ 43' 32''.$$

Or on a

$$f(25^\circ 43' 32'') = -0,0028833,$$
$$f(25^\circ 47' 40'') = 0,0005578.$$

Les termes de correction sont :

$$-\frac{0,0005578}{2,4351438} = -3' 45'',6 \quad \text{(Newton)},$$
$$-\frac{0,0005578 \times 0,0012}{0,0034411} = -3' 45'',4 \quad \text{(fausse position)};$$

on en conclut, à une seconde près,

$$x = 25^\circ 43' 55''.$$

II'. — MÉTHODE DE LAGRANGE.

Cette méthode apprend à développer l'inconnue en fraction continue. Soit a une valeur approchée d'une racine

de l'équation $F(x)=0$; on pose $x=a+\frac{1}{x_1}$ et l'on a l'équation $F\left(a+\frac{1}{x_1}\right)=0$; on la ramène à la forme entière et l'on trouve ainsi une équation telle que $F_1(x_1)=0$. Soit a_1 une valeur approchée de x_1 : on posera encore $x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$ et l'on obtiendra une transformée $F_2(x_2)=0$, et ainsi de suite. On en conclura

$$x=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots}}$$

Dans les applications de cette méthode, il conviendra de séparer les racines de l'équation $F(x)=0$ et de transformer d'abord cette équation de manière que ses coefficients soient entiers et que la différence entre deux racines soit plus grande que l'unité, ce qui se fera en multipliant les racines par une puissance convenable de 10. Quant aux nombres a, a_1, a_2, ..., on prendra pour ces valeurs les plus grands nombres entiers contenus dans les racines x, x_1, x_2, ...

Quand on ne procède pas comme nous venons de le dire, on peut être entraîné à des calculs très longs et très pénibles. De plus, la méthode que nous avons indiquée en dernier lieu dispense de séparer les racines des équations successives $F(x_1)$, $F(x_2)$, ... qui ne doivent avoir qu'une racine supérieure à l'unité.

Appliquons ces considérations à l'équation du second degré à coefficients entiers

$$(1) \qquad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

et, a_1, a_2, a_3, ..., a_n désignant des entiers positifs, sup-

posons que l'on ait trouvé

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_n}}}}.$$

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la dernière réduite que l'on obtient en négligeant le terme irrégulier $\frac{1}{x_n}$ (quotient complet); soit $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ l'avant-dernière réduite obtenue dans cette hypothèse : on aura

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation (1), on aura

$$\alpha' x_n^2 + \beta' x_n + \gamma' = 0,$$

α', β', γ' ayant les valeurs suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \gamma' = \alpha P_{n-1}^2 + \beta P_{n-1} Q_{n-1} + \gamma Q_{n-1}^2, \\ \beta' = 2\alpha P_{n-1} P_n + \beta (P_{n-1} Q_n + Q_{n-1} P_n) + 2\gamma Q_n Q_{n-1}, \\ \alpha' = \alpha P_n^2 + \beta P_n Q_n + \gamma Q_n^2. \end{cases}$$

De la première de ces formules (2) on tire

$$\gamma' = Q_{n-1}^2 \left(\alpha \frac{P_{n-1}^2}{Q_{n-1}^2} + \beta \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \gamma \right).$$

Or, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ est une valeur approchée de x que l'on peut représenter par $x + \varepsilon$, ε désignant un nombre qui tend vers zéro pour $n = \infty$; remplaçant donc $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ par $x + \varepsilon$, on a

$$\gamma' = Q_{n-1}^2 [\alpha (x + \varepsilon)^2 + \beta (x + \varepsilon) + \gamma],$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$\gamma' = Q_{n-1}^2(2\alpha\varepsilon x + \beta\varepsilon + \alpha\varepsilon^2);$$

mais on sait que ε est moindre en valeur absolue que $\frac{1}{Q_{n-1}^2}$; donc

$$\gamma' < 2\alpha x + \beta + \frac{\alpha}{Q_{n-1}^2} \text{ en valeur absolue;}$$

donc γ' ne croît pas indéfiniment; α', pour une raison analogue, ne croît pas non plus indéfiniment. Enfin, on verrait que β' ne croît pas non plus indéfiniment avec n en remplaçant dans l'expression (2) de β' les fractions $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ par $x + \tau$ et $x + \tau'$ et en observant ensuite que

$$\tau < \frac{1}{Q_n^2} \quad \text{et} \quad \tau' < \frac{1}{Q_{n-1}^2}.$$

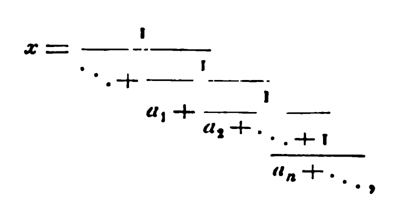
Les nombres α', β', γ' sont donc entiers et moindres que des nombres que l'on peut se donner *a priori*. L'équation $\alpha' x_n^2 + \beta' x_n + \gamma' = 0$, qui définit x_n, finira donc par se reproduire, et x_n finira par reprendre une valeur qu'il possédait pour une valeur moindre de n. Il résulte de là que la fraction x sera *périodique*. Ainsi :

THÉORÈME. — *Les racines d'une équation du second degré à coefficients entiers peuvent se développer en fractions continues limitées ou périodiques.*

Ce beau théorème est de Lagrange; la démonstration très simple que nous venons d'en donner appartient à M. Charve.

Réciproquement, toute fraction continue périodique est racine d'une équation du second degré (à coefficients entiers, si les fractions intégrantes sont les inverses de

nombres entiers). En effet, considérons la fraction



dans laquelle on n'a écrit que les termes constituant une période. Appelons y la partie périodique, x sera de la forme $\frac{a+by}{c+dy}$, a, b, c, d désignant des nombres connus. Or, si l'on borne la valeur de y à une période, en appelant $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ les deux dernières réduites, on a $y = \frac{p+ry}{q+sy}$, ce qui démontre que y est racine d'une équation du second degré, et il en est de même pour x évidemment.

IV. — MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES.

Lorsqu'une équation peut se mettre sous la forme

$$x = \varphi(x),$$

il est souvent avantageux de procéder comme il suit : soit a une valeur approchée ; on aura une valeur encore plus approchée en prenant

$$x = \varphi(a);$$

en désignant par a_1 cette nouvelle valeur, on en obtient une encore plus approchée par la formule

$$x = \varphi(a_1),$$

et ainsi de suite. Cette méthode est celle que l'on applique à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ lorsque a est très petit;

pour que cette méthode puisse s'appliquer avec succès, il faut que, si α désigne la racine cherchée, on ait

$$\text{mod.}(a-\alpha) > \text{mod.}(a_1-\alpha),$$

ou

$$\text{mod.}(a-\alpha) > \text{mod.}[\varphi(a)-\varphi(\alpha)],$$

ou

$$(1) \qquad \text{mod.}\frac{\varphi(a)-\varphi(\alpha)}{a-\alpha} < 1;$$

or, pour une valeur X de x comprise entre a et α, on aura

$$\varphi(a)-\varphi(\alpha)-(a-\alpha)\varphi'(X)=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varphi(a)-\varphi(\alpha)}{a-\alpha}=\varphi'(X),$$

et, en vertu de l'équation (1),

$$\text{mod.}\,\varphi'(X) < 1.$$

Or cette condition aura certainement lieu si $\varphi'(x) < 1$ pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a+\alpha$. Cette méthode sera d'ailleurs d'autant plus avantageuse que $\varphi'(a)$ sera plus petit.

V. — DES ÉQUATIONS QUE L'ON PEUT RÉSOUDRE PAR ABAISSEMENT.

Abaisser une équation, c'est lui faire subir une transformation qui diminue son degré et qui, par suite, facilite sa résolution.

On abaisse facilement les équations dans lesquelles les exposants de x sont multiples d'un même nombre μ; en effet, il suffit pour cela de prendre x^μ pour inconnue et d'employer la transformation $x^\mu = y$.

La connaissance d'une relation entre deux racines per-

met souvent l'abaissement. Ainsi, par exemple, si l'on sait qu'il existe entre deux racines α et β de $f(x)=0$ la relation $\varphi(\alpha, \beta)=0$, on observera que l'on a

$$f(\alpha)=0, \quad \varphi(\alpha, \beta)=0.$$

L'élimination de α donne une relation telle que

$$F(\beta)=0.$$

Cette équation et $f(\beta)=0$ ont alors une racine commune ou plusieurs racines communes que l'on obtient par des procédés que nous exposerons plus loin et qui conduisent à résoudre une équation de degré moins élevé en général que l'équation proposée.

Lorsque l'on sait que les racines d'une équation peuvent se partager en groupes tels que, l'une étant α, une autre soit $\theta(\alpha)$, en sorte que $\theta[\theta(x)]=\alpha$, on l'abaisse par la transformation $x+\theta(x)=y$. En effet, le nombre des racines de l'équation en y sera moitié moindre que celui des racines de l'équation en x, l'expression $x+\theta(x)$ n'ayant qu'une seule valeur quand on remplace x par deux racines de l'équation en x. L'équation proposée s'abaisserait évidemment aussi en posant $y=x\theta(x)$ ou en prenant pour y une fonction de x et de $\theta(x)$ qui ne change pas en permutant x et θ. Il faudra toutefois, pour que la méthode réussisse, que la fonction que l'on aura choisie de x et $\theta(x)$ ne se réduise pas à une quantité indépendante de x.

Supposons, par exemple, que l'on sache que l'équation $f(x)=0$ est telle que ses racines aient deux à deux pour produit 1 ou -1 : une telle équation est ce que l'on appelle une *équation réciproque*. On abaissera cette équation en posant

$$y=x+\frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad y=x-\frac{1}{x}.$$

Arrêtons-nous quelques instants à ce cas, qui est intéressant. Pour qu'une équation de degré pair

$$(1) \qquad A_0 x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + \ldots + A_{2m-1} x + A_{2m} = 0$$

soit réciproque, il faut qu'en changeant x en $\pm \frac{1}{x}$ elle conserve les mêmes racines. Or, par ce changement, elle devient, après l'évanouissement des dénominateurs,

$$(2) \qquad A_0 \pm A_1 x + \ldots \pm A_{2m-1} x^{2m-1} \pm A_{2m} x^{2m} = 0.$$

Les équations (2) et (1) devant avoir les mêmes racines, leurs premiers membres doivent être égaux, à un facteur près; en d'autres termes, leurs coefficients doivent être proportionnels. On peut considérer d'abord le cas où le produit de deux racines est égal à $+1$. Alors on a

$$\frac{A_0}{A_{2m}} = \frac{A_1}{A_{2m-1}} = \ldots = \frac{A_m}{A_m} = \ldots = \frac{A_{2m}}{A_0} = 1,$$

et l'on voit que les termes également distants des extrêmes sont égaux. Réciproquement, s'il en est ainsi, l'équation ne change pas quand on la transforme en $\frac{1}{x}$. Si le produit de deux racines est égal à -1, il faut distinguer le cas où m est pair de celui où il est impair. Si m est pair, on a

$$A_0 = A_{2m}, \quad A_1 = -A_{2m-1}, \quad A_2 = A_{2m-2}, \quad A_3 = -A_{2m-3}, \quad \ldots;$$

sinon,

$$A_0 = -A_{2m}, \quad A_1 = A_{2m-1}, \quad A_2 = -A_{2m-2}, \quad \ldots,$$

Une équation de degré impair peut être réciproque, si elle admet pour racine 1 ou -1; mais en supprimant cette racine on sera ramené à une équation de degré pair. Dans une équation réciproque de degré impair, les termes également distants des extrêmes sont encore égaux ou égaux et

de signes contraires. Soit donc une équation réciproque de degré pair

$$A_0 x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + \ldots + A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0 = 0.$$

Écrivons-la ainsi en divisant par x^m :

$$A_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + A_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots$$
$$+ A_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_m = 0.$$

Si nous posons $x + \frac{1}{x} = y$, nous aurons

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y, \quad \ldots,$$

et en général $x^m + \frac{1}{x^m}$ sera un polynôme entier en y de degré m.

Posons en effet

$$x^m + \frac{1}{x^m} = P_m.$$

Multiplions cette équation par $x + \frac{1}{x} = y$, nous aurons

$$x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} + x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} = P_m y$$

ou

$$P_{m+1} + P_{m-1} = P_m y,$$

ou enfin

$$P_{m+1} = P_m y - P_{m-1}.$$

Cette formule permet de calculer P_{m+1} en fonction de P_m et de P_{m-1}. On voit que, si l'on fait $m = 2$, P_3 sera un polynôme du troisième degré en y, puisque P_2 est du second degré et P_1 du premier, que P_4 sera du quatrième degré, etc.

Cette transformation donne une équation du degré m en y. Quand on l'aura résolue, l'équation

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{ou} \quad x^2 - xy + 1 = 0$$

fera connaître les deux valeurs de x correspondant à chaque valeur de y.

L'équation

$$A_0 x^{2m} - A_1 x^{2m-1} + \ldots \pm A_1 x \mp A_0 = 0$$

se résout en posant

$$x - \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2, \quad \ldots.$$

Les équations réciproques du huitième et du neuvième degré se ramèneront ainsi à des équations du quatrième, que l'on sait résoudre comme nous le verrons.

Supposons encore que, étant donnée l'équation $f(x) = 0$, on sache que la différence de deux racines a et b est δ. On aura

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0, \quad a - b = \delta.$$

On tire de la dernière $b = a - \delta$, et par suite on doit avoir à la fois

$$f(a) = 0, \quad f(a - \delta) = 0.$$

Ces deux équations ont une racine commune a au moins. Donc $f(a)$ et $f(a - \delta)$ ont un plus grand commun diviseur D, et l'équation $D = 0$, de degré inférieur à $f(a)$, admettra parmi ses racines la racine a.

VI. — ÉQUATIONS BINOMES.

On donne le nom d'*équations binômes* aux équations de la forme

$$x^m \pm A = 0.$$

Ces équations, comme on sait, se ramènent à la forme

$$x^m \pm 1 = 0.$$

Les racines de l'équation

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0$$

sont données, comme on l'a vu (t. II, p. 72), par la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m},$$

où k désigne un nombre entier quelconque. On peut d'ailleurs vérifier, au moyen de la formule de Moivre, que la $m^{\text{ième}}$ puissance de cette expression est

$$\cos 2k\pi + \sqrt{-1}\,\sin 2k\pi,$$

c'est-à-dire un; quand on y fait $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, on obtient d'ailleurs m valeurs différant, soit par le cosinus, soit par le sinus, de leur argument; en sorte que le calcul de $\sin\frac{2k\pi}{m}$ et de $\cos\frac{2k\pi}{m}$ se ramène à la résolution de l'équation (1). Le côté du polygone régulier de m côtés est égal à $2\sin\frac{2k\pi}{2m}$; je laisse à dessein le facteur k sous le signe sin, parce que, outre le polygone régulier ordinaire de m côtés, il existe encore dans la plupart des cas des polygones *étoilés* obtenus en joignant les sommets du polygone ordinaire de deux en deux, de trois en trois, etc. En procédant ainsi, on ne forme pas nécessairement un

polygone de m côtés; pour que ce polygone existe, il faut que l'on ne revienne au sommet dont on est parti sur le polygone *convexe* qu'après avoir traversé tous les autres sommets. Supposons que l'on ait joint les sommets du polygone convexe de k en k; si l'on revient au point de départ avant d'avoir passé par tous les autres sommets, c'est que n fois k forme un multiple de m; en d'autres termes, m et k ont un diviseur commun; réciproquement, si m et k ont pour diviseur commun δ, en joignant les sommets du polygone convexe de k en k, quand on aura passé par δ sommets, on sera revenu au point de départ; on n'aura donc décrit qu'un polygone de $\frac{m}{\delta}$ côtés. Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour obtenir un polygone étoilé de m côtés en joignant de k en k les sommets du polygone convexe est que m et k soient premiers entre eux.

Nous venons de dire que $2\sin\frac{2k\pi}{2m}$ représentait le côté du polygone régulier de m côtés, polygone convexe si $k=1$, étoilé si k et m sont premiers entre eux; or $\sin\frac{2k\pi}{2m}$ est le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans les racines de l'équation

$$x^{2m}-1=0.$$

Ainsi, on voit que la résolution de l'équation binôme a une liaison intime avec l'inscription des polygones réguliers convexes ou étoilés.

Remarque. — Si l'on represente par α la racine de l'équation (1) qui a le plus petit argument positif, les autres racines de cette équation pourront être représentées par $\alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n=1$: cette remarque nous sera utile plus tard.

Résolution de $x^4-1=0$. — Cette équation se dé-

compose en deux autres :

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^2 + 1 = 0.$$

Les quatre racines de l'équation proposée sont donc données par les formules

$$x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{-1},$$

et, comme on doit avoir

$$x = \cos\frac{2k\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{4},$$

on en conclut, après une discussion facile,

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad \cos 2\pi = 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sin 2\pi = 0.$$

Résolution de $x^8 - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres :

$$x^4 - 1 = 0, \text{ déjà résolue, et } x^4 + 1 = 0;$$

la seconde donne

$$x = \mp\sqrt{\pm\sqrt{-1}},$$

ou bien, en appliquant la formule identique

$$(2) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

démontrée (t. I, p. 175),

$$x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1}\right);$$

on a donc

$$\cos\frac{2k\pi}{8}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{8}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1}.$$

Dans cette formule, on doit supposer k impair; on en déduit

$$\cos\frac{2k\pi}{8}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{2k\pi}{8}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le plus petit arc compris dans la formule $\frac{2k\pi}{2m}$ ayant son sinus et son cosinus positifs, on a

$$\cos\frac{2\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{2\pi}{8}.$$

Le côté du polygone régulier de quatre côtés est $2\sin\frac{2\pi}{8}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}$, comme on le savait.

Résolution de $x^{16}-1$. — Cette équation se décompose en

$$x^8-1=0,\quad \text{déjà résolue, et}\quad x^8+1=0;$$

cette dernière donne

$$x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}},$$

c'est-à-dire

$$x=\pm\sqrt{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{-1}{2}}}.$$

En appliquant encore ici la formule (2), on a

$$x=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}\right].$$

Si l'on veut calculer $\sin\frac{2\pi}{16}$, il faudra prendre la combi-

naison de signes qui fournira la plus petite valeur possible du coefficient de $\sqrt{-1}$; cette valeur est

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)};$$

le côté de l'octogone régulier est donc

$$2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Le côté de l'octogone étoilé obtenu en joignant les sommets du précédent de trois en trois sera donné par la formule

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

On voit sans peine comment on passerait de là aux équations $x^{32}-1=0$, $x^{64}-1=0$, ...

Résolution de $x^3-1=0$. — Cette équation admet la racine $x=1$; elle se décompose donc en deux autres :

$$x-1=0, \quad x^2+x+1=0.$$

Cette dernière donne

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};$$

on en déduit

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Résolution de $x^6 - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres :

$$x^3 - 1 = 0, \text{ déjà résolue, et } x^3 + 1 = 0.$$

Or, $x^3 + 1 = 0$ se décompose en

$$x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - x + 1 = 0.$$

Cette dernière a pour racines

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\cos\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\frac{10\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le côté du polygone régulier de trois côtés est donc $\sqrt{3}$, ainsi qu'on l'a vu en Géométrie.

On passerait de là aux équations $x^{12} - 1 = 0$, $x^{24} - 1 = 0$, ... en faisant usage de la formule (2).

Résolution de $x^5 - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres :

$$x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Cette dernière est une équation réciproque; elle peut s'écrire

$$(3) \qquad x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

En posant alors

$$(4) \qquad x + \frac{1}{x} = z$$

et en observant que

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

l'équation (3) devient

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mais l'équation (4) donne

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2};$$

on a donc finalement

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(-1 \pm \sqrt{5})^2 - 16}$$

ou bien

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}\sqrt{-1}.$$

En discutant convenablement cette formule, on trouve

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \qquad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4},$$

$$\cos\frac{6\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \qquad \cos\frac{8\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},$$

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \qquad \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \sin\frac{8\pi}{5} = -\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Résolution de $x^{10} - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres :

$$x^5 - 1 = 0, \quad \text{déjà résolue, et} \quad x^5 + 1 = 0.$$

Mais cette dernière a évidemment ses racines égales et de signe contraire à celles de la première; on a donc, en particulier,

$$\sin\frac{2\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

les doubles de ces quantités représentent les côtés du pentagone régulier ordinaire et étoilé.

Résolution de $x^{20} - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres :

$$x^{10} - 1 = 0, \quad \text{déjà résolue, et} \quad x^{10} + 1 = 0.$$

Mais, si dans la première on change x en $x\sqrt{-1}$, elle se transforme dans la seconde; on conclut de là la valeur du côté du décagone ordinaire et du décagone étoilé :

$$\text{Côté du décagone ordinaire} = 2\sin\frac{2\pi}{20} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{Côté du décagone étoilé} = 2\sin\frac{6\pi}{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

la différence des côtés de ces polygones est donc égale au rayon.

Résolution de $x^{15} - 1 = 0$. — On reconnaît immédiatement que son premier membre est divisible par $x^5 - 1$ et par $x^3 - 1$; en supprimant d'abord le premier facteur, il vient

$$(5) \qquad x^{10} + x^5 + 1 = 0.$$

Le premier membre de cette équation n'est plus divisible par x^3-1, mais il l'est encore par $\frac{x^3-1}{x-1}$ ou par x^2+x+1;

en supprimant ce facteur, on a

$$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0.$$

Cette équation est réciproque et son degré s'abaisserait en posant $x + \frac{1}{x} = z$, mais il vaut mieux chercher à résoudre l'équation (5); celle-ci se déduit de l'équation

(6) $$x^2 + x + 1 = 0$$

en y remplaçant x par x^5, en sorte que, j désignant une racine de l'équation précédente, les racines de l'équation (5) sont données par la formule

$$x^5 - j = 0.$$

Les racines de l'équation (5) sont donc les racines cinquièmes des racines de l'équation (6); on les obtiendra en multipliant les racines de l'équation (6) par les racines cinquièmes de l'unité. On trouve ainsi

$$x = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}\,\sqrt{-1}\right)\frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

VII. — THÉORÈMES DE MOIVRE ET DE COTES.

Si l'on désigne par α la quantité

$$\cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m},$$

on aura

(1) $$(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots(x-\alpha^{m-1}) = x^m - 1.$$

Si l'on représente alors les imaginaires à la manière de Mourey, au moyen d'une droite égale au module, faisant avec un axe fixe OX, dans un plan fixe, un angle

égal à l'argument, les quantités $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$ pourront être représentées par les rayons d'un cercle décrit du point O comme centre et faisant avec l'axe OX des angles égaux à $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots$, ou, si l'on veut, par les rayons d'un polygone régulier de m côtés ayant son centre et l'un de ses sommets sur OX. Si l'on désigne alors par $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ les sommets de ce polygone, et si OM représente la quantité x, en vertu du théorème démontré t. II, p. 66, $x - \alpha^i$ sera représenté par A_iM, et par suite le module de $x - \alpha^i$ sera A_iM. En prenant alors les modules des deux membres dans la formule (1), on aura

$$A_0M.A_1M.A_2M\ldots A_{m-1}M = \operatorname{mod}(x^m - 1)$$

ou, si l'on pose $x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$,

$$A_0M.A_1M\ldots A_{m-1}M = \sqrt{r^{2m} - 2r^m\cos m\theta + 1};$$

c'est dans cette égalité que consiste le *théorème de Moivre*. Si l'on fait $\theta = 0$, le second membre devient $r^m - 1$ et l'on a le *théorème de Cotes*.

Corollaire. — Si l'on divise les deux membres de la formule précédente par $A_0M = r - 1$ dans l'hypothèse où $\theta = 0$, on a

$$A_1M.A_2M\ldots A_{m-1}M = r^{m-1} + r^{m-2} + \ldots + 1.$$

Si l'on fait tendre r vers l'unité, il vient alors

$$A_1M.A_2M\ldots A_{m-1}M = m.$$

Cette formule exprime que le produit des diagonales d'un polygone régulier de m côtés issues d'un même point par le carré du côté de ce polygone est égal à m fois la $(m-1)^{\text{ième}}$ puissance du rayon du cercle circonscrit.

VIII. — ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

Nous avons vu que, en augmentant toutes les racines d'une même quantité facile à déterminer, on pouvait toujours faire disparaître la $(m-1)^{\text{ième}}$ puissance de l'inconnue dans toute équation du degré m; nous pouvons donc considérer l'équation du troisième degré sous la forme

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0.$$

Pour résoudre cette équation, nous poserons

$$(2) \qquad x = y + z;$$

elle deviendra alors

$$y^3 + z^3 + (y + z)(3yz + p) + q = 0.$$

Nous pouvons profiter de l'indétermination de y et de z, pour poser

$$(3) \qquad 3yz + p = 0;$$

l'équation précédente pourra alors être remplacée par celle-ci :

$$(4) \qquad y^3 + z^3 + q = 0.$$

Les équations (3) et (4) déterminent entièrement y et z, et par suite x; de l'équation (3) on tire

$$(5) \qquad y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Les équations (4) et (5) font connaître la somme et le produit de y^3 et z^3; ces deux quantités sont racines de l'équation

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{y^3}{z^3} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

et par suite

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} x = y + z = & \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ & + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{aligned} \right.$$

Chacun des radicaux qui figure dans cette formule a trois valeurs, de sorte que x paraît susceptible de neuf valeurs, quoique nous sachions cependant que l'équation (1) n'a que trois racines distinctes. Ce paradoxe s'explique facilement en observant que les équations (4) et (5), qui nous ont servi à déterminer z et y, sont plus générales que les équations (3) et (4), auxquelles y et z sont assujettis à satisfaire; aussi ne devrons-nous prendre que les valeurs de y et z dont le produit fait $-\frac{p}{3}$. Soient y_1 et z_1 des valeurs de y et de z satisfaisant à cette condition, 1, j et j^2 les racines cubiques de l'unité; les valeurs de y sont y_1, jy_1, j^2y_1; celles de z seront z_1, jz_1, j^2z_1.

Cela posé, avec z_1 on ne pourra combiner que y_1, car les autres valeurs de y ne donneraient pas $yz = -\frac{p}{3}$. avec jz_1 on ne pourra combiner que j^2y_1, et avec j^2z_1 on ne pourra combiner que jz_1, en sorte que les racines de l'équation (1) seront

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = jy_1 + j^2z_1, \quad x_3 = j^2y_1 + jz_1;$$

dans tout ce qui suit, nous supposerons p et q réels.

La formule (6) est très incommode pour le calcul des

racines de l'équation (3) : lorsque la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est positive, on voit clairement que l'équation (1) a deux de ses racines imaginaires; mais, lorsque $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est négatif, les racines sont compliquées de radicaux, et il n'est pas possible de décider immédiatement si elles sont réelles ou imaginaires.

Si nous supposons $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, l'équation (1) acquiert manifestement deux racines égales.

Voici maintenant un moyen de calculer les racines de l'équation (1) au moyen des Tables de logarithmes :

1° Supposons d'abord $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$; on pourra poser

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta);$$

on en déduira

$$(7)\quad r=\sqrt{\frac{-p^3}{27}},\quad \cos\theta=\sqrt{\frac{-27q^2}{4p^3}},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{r};$$

la formule (6) deviendra alors

$$x=\alpha r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right)+\beta r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

α et β désignant deux racines cubiques de l'unité dont le produit fasse 1. Si l'on prend alors $\alpha=1$ et $\beta=1$, on a

$$x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3};$$

en prenant $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$, il faudra prendre

$\beta = \alpha^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$, ce qui donnera

$$x_2 = 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{2\pi+\theta}{3};$$

en prenant $\alpha = \cos\frac{4\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{3}$, il faudra prendre $\beta = \alpha^2 = \cos\frac{4\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{3}$, ce qui donnera

$$x_3 = 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{4\pi+\theta}{3} = -\ 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\pi+\theta}{3}.$$

Ces formules, jointes aux formules (7), montrent que les racines de l'équation (1) sont réelles et permettent d'effectuer par logarithmes le calcul de ces racines.

2° Supposons $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Si l'on observe que le produit des radicaux cubiques qui entrent dans la formule (6) doit faire $-\frac{p}{3}$, on sera porté à représenter l'un par $\alpha\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi$ et l'autre par $-\beta\sqrt{\frac{p}{3}}\tang\varphi$, si p est positif, α et β représentant des racines cubiques de l'unité, telles que $\alpha\beta = 1$. On trouve alors, si $\alpha = \beta = 1$,

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}(\cot\varphi - \tang\varphi) = \sqrt{\frac{p}{3}}\frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi.$$

Si l'on suppose

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3},\quad \beta = \cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1},$$

on en conclut

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{2\pi}{3}(\cot\varphi - \tang\varphi) + \sin\frac{2\pi}{3}(\cot\varphi + \tang\varphi)\sqrt{-1}\right]$$

ou

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cot 2\varphi + \sin\frac{2\pi}{3}\frac{\sqrt{-1}}{\sin 2\varphi}\right).$$

Le cas où l'on supposerait $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$, $\beta = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ n'offre pas plus de difficulté. Enfin, si, au lieu de supposer p positif, on le supposait négatif, on poserait l'un des radicaux égal à $\alpha\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{tang}\varphi$ et l'autre égal à $\beta\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot\varphi$; x pourra donc être calculé par logarithmes lorsqu'on aura calculé l'angle φ (ou du moins la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont calculables par logarithmes).

Voici maintenant comment on pourra calculer l'angle φ. On observera que, si p est positif,

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}}(\cot^3\varphi - \operatorname{tang}^3\varphi) = -q,$$

et, si p est négatif,

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}(\cot^3\varphi + \operatorname{tang}^3\varphi) = -q;$$

en posant alors

$$\operatorname{tang}^3\varphi = \operatorname{tang}\psi, \quad \cot^3\varphi = \cot\psi,$$

l'angle ψ sera déterminé par la formule

$$\cot 2\psi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\frac{p^3}{27}} \quad \text{si} \quad p > 0,$$

$$\sin 2\psi = -\sqrt{-\frac{p^3}{27}} : \frac{q}{2} \quad \text{si} \quad p < 0.$$

Toutes ces formules, comme on le voit, sont calculables par logarithmes.

IX. — ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Considérons l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}px\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 + rx + s = 0$$

ou bien

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}px\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 - rx - s.$$

Si le second membre de cette équation était un carré parfait, on pourrait regarder l'équation comme résolue; mais, en ajoutant aux deux membres $2\left(x^2 + \frac{1}{2}px\right)y + y^2$, le premier reste un carré, quel que soit y; quant au second, il devient

$$\left(\frac{p^2}{4} - q + 2y\right)x^2 + (py - r)x + y^2 - s,$$

et il sera un carré parfait si l'on détermine y par la condition

$$(py - r)^2 - 4\left(\frac{p^2}{4} - q + 2y\right)(y^2 - s) = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en y. Lorsqu'elle aura été résolue, l'équation proposée s'abaissera au second degré.

Exemple. — Proposons-nous de résoudre l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 6x + 3 = 0;$$

on l'écrira comme il suit :

$$(x^2-x)^2=x^2+6x-3,$$

puis, en désignant par y une indéterminée,

$$(1)\quad (x^2-x)^2+2(x^2-x)y+y^2=2(x^2-x)y+y^2+x^2+6x-3.$$

On disposera alors de y de manière que le second membre soit un carré parfait, ce qui fournit la relation

$$(6-2y)^2-4(2y+1)(y^2-3)=0$$

ou, en développant,

$$-8y^3+36+12=0,$$

c'est-à-dire

$$y^3=6,\quad y=\sqrt[3]{6}.$$

L'équation (1) devient alors

$$(x^2-x+\sqrt[3]{6})^2=\left(\sqrt{2\sqrt[3]{6}+1}\,x+\sqrt{\sqrt[3]{6}-3}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$x^2-x+\sqrt[3]{6}=\pm\left(\sqrt{2\sqrt[3]{6}+1}\,x+\sqrt{\sqrt[3]{6}-3}\right).$$

La question est ainsi ramenée à la résolution d'une équation du second degré. Cet exemple simple montre qu'il vaut encore mieux avoir recours aux méthodes d'approximation exposées plus haut qu'aux formules algébriques, surtout si l'on observe que l'équation du troisième degré en y que nous avons rencontrée aurait pu être complète, et par suite beaucoup plus difficile à résoudre.

EXERCICES ET NOTES.

1. Partager un hémisphère en deux parties égales par un plan parallèle à sa base.

2. Montrer que, si l'on fait $y = (x^2 - 1)^9$, l'équation

$$y^{(9)} = 0$$

peut être résolue algébriquement.

3. Former une équation à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, a, b, c désignant des nombres entiers non carrés.

4. Résoudre par les Tables de logarithmes l'équation

$$(1 + \sqrt{1 - x^2})^n + (1 - \sqrt{1 - x^2})^n = 0;$$

elle a ses racines réelles.

5. Discuter les conditions de réalité des racines de l'équation

$$x^m + px + q = 0$$

à l'aide du théorème de Rolle.

6. Pour résoudre l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

on peut poser

$$y = a + bx + cx^2$$

et disposer de a, b, c de manière à la ramener à la forme $Y^3 = A$, en faisant évanouir les termes du second et du premier degré dans l'équation transformée, qui est du troisième degré.

7. Discuter les équations de la forme

$$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

8. Trouver le tronc de cône de volume maximum inscrit dans un

hémisphère, l'une des bases du tronc coïncidant avec la base de l'hémisphère.

9. Trouver le cône de surface totale maxima inscrit dans une sphère donnée.

9. Prouver que, si l'on pose

$$C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

on pourra résoudre l'équation

$$x^3 - px - q = 0$$

en posant

$$C(\alpha) = \frac{q}{8}\sqrt{\frac{27}{p^3}}, \quad x = 2C\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

$C(x)$ et $S(x)$ s'appellent le cosinus et le sinus hyperboliques de x; ils jouissent, comme on peut le constater, de propriétés analogues aux lignes trigonométriques (*voir* le Traité de M. Laisant, député, sur ce sujet, et les Tables numériques de M. Hoüel).

10. Prouver qu'en désignant par $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et en posant

$$\varphi(x) = p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_{n-1} x^{n-1} + p_n x^n,$$
$$\psi(x) = q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_{n-1} x^{n-1} + q_n x^n$$

on a

$$\frac{1}{n}\left[\varphi(\alpha)\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \varphi(\alpha^2)\psi\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + \cdots + \varphi(\alpha^n)\psi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)\right]$$
$$= p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n.$$

11. Calculer la somme des termes du développement de $(x+a)^m$ pris de deux en deux, ou de trois en trois, ou de quatre en quatre, etc. Voici la solution : en appelant $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $\varphi(x)$ le polynôme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, on a

$$\frac{1}{n}[\varphi(x) + \varphi(\alpha x) + \ldots + \varphi(\alpha^{n-1}x)] = a_0 + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} + \ldots,$$

$$\frac{1}{nx}[\varphi(\alpha^{-1}x) + \varphi(x) + \ldots + \varphi(\alpha^{n-2}x)] = a_1 + a_{n+1} x^n + a_{2n+1} x^{2n} + \ldots,$$

....

12. L'équation $x^y = y^x$ a-t-elle d'autres solutions que $y = x$?

13. Résoudre l'équation $e^x = ax$. Résoudre l'équation $\sin x = ax$. (Ces équations ne peuvent être résolues qu'en donnant à a une valeur numérique; mais on peut discuter les racines dans le cas général.)

14. Trouver la plus petite racine positive de l'équation $\operatorname{tang} x = x$.

15. Résoudre complétement l'équation

$$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0.$$

16. Démontrer que $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = f$ peut se décomposer en une somme de deux cubes. Si l'on pose

$$f = (\alpha x + \beta y)^3 + (\alpha' x + \beta' y)^3,$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{vmatrix} = 36\,(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2(\alpha x + \beta y)\,(\alpha' x + \beta' y).$$

De là un moyen fort simple de calculer $\alpha x + \beta y$ et $\alpha' x + \beta' y$.

Le polynôme f ayant été ainsi décomposé en une somme de deux cubes, rien n'est plus facile que de résoudre l'équation $f = 0$, où l'on peut supposer maintenant $y = 1$. En effet, elle peut se mettre sous la forme

$$(\alpha x + \beta)^3 + (\alpha' x + \beta')^3 = 0,$$

d'où l'on tire, en appelant i et i^2 les racines cubiques de l'unité,

$$(\alpha x + \beta) + (\alpha' x + \beta') = 0,$$
$$(\alpha x + \beta) + i(\alpha' x + \beta') = 0, \quad (\alpha x + \beta) + i^2(\alpha' x + \beta') = 0.$$

Faire les calculs pour l'équation $x^3 + 3px + q = 0$.

CHAPITRE IV.

DE L'ÉLIMINATION ET DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

I. — SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS QUI CONTIENNENT DES PARAMÈTRES VARIABLES.

Quand les coefficients d'une équation sont des fonctions d'un paramètre variable (et ce paramètre peut être l'un des coefficients lui-même), les racines sont évidemment des fonctions de ce paramètre. Nous allons démontrer que :

Théorème. — *Si les coefficients d'une équation sont fonctions entières d'un paramètre, les racines sont fonctions continues de ce paramètre.*

Lemme. — *Si les p derniers coefficients de l'équation*

$$(1) \qquad x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

tendent simultanément vers zéro, p racines de l'équation tendront simultanément vers zéro.

En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines. Puisque a_m tend vers zéro, $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$, produit des racines, tend aussi vers zéro; donc l'une des racines α_m au moins tend vers zéro. Or on a

$$a_{m-1} = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1},$$

le signe Σ indiquant une somme de termes analogues à celui qui est écrit et obtenus en permutant les indices 1,

2, ..., $m-1$, m. Mais, si α_m tend vers zéro, il faut que le terme $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}$, le seul qui ne contienne pas α_m, tende vers zéro, ce qui exige que l'un des facteurs de ce produit, α_{m-1} par exemple, tende vers zéro. Si a_{m-2} tend aussi vers zéro, comme l'on a

$$a_{m-2} = \Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-2},$$

il faut que le second membre de cette formule tende vers zéro, et, comme α_m et α_{m-1} tendent vers zéro, il faut que le seul terme de $\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-2}$ qui ne contient ni α_m ni α_{m-1}, à savoir $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-2}$, tende aussi vers zéro, ce qui exige que l'on ait, par exemple, $\alpha_{m-2}=0$, ...

C. Q. F. D.

Réciproquement, il est clair que, si p racines tendent vers zéro, les p derniers termes de l'équation tendent vers zéro.

Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème; en effet, si nous supposons que les coefficients de l'équation (1) soient fonctions entières de y, on pourra représenter le premier membre de cette équation par $f(x,y)$, f désignant un polynôme entier. Supposons que pour $y=\beta$ l'équation (1) ou $f(x,y)=0$ ait p racines égales à α; alors on aura, pour $y=\beta$ et $x=\alpha$,

(2) $$f(\alpha,y)=0,\quad f'_\alpha=0,\quad \ldots,\quad f^{p-1}_{\alpha^{p-1}}=0.$$

Or, en posant $x=\alpha+h$, l'équation (1) devient

$$f(\alpha+h,y)=0$$

ou

$$f(\alpha,y)+hf'_\alpha+\frac{h^2}{1.2}f''_{\alpha^2}+\ldots+\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}f^{p-1}_{\alpha^{p-1}}+\ldots=0.$$

Si l'on suppose $y=\beta$, cette équation en h a, en vertu des formules (2), p racines nulles; donc, quand y tend vers β,

p racines de cette équation tendent vers zéro, ou, ce qui revient au même, p racines de (1) tendent vers α; donc enfin les racines simples ou multiples de (1) sont des fonctions continues de y. C. Q. F. D.

REMARQUE IMPORTANTE. — *Si les p premiers coefficients d'une équation*

$$(1) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

tendent vers zéro, p racines de cette équation croissent indéfiniment.

Car p racines de la transformée en $\frac{1}{x}$

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_m x^m = 0$$

tendent vers zéro.

Une équation à deux variables telle que (1), dans laquelle $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont des polynômes de degrés $0, 1, 2, \ldots$ respectivement, sera dite du degré m; si l'on suppose que $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tendent vers zéro, p racines x de cette équation croissent au delà de toute limite ou, si l'on veut, sont infinies pour $a_0 = 0, \ldots, a_{p-1} = 0$. Nous dirons alors que *l'équation en réalité du degré $m - p$ en x*

$$a_p x^{m-p} + \ldots + a_0 = 0$$

est du degré m et admet p racines infinies. C'est là une façon de parler nécessaire pour l'exactitude de certains théorèmes qui sans cela manqueraient de généralité.

II. — REMARQUE SUR LA DIVISION DES POLYNOMES.

Considérons deux polynômes

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$
$$F(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n,$$

divisons-les l'un par l'autre, en ordonnant le quotient, par exemple, suivant les puissances ascendantes de x; arrêtons-nous à un terme de degré i. Soient $Q_i(x)$ le quotient, $x^{i+1}R_i(x)$ le reste, et

$$Q_i = c_0 + c_1 x + \ldots + c_i x^i, \quad x^{i+1}R_i = r_{i+1}x^{i+1} + \ldots;$$

nous aurons

$$f(x) = Q_i F(x) + x^{i+1}R_i.$$

f n'étant pas en général divisible par $F(x)$, le quotient Q_i pourra contenir un nombre indéfiniment croissant de termes; mais on aura toujours, en divisant par $F(x)$,

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = Q_i + \frac{x^{i+1}R_i}{F(x)}.$$

Je suppose maintenant que l'on sache d'autre part que $\frac{f(x)}{F(x)}$ est développable en série convergente de la forme

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots;$$

je dis que l'on aura $k_0 = c_0$, $k_1 = c_1$, ...; en d'autres termes, la division pourra fournir le développement cherché. Cela suppose, bien entendu, b_0 ou $F(0) \gtrless 0$, sans quoi $\frac{f(x)}{F(x)}$, au lieu de se réduire à k_0 pour $x = 0$, serait infini, et d'ailleurs Q_i contiendrait un terme en $\frac{1}{x}$.

Si nous appelons $\varphi_i(x)$ la somme des $i+1$ premiers termes de la série et $x^{i+1}\psi_i(x)$ le reste, la fonction ψ_i sera finie pour $x = 0$ et l'on aura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \varphi_i + x^{i+1}\psi_i.$$

De cette formule et de (1) on tire

$$o = \varphi_i - Q_i + x^{i+1}\left(\psi_i - \frac{R_i}{F}\right)$$

ou

$$o = k_0 - c_0 + x(k_1 - c_1) + \ldots + x^{i+1}\left(\psi_i - \frac{R_i}{F}\right).$$

Si l'on fait $x = o$, on voit que $k_0 = c_0$. Supprimons k_0 et c_0, et divisons par x; nous aurons

$$o = k_1 - c_1 + x(k_2 - c_2) + \ldots.$$

En faisant encore $x = o$, il viendra $k_1 = c_1$ et ainsi de suite; si donc $\frac{f(x)}{F(x)}$ est développable suivant les puissances ascendantes de x, la division donnera le développement.

Cette proposition est encore vraie quand $b_0 = F(o) = o$, car, b_0 étant différent de zéro, elle sera vraie pour les fonctions $\frac{f(x)}{xF(x)}, \frac{f(x)}{x^2F(x)}, \ldots$.

On verrait de même que, si l'on peut développer $\frac{f(x)}{F(x)}$ suivant les puissances descendantes de x, la division donne le développement; seulement, au lieu de faire $x = o$, on fera $x = \infty$, ou, si l'on veut, on changera x en $\frac{1}{x}$ et l'on sera ramené au cas que nous venons d'examiner.

III. — SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

On appelle *fonction symétrique* de plusieurs quantités $a, b, c, \ldots$ une fonction dont la valeur ne change pas quand on permute ces lettres entre elles : ainsi $a + b + c$, abc sont des fonctions symétriques de a, b, c.

Nous allons montrer comment on peut calculer les fonctions symétriques des racines d'une équation sans pour cela avoir besoin de la résoudre.

Nous commencerons par montrer comment on peut calculer les sommes des puissances semblables des racines. Considérons l'équation

$$(1)\quad f(x)=0 \quad \text{ou} \quad a_m+a_{m-1}x+a_{m-2}x^2+\ldots+a_0x^m=0;$$

soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ses racines. Posons

$$(2)\qquad s_i=\alpha^i+\beta^i+\ldots+\lambda^i=\Sigma\alpha^i;$$

nous aurons, en particulier,

$$s_0=m.$$

On sait que

$$f(x)=a_0(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

En prenant les dérivées des logarithmes des deux membres, on a

$$(3)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\cdots+\frac{1}{x-\lambda}.$$

Supposons le module de x plus grand que ceux de α, $\beta, \ldots, \lambda$; on aura (par la formule de la page 98 du t. II)

$$\frac{1}{x-\alpha}=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{x^3}+\cdots,$$
$$\frac{1}{x-\beta}=\frac{1}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\beta^2}{x^3}+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En portant ces valeurs dans (3) et en ayant égard à (2), on a

$$(4)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{s_0}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\cdots.$$

Donc, en vertu du théorème démontré au paragraphe précédent, $s_0, s_1, s_2, \ldots$ *sont les coefficients de* $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots$ *dans le quotient de la division de* $f'(x)$ *par* $f(x)$.

On peut mettre s_0, s_1, s_2, ... sous forme de déterminants. Écrivons (4) ainsi :

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots\right)$$

ou, en remplaçant $f(x)$ par sa valeur,

$$\begin{aligned} &ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \ldots \\ &= (a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots)\left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Égalons de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de x; il viendra

$$\begin{aligned} ma_0 &= s_0a_0, \\ (m-1)a_1 &= s_0a_1 + s_1a_0, \\ (m-2)a_2 &= s_0a_2 + s_1a_1 + s_2a_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et, en observant que $s_0 = m$,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &1a_1 + s_1a_0 = 0, \\ &2a_2 + s_1a_1 + s_2a_0 = 0, \\ &3a_3 + s_1a_2 + s_2a_1 + s_3a_0 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

On en conclut à volonté les s_i en fonction des a_i ou les a_i en fonction des s_i.

On prouverait de même que $s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}, \ldots$ *sont les coefficients de* $x^0, x, x^2, \ldots$ *dans le quotient de* $-\frac{f'(x)}{f(x)}$ *ordonné suivant les puissances croissantes de* x.

Remarque. — En vertu des formules (5), si l'on suppose $a_0 = 1$, ce qui est permis, s_1 sera du premier degré en a_1, $a_2, a_3, \ldots$, car $s_1 = -a_1$; s_2 sera du second degré, s_3 du troisième, etc., s_i du $i^{\text{ième}}$ degré.

On appelle *poids* d'une fonction de a_0, a_1, a_2, ... la somme des indices des lettres qui y entrent : ainsi le poids de $a_4 a_3^2$ sera $4 + 2 \times 3$, etc. Il en résulte que le poids de s_i est i. On peut le vérifier en observant que, si l'on remplace $a_0, a_1, a_2, \ldots$ par

$$1, \quad -\frac{m}{1}a, \quad \frac{m(m-1)}{1.2}a^2, \quad -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3, \ldots,$$

$f(x)$ devient $(x-a)^m$ et s_i devient ma^i.

Théorème. — *Toute fonction symétrique rationnelle des racines d'une équation algébrique s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients de cette équation.*

Il suffit évidemment d'établir ce théorème pour les fonctions symétriques entières; or, toute fonction entière des racines $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ est une somme de termes de la forme $A\alpha^i\beta^j\ldots$; si cette fonction est symétrique, elle sera la somme de termes de la forme

$$\sum A\alpha^i\beta^j\ldots.$$

Si donc nous prouvons que cette fonction s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de l'équation, le théorème sera démontré. Or on a, pour $i \gtrless j$,

$$\sum \alpha^i\beta^j = s_i s_j - s_{i+j},$$

et, dans le cas où $i = j$,

$$2\sum \alpha^i\beta^j = s_i^2 - s_{2i}.$$

On aurait de même, en supposant $i \gtrless j \gtrless k$,

$$\sum \alpha^i \beta^j \gamma^k = s_k \sum \alpha^i \beta^j - \sum \alpha^{i+k} \beta^j - \sum \alpha^i \beta^{j+k},$$

et ainsi de suite. Donc, etc. C. Q. F. D.

Remarque. — On voit que le poids d'une fonction du degré μ des racines d'une équation sera de poids μ par rapport aux coefficients; cela résulte de ce que s_i est de poids i.

IV. — DE L'ÉLIMINATION EN GÉNÉRAL.

Éliminer $x, y, z, \ldots$ entre des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, c'est trouver des équations qui soient des conséquences *nécessaires* de celles-ci et qui ne contiennent plus $x, y, z, \ldots$. Ces équations portent le nom de *résultantes* des équations proposées.

Pour éliminer x entre les équations $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, il suffit d'exprimer que ces équations ont une solution commune, ce qui peut se faire, pour fixer les idées, en égalant à zéro le plus grand commun diviseur de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. En effet, l'équation qui exprime que $\varphi(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$ ont une solution commune est bien une conséquence *nécessaire* de ces équations, car, tant que ces équations n'auront pas de solution commune, elles ne pourront avoir lieu en même temps. Toutefois, comme $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pourraient s'annuler ensemble, quel que soit x, en choisissant convenablement un facteur indépendant de x entrant dans φ et dans ψ, nous préciserons et *nous appellerons* dans ce Chapitre *résultante de deux équations la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient au moins une racine commune,* à moins que nous ne prévenions expressément du contraire.

Nous observerons, en passant, que rien ne nous auto-

rise à croire *a priori* que la résultante de deux équations puisse remplacer l'une quelconque d'entre elles, et nous prouverons d'ailleurs plus loin qu'il n'en est pas ainsi en général.

V. — ÉLIMINATION PAR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Considérons les deux équations

$$(1) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = 0,$$

$$(2) \qquad b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \quad \text{ou} \quad \psi(x) = 0;$$

appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines de la première, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ celles de la seconde. Pour que ces équations aient lieu en même temps ou aient une solution commune, il faut que l'une au moins des quantités $\alpha_i - \beta_j$ s'annule, et cela est suffisant [j'écarte le cas où φ et ψ auraient un facteur indépendant de x commun et susceptible de s'annuler, où par conséquent l'on pourrait supposer $\varphi(x) = 0$, quel que soit x]. Il faut et il suffit donc que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)\ldots(\alpha_1 - \beta_n)\\ (\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)\ldots(\alpha_2 - \beta_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\alpha_m - \beta_1)(\alpha_m - \beta_2)\ldots(\alpha_m - \beta_n)\end{array}\right\} = 0,$$

ce qui peut s'écrire indifféremment sous l'une ou l'autre des formes

$$\frac{1}{b_0^m}\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_m) = 0,$$

$$(-1)^{mn}\frac{1}{a_0^n}\varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\ldots\varphi(\beta_n) = 0.$$

Chacune de ces deux formules pourra se calculer par la méthode des fonctions symétriques.

La première forme de la résultante nous montre qu'elle est de degré m par rapport aux coefficients de ψ, la seconde qu'elle est de degré n par rapport à ceux de φ. On peut voir que son poids est mn. En effet, un terme quelconque de la résultante est

$$b_i \alpha_1^{n-i} b_j \alpha_2^{n-j} \ldots b_k \alpha_m^{n-k};$$

le poids de $b_i b_j \ldots b_k$ est $i+j+\ldots+k$; celui de $\alpha_1^{n-i}\alpha_2^{n-j}\ldots\alpha_m^{n-k}$ est

$$n-i+n-j+\ldots+n-k = mn-i-j-\ldots-k;$$

le poids total du terme considéré est donc mn. De là résulte un théorème important :

Théorème de Bezout. — *Si l'on suppose que $a_0, a_1, \ldots, a_m$ soient des polynômes en y de degrés respectifs* $0, 1, 2, \ldots, m$, *que $b_0, b_1, \ldots, b_n$ soient également de degrés* $0, 1, 2, \ldots, n$ *respectivement par rapport à y, la résultante des équations* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *sera de degré mn en y au plus.*

En effet, le poids de la résultante est alors précisément égal à son degré relatif à y, puisque chaque coefficient a un poids égal à son degré. La résultante est donc du degré mn au plus. Je dis *au plus* parce que certaines réductions peuvent parfois faire évanouir les termes en y^{mn}, mais il est facile de voir qu'en général ces termes existeront, et, pour cela, il suffit de considérer un cas particulier où cette circonstance se présente.

Soit

$$\varphi(x) = (x-p_1 y)(x-p_2 y)\ldots(x-p_m y),$$
$$\psi(x) = x^n - y^n;$$

on en conclut la valeur suivante de la résultante :

$$(p_1^n y^n - y^n)(p_2^n y^n - y^n)\ldots = 0$$

ou

$$y^{mn}(p_1^n - 1)(p_2^n - 1)\ldots = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On prouverait facilement que la résultante de trois équations

$$\varphi(x,y) = 0, \quad \chi(x,y) = 0, \quad \psi(x,y) = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\psi(\alpha_1, \beta_1)\psi(\alpha_2, \beta_2)\ldots\psi(\alpha_\mu, \beta_\mu) = 0,$$

$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots$ désignant les solutions communes à $\varphi = 0$, $\psi = 0$, et ainsi de suite.

La méthode d'élimination que nous venons d'exposer a parfois des avantages, mais le plus souvent elle conduit à des calculs inextricables.

En voici une autre qui permet d'exprimer la résultante sous forme explicite. Supposons $\varphi(x)$ de degré m, $\psi(x)$ de degré n et soit $m \geqq n$ et

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m),$$
$$\frac{f(x)}{(x - a_i)f'(a_i)} = \xi_i,$$

$a_1, a_2, \ldots$ désignant des quantités arbitraires inégales; une fonction $F(x)$ quelconque de degré m pourra se mettre sous la forme

$$F(x) = F(a_1)\xi_1 + F(a_2)\xi_2 + \ldots + F(a_m)\xi_m$$

(*voir* au besoin le § I du Chap. V qui suit). En particulier, si l'on pose

$$\theta(x, a) = \frac{\varphi(x)\psi(a) - \varphi(a)\psi(x)}{x - a},$$
$$\theta_{ij} = \theta_{ji} = \theta(a_i, a_j),$$
$$\theta_{ii} = \varphi'(a_i)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi'(a_i),$$

on aura

$$\theta(x, a_1) = \theta_{11}\xi_1 + \theta_{12}\xi_2 \ldots + \theta_{m}\xi_n,$$
$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\theta(x, a_m) = \theta_{m1}\xi_1 + \theta_{m2}\xi_2 \ldots + \theta_{mm}\xi_m.$$

Si dans ces formules on remplace x par les racines α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de $\varphi(x)=0$, on trouve m^2 équations en vertu desquelles

$$(3) \qquad \Sigma \pm \theta(\alpha_1, a_1)\theta(\alpha_2, a_2)\ldots\theta(\alpha_m, a_m) = \Theta X,$$

Θ désignant le déterminant dont l'élément général est θ_{ij}, ainsi

$$\Theta = \Sigma \pm \theta_{11}\theta_{22}\ldots\theta_{mm}$$

et X le déterminant dont l'élément général est

$$\frac{f(\alpha_j)}{(\alpha_j - a_i)f'(a_i)};$$

or

$$\theta(\alpha_j, a_i) = -\frac{\psi(\alpha_j)\varphi(a_i)}{\alpha_j - a_i},$$

de sorte que (3) devient

$$(-1)^m \Pi\psi(\alpha_j)\Pi\varphi(a_i)\Sigma \pm \frac{1}{\alpha_1 - a_1}\cdots\frac{1}{\alpha_m - a_m}$$
$$= \Theta\frac{\Pi f(\alpha_j)}{\Pi f'(a_i)}\Sigma \pm \frac{1}{\alpha_1 - a_1}\cdots\frac{1}{\alpha_m - a_m}.$$

De là on tire, en observant que

$$\Pi\varphi(a_i) = \Pi f(\alpha_j)a_0^m(-1)^m,$$
$$\Pi\psi(\alpha_j) = \frac{1}{a_0^m}\frac{\Theta}{\Pi f'(a_i)};$$

voilà donc un moyen très simple de former explicitement $\Pi\psi(\alpha_j)$ et

$$\Theta = 0$$

est la résultante de (1), (2).

VI. — SUR LES POLYNOMES MULTIPLICATEURS.

Lorsque les deux équations

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0$$

ont une racine commune $x = \alpha$, il existe toujours deux polynômes φ_1 et ψ_1 tels que l'on ait

$$\varphi_1 \psi - \psi_1 \varphi = 0. \tag{2}$$

Quel que soit x, et réciproquement, si la formule (2) a lieu quel que soit x, ψ_1 désignant un polynôme de degré inférieur à celui de ψ et φ_1 désignant un polynôme de degré inférieur à celui de φ, les équations (1) auront une racine commune.

En effet, soit α la racine commune aux équations (1); soient $\varphi_1 = \frac{\varphi}{x-a}$, $\psi_1 = \frac{\psi}{x-a}$, il est clair que l'on aura identiquement

$$\varphi_1 \psi - \psi_1 \varphi = 0,$$

car cette formule revient à $\varphi_1 \psi_1 (x-a) - \psi_1 \varphi_1 (x-a) = 0$; ainsi (2) est une identité.

Réciproquement, soient m le degré de φ, n le degré de ψ; soit $m \geqq n$. Si la relation (2) a lieu, φ_1 étant de degré $m-1$ et ψ_1 de degré $n-1$, désignons par α une racine de $\varphi = 0$; elle annulera $\varphi\psi_1$: donc elle annulera $\varphi_1 \psi$. Or toutes les racines de $\varphi = 0$ ne sauraient annuler φ_1, qui est de degré inférieur à φ; donc une des racines de φ annule ψ, et les équations (1) ont une racine commune.

Ce raisonnement ne tombe pas en défaut quand $\varphi = 0$ a des racines multiples, car, si l'on admettait que φ_1 possède ces racines, elle devrait les posséder toutes, à moins que ψ n'en possède une aussi.

Si les équations (1) ont deux racines communes, il existera des polynômes φ_1 et ψ_1 de la forme $\frac{\varphi}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ et $\frac{\psi}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, de degrés $m-2$ et $n-2$, satisfaisant à (2) quel que soit x, et réciproquement, s'il existe des polynômes de degrés $m-2$ et $n-2$ satisfaisant à (2) quel que

soit x, les équations (1) auront deux racines communes, etc., car sur les m racines de $\varphi = 0$, en vertu de l'identité (2), $m - 2$ seulement pourront annuler φ_1 et au moins deux d'entre elles annuleront ψ, etc.

Si la formule (2) ne peut pas être rendue identique par des polynômes φ_1, ψ_1 de degrés $m-1$ et $n-1$ au plus, les équations (1) ne pourront pas avoir de racines communes, sans quoi il existerait de tels polynômes.

VII. — FORMATION DE LA RÉSULTANTE.

Soient

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$\psi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

$a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ désignant des quantités indépendantes de x et m désignant un entier supérieur ou égal à l'entier n. Proposons-nous d'éliminer x entre les équations

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0,$$
$$(2) \qquad \psi(x) = 0.$$

A cet effet, divisons $\varphi(x)$ par $\psi(x)$. Soient q_1 le quotient et φ_1 le reste, divisons $x\varphi(x)$ par $\psi(x)$; soient q_2 le quotient et φ_2 le reste, ..., divisons $x^{n-1}\varphi(x)$ par $\psi(x)$; soient q_n le quotient et $\varphi_n(x)$ le reste, nous aurons

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = q_1\psi(x) + \varphi_1(x), \\ x\varphi(x) = q_2\psi(x) + \varphi_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{n-1}\varphi(x) = q_n\psi(x) + \varphi_n(x). \end{cases}$$

Les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont de degrés $n-1$; soient donc

$$\varphi_1 = c_{10} + c_{11}x + \ldots + c_{1n-1}x^{n-1},$$
$$\varphi_2 = c_{20} + c_{21}x + \ldots + c_{2n-1}x^{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi_n = c_{n0} + c_{n1}x + \ldots + c_{nn-1}x^{n-1},$$

et désignons par R le déterminant $\Sigma \pm c_{10} c_{21} \ldots c_{nn-1}$ des coefficients des polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; je dis que

(4) $$R = 0$$

sera la résultante des équations (1), (2). En effet, développons R par rapport aux éléments de sa première colonne et soient

$$R = R_1 c_{10} + R_2 c_{20} + \ldots + R_n c_{n0};$$

multiplions la première équation (3) par R, la seconde par R_2, ... et ajoutons, nous aurons

$$\begin{aligned}&\varphi(x)[R_1 + R_2 x + \ldots + R_n x^{n-1}]\\ &\quad - \psi(x)[R_1 q_1 + R_2 q_2 + \ldots + R_n q_n] = R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2 + \ldots + R_n \varphi_n.\end{aligned}$$

Le second membre de cette formule est égal à R, en sorte que

(5) $$\varphi(x)[R_1 + R_2 x_2 + \ldots + R_n x^{n-1}] - \psi(x)[R_1 q_1 + \ldots + R_n q_n] = R.$$

Dans cette formule le coefficient de φ est de degré $n - 1$, le coefficient de ψ est de degré $m - 1$, car $q_1, q_2, \ldots$ sont respectivement de degrés

$$m - n, \quad m - n + 1, \quad \ldots, \quad m - n + n - 1 = m - 1.$$

Si donc R est nul, en vertu du théorème démontré au paragraphe précédent, les équations (1), (2) auront au moins une raison commune : $R = 0$ est donc bien la résultante cherchée.

Cette méthode fournit, en même temps que la résultante $R = 0$, les polynômes multiplicateurs

$$R_1 + R_2 x + \ldots, \quad R_1 q_1 + R_2 q_2 \ldots$$

et enfin la racine commune ainsi que ses $n - 1$ premières puissances qui sont les solutions des équations linéaires

$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, lesquelles se réduisent à $n - 1$ distinctes en vertu de $R = 0$.

Remarque. — Si R est différent de zéro, les polynômes φ et ψ n'ont pas de facteur commun; en divisant les deux membres de (5) par R, on trouvera

$$\varphi(x)\psi_1(x) - \psi(x)\varphi_1(x) = 1. \tag{6}$$

Donc quand deux polynômes φ et ψ n'ont pas de facteur commun, en appelant m et n leurs degrés respectifs, il existera des polynômes φ_1 et ψ_1 de degrés $m - 1$ et $n - 1$ donnant lieu à l'identité (6).

VIII. — DISCUSSION.

Si les quantités $R_1, R_2, \ldots, R_n$ étaient nulles, notre raisonnement tomberait en défaut; faisons alors abstraction de la dernière équation (3), développons R_n suivant les éléments $c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n-1}$ et soient

$$R_n = S_1 c_{11} + S_2 c_{21} + \ldots + S_{n-1} c_{n-1}.$$

Si nous multiplions la première formule (3) par S_1, la deuxième par $S_2 \ldots$, la $n^{\text{ième}}$ par S_{n-1} et si nous ajoutons, nous aurons, en vertu des propriétés connues des déterminants,

$$\begin{aligned}\varphi(x)[S_1 + S_2 x + \ldots + S_{n-1}x^{n-2}]\\ - \psi(x)[q_1 S_1 + \ldots + q_{n-1}S_{n-1}] = R_n\end{aligned}$$

et comme $R_n = 0$, on voit qu'il existera deux polynômes φ_1 et ψ_1 de degrés $m - 2$ et $n - 2$ tels que

$$\varphi(x)\psi_1(x) - \psi(x)\varphi_1(x) = 0,$$

et les équations (3) auront deux racines communes; ces

deux racines s'obtiendront en éliminant x^3, x^4, ..., x^{n-1} entre $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ..., $\varphi_{n-2} = 0$ et l'on aura une équation du second degré en x qui donnera les deux racines communes. On verrait de même que si S_1, S_2, ..., S_{n-1} étaient nuls, les équations (1), (2) auraient trois racines communes données par une équation du troisième degré, etc. Bien entendu, les racines communes peuvent être infinies.

Enfin, si tous les c_{ij} étaient nuls, φ serait divisible par ψ.

Théorème de Bézout. — Supposons que a_i et b_i soient des polynômes de degré i en y, il est facile de voir que R sera de degré mn en y. En effet, si dans le Tableau qui représente ce déterminant R on remplace chaque élément par son degré, on forme le Tableau

$$\begin{vmatrix} m & m-1 & \cdots & m-n+1 \\ m+1 & m & \cdots & m-n+2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ m+n-1 & m+n-2 & \cdots & m \end{vmatrix}$$

et l'on voit que tous les termes du déterminant R développé seront du même degré mn.

IX. — RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

Supposons maintenant que les équations (1) et (2) des paragraphes précédents contiennent une seconde inconnue y, de sorte que a_i et b_i soient des polynômes entiers en y de degré i, et proposons-nous de résoudre ces deux équations. Commençons par éliminer x, ce qui nous donne l'équation (4) de poids mn ou de degré mn en y.

La résultante (4) est une conséquence de (1) et (2), mais elle ne saurait remplacer l'une quelconque de ces équations; rien ne le prouve, et nous allons même voir

que le système [(1), (4)], qui admettrait $m^2 n$ solutions, est plus général que [(1), (2)], qui n'en admet que mn.

L'équation (4) fait connaître les valeurs qu'il faut attribuer à y pour que (1) et (2) aient une solution commune. Soit y_1 une de ces valeurs; si l'on attribue alors à y cette valeur, (1) et (2) n'auront en général qu'une seule racine commune x_1. Ainsi, en général, à chacune des racines y de l'équation résultante (4), on ne pourra associer qu'une seule valeur de x. Les équations (1) et (2) ont donc seulement en général mn solutions.

Ce raisonnement tombe en défaut : 1° quand la résultante (4) a des racines égales; 2° quand les équations (1), (2), pour la valeur y_1 de y tirée de (4), ont plusieurs solutions communes. Ces deux cas rentrent, comme nous allons le voir, l'un dans l'autre.

Désignons par R le premier membre de la résultante (4) et par c un élément quelconque c_{ij} du déterminant R. On a, par le théorème des fonctions composées,

$$R'_y = \Sigma R'_c c'_y.$$

Si les équations (1), (2) ont deux solutions communes, tous les mineurs R'_c de R sont nuls, R'_y sera nul et la résultante aura une racine double. On verrait de même, en appelant c et d deux éléments quelconques de R, que

$$R''_{y^2} = \Sigma (R''_{cd} c'_y d'_y + R'_c c''_{y^2}),$$

et, par suite, si (1) et (2) ont trois solutions communes, tous les mineurs du second ordre R''_{cd} de R étant nuls, la résultante $R = 0$ aura une racine triple, et ainsi de suite. Cela montre bien que jamais les équations (1), (2) n'auront plus de mn solutions.

Le raisonnement qui précède suppose les coefficients a_i, b_i tout à fait quelconques et la résultante du degré mn:

mais la résultante peut être d'un degré moindre, et une discussion devient nécessaire.

Puisque la résultante, dans le cas général, est nécessairement du degré mn, si son degré s'abaisse, il faut que quelques-unes de ses racines soient infinies pour les valeurs particulières de $a_0, a_1, \ldots, b_0, \ldots$ (nous avons expliqué le sens de cette locution p. 125). Les équations (1) et (2) sont alors satisfaites pour des valeurs infinies de y. A ces valeurs infinies de y pourront correspondre des valeurs finies de x, que l'on trouvera très simplement *a priori* en cherchant pour chaque équation les valeurs finies de x qui rendent y infini, et pour cela il suffira d'égaler à zéro les coefficients des plus hautes puissances de y dans chaque équation; on aura ainsi deux équations dont les solutions communes seront les valeurs cherchées de x. Il y a plus : à des valeurs finies de y pourront correspondre des valeurs infinies de x. Ce phénomène se présentera quand les équations (3) seront incompatibles.

Disons enfin qu'à une racine double de $R = 0$ peuvent correspondre deux valeurs égales de x, et, en comptant la solution correspondante pour deux, on voit que l'on peut dire que deux équations de degrés m et n ont toujours mn solutions, simples ou multiples, finies ou infinies.

Remarquons, en terminant, que R peut être identiquement nul (quel que soit y); alors les équations proposées ont un facteur commun et par suite une infinité de solutions.

X. — THÉORÈME GÉNÉRAL DE BÉZOUT.

Pour trouver la résultante des équations

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0$$

des degrés respectifs m et $n \leqq m$, on divise $\varphi(x)$ par $\psi(x)$; soient q_1 le quotient, φ_1 le reste, on divise $x\varphi(x)$ par $\psi(x)$;

soient q_2 le quotient, φ_2 le reste, etc. Soient

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x) = c_{10} + c_{11}x + \ldots + c_{1n-1}x^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x) = c_{n0} + c_{n1}x + \ldots + c_{nn-1}x^{n-1}; \end{array}\right.$$

on a

$$x^i\varphi(x) = q_{i+1}\psi(x) + \varphi_{i+1}(x),$$

et, par suite, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les racines de $\psi(x) = 0$,

$$(3)\qquad \alpha_j^i\varphi(\alpha_j) = \varphi_{i+1}(\alpha_j).$$

Or, si l'on forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_2) & \ldots & \varphi_1(\alpha_n) \\ \varphi_2(\alpha_1) & \varphi_2(\alpha_2) & \ldots & \varphi_2(\alpha_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_n(\alpha_1) & \varphi_n(\alpha_2) & \ldots & \varphi_n(\alpha_n) \end{vmatrix},$$

en vertu de (2), il sera égal au produit

$$\begin{vmatrix} c_{10} & c_{11} & \ldots & c_{1n-1} \\ c_{20} & c_{21} & \ldots & c_{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{n0} & c_{n1} & \ldots & c_{nn-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

et en vertu de (3), au produit

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} c_{10} & c_{11} & \ldots & c_{1n-1} \\ c_{20} & c_{21} & \ldots & c_{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{n0} & c_{n1} & \ldots & c_{nn-1} \end{vmatrix} = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n),$$

ce qui prouve une fois de plus que $R = 0$ est la résultante de $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

THÉORÈME. — *Soient φ, ψ des polynômes entiers en x et en y des degrés m et n, supposons $m \geqq n$, il existe des polynômes λ, μ donnant lieu à l'identité*

$$F(x, y) = \lambda\varphi + \mu\psi + f(y),$$

$F(x, y)$ étant un polynôme donné, et f désignant un polynôme en y seul de degré $mn - 1$ au plus.

En effet, si nous supposons que φ et ψ n'ont pas de résultante $R(y) = 0$ telle que les mineurs de R soient tous nuls en même temps, les formules (2) donneront, par exemple, en éliminant x^2, x^3, ..., x^{n-1},

$$(4) \qquad x\frac{\partial R}{\partial c_{11}} = P\varphi + Q\psi + H;$$

d'ailleurs on en tire aussi

$$(5) \qquad xR = P_1\varphi + Q_1\psi;$$

en multipliant la première par $\frac{\partial R}{\partial c_{11}}$, la seconde par $\frac{\partial R}{\partial c_{21}}$, ... et en ajoutant, P, P_1, Q, Q_1 désignent alors des polynômes entiers en x et y, et H un polynôme entier en y seulement. Or R et $\frac{\partial R}{\partial c_{11}}$ ne sont pas nuls en même temps : donc il existera des polynômes u, v entiers en y tels que

$$u\frac{\partial R}{\partial c_{11}} + vR = 1;$$

donc, si l'on multiplie (4) et (5) par u et v respectivement et si on les ajoute on trouve

$$x = M\varphi + N\psi + \theta(y),$$

M et N désignant des polynômes entiers et $\theta(y)$ une fonction entière de y; il est clair qu'en élevant les deux membres de cette formule à la puissance 2, 3, ..., on

trouvera pour x^2, x^3, ... des valeurs de la forme

$$\lambda\varphi + \mu\psi + \theta_1(y)$$

et θ_1 sera égal à $\theta^i(y)$ dans la valeur de x^i; il en résulte que tout polynôme entier $F(x,y)$ pourra se mettre sous la forme

$$\lambda\varphi + \mu\psi + f(y).$$

Je dis que l'on peut supposer $f(y)$ de degré $mn-1$ au plus; en effet, divisons $f(y)$ par $R(y)$; soient W le quotient et $f_1(y)$ le reste, comme $R(y)$ est de la forme $\lambda_1\varphi + \mu_1\psi$, on aura

$$f(y) = WR + f_1(y) = W\lambda_1\varphi + W\mu_1\psi + f_1(y)$$

et le théorème est démontré.

Proposons-nous maintenant d'éliminer x et y entre les équations

$$\chi = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0,$$

des degrés p, m, n respectivement et à coefficients quelconques; d'après le théorème précédent, on pourra poser

$$\begin{aligned} \chi &= \lambda_0\psi_1 + \mu_0\psi_1 + \chi_0(y), \\ y\chi &= \lambda_1\varphi + \mu_1\psi + \chi_1(y), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{mn-1}\chi &= \lambda_{mn-1}\varphi + \mu_{mn-1}\psi + \chi_{mn-1}(y) \end{aligned}$$

et si $\alpha_i\beta_i$ désigne une solution de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, on aura

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\chi(\alpha_i, \beta_i) = \chi_0(\beta_i), \\ &\beta_i\chi(\alpha_i, \beta_i) = \chi_1(\beta_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Soient alors $mn = s$ et

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\chi_0(y) = d_{10} + d_{11}y + \ldots + d_{1s-1}y^{s-1}, \\ &\chi_1(y) = d_{20} + d_{21}y + \ldots + d_{2s-1}y^{s-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1s-1} \\ d_{20} & d_{21} & \dots & d_{2s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{s0} & d_{s1} & \dots & d_{ss-1} \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} \chi_0(\beta_1) & \chi_0(\beta_2) & \dots & \chi_0(\beta_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{s-1}(\beta_1) & \chi_{s-1}(\beta_2) & \dots & \chi_s(\beta_s) \end{vmatrix},$$

on aura, en vertu des formules (6),

$$S = \chi(\alpha_1, \beta_1)\chi(\alpha_2, \beta_2)\dots\chi(\alpha_s, \beta_s)D,$$

D désignant le produit de toutes les différences des quantités $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$; et en vertu de (7)

$$S = \Delta D,$$

d'où l'on conclut

$$\Delta = \chi(\alpha_1, \beta_1)\dots\chi(\alpha_s, \beta_s).$$

$\Delta = 0$ est donc la résultante des équations $\chi = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

En supposant que les fonctions φ, ψ, χ contiennent un paramètre z tout en conservant leurs degrés m, n, p, il est facile d'évaluer le degré de la résultante $\Delta = 0$. En effet, si nous observons que l'on peut supposer toutes nos formules homogènes en indice, le déterminant Δ, en y remplaçant les éléments par leurs degrés par rapport à z, deviendra

$$\begin{vmatrix} p & p-1 & \dots & 0 \\ p+1 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+s-1 & p+s-2 & \dots & p \end{vmatrix};$$

son degré est donc sp ou mnp. — On voit comment on démontrerait que les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ ont mnp solutions, comment on pourrait les calculer et comment on étendrait le théorème de Bézout à 4, à 5, ... équations.

On pourrait craindre, d'après l'analyse précédente, que la résultante de trois équations, par exemple, fût de degré inférieur à mnp, mais on peut prendre un cas particulier où l'élimination est facile et montre que ce dernier est mnp; il ne peut pas être moindre dans le cas général. Il suffit pour cela de considérer les équations

$$(z - \alpha_1 x - \beta_1 y)(z - \alpha_2 x - \beta_2 y)\ldots(z - \alpha_p x - \beta_p y) = 0,$$
$$x^m - z^m = 0,$$
$$y^n - z^n = 0.$$

Les deux dernières équations ont mn solutions de la forme $x = \lambda z$, $y = \mu z$, et il est clair que la résultante sera $z^{mnp} A = 0$, A désignant une constante.

XI. — USAGES DE L'ÉLIMINATION. — RECHERCHE DES RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS. — ÉVANOUISSEMENT DES RADICAUX.

L'élimination a des usages très-variés dans toutes les branches de l'Analyse.

Si dans une équation algébrique à une inconnue on remplace l'inconnue par $x + y\sqrt{-1}$, elle prend la forme

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

En éliminant alors successivement x et y, on aura deux équations à coefficients réels, dont les racines, convenablement discutées, feront connaître les racines imaginaires de l'équation proposée.

Dans certaines recherches, on est conduit à des équations contenant des radicaux; ces équations, lorsqu'elles

ne contiennent pas de signes transcendants, se ramènent toujours à la forme ordinaire sous laquelle nous sommes accoutumés à considérer les équations algébriques. En effet, observons d'abord que, après avoir chassé les dénominateurs, les deux membres de l'équation seront deux fonctions entières des variables et des radicaux. Considérons, par exemple, l'équation

$$(1)\qquad \sqrt[2]{x+1}\,\sqrt[3]{x+\sqrt[2]{x+1}} - \sqrt[3]{x-\sqrt{x+1}} + x - 1 = 0.$$

Si nous posons

$$(2)\qquad \sqrt[2]{x^2+1} = y,\quad \sqrt[3]{x+y} = z,\quad \sqrt[3]{x-y} = t,$$

nous aurons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} yz - t + x - 1 &= 0,\\ y^2 - x - 1 &= 0,\\ z^3 - x - y &= 0,\\ t^3 - x + y &= 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine alors y, z, t, l'équation résultante ne contiendra plus de radicaux et pourra remplacer (1), à la condition, toutefois, que les radicaux, dans cette équation, seront pris avec leurs valeurs multiples ; en effet, les équations (3) ne remplaceront les équations (1) et (2) qu'à cette condition.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$\sqrt{2x} + \sqrt{x^2+1} = 0$$

n'a pas de solution, tandis que

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

obtenue en chassant les radicaux, admet la racine $x = 1$. Quoi qu'il en soit, l'équation résultante, obtenue par la

méthode que nous venons d'indiquer, contient toujours les solutions de l'équation proposée, quand elle en a, de sorte qu'une discussion facile fait connaître les solutions à rejeter.

XII. — PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

PROBLÈME. — *Étant donnée une équation*

$$f(x) = 0,$$

admettant les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, *former une équation ayant pour racines les valeurs de la fonction*

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Posons

$$y = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

et soient $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ les valeurs distinctes qu'acquiert y quand on y permute les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Le nombre μ de ces valeurs est au plus égal à $1.2.3\ldots m$, nombre des permutations de m lettres, mais il peut être moindre; c'est ce qui arrivera, par exemple, si φ est une fonction symétrique; alors $\mu = 1$. Si l'on considère alors le produit

$$(y - y_1)(y - y_2)\ldots(y - y_\mu) = F(y),$$

l'équation $F(y) = 0$ satisfera à la question. Or $F(y)$ est une fonction symétrique de $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, et par suite de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; on pourra donc en calculer la valeur, et, en l'égalant à zéro, on aura l'équation transformée.

Un autre moyen déjà indiqué page 21 consiste à éliminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ entre l'équation

$$y = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

et les équations

$$f(\alpha_1)=0,\quad f(\alpha_2)=0,\quad \ldots,\quad f(\alpha_m)=0.$$

L'un et l'autre procédé seront généralement impraticables. Nous allons néanmoins en faire une application à la formation de l'équation aux carrés des différences, pour une équation algébrique.

L'équation aux carrés des différences d'une équation donnée est celle qui a pour racines les carrés des différences que l'on peut former avec toutes ses racines.

Soient $f(x)=0$ une équation donnée, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ses m racines. L'expression $(\alpha_1, -\alpha_2)^2$ est susceptible de $\frac{m(m-1)}{2}$ valeurs par la permutation des racines. L'équation aux carrés des différences sera donc de degré $\frac{m(m-1)}{2}$. Pour la former, nous formerons d'abord l'équation aux différences, c'est-à-dire qui a pour racines les diverses valeurs de l'expression $\alpha_1 - \alpha_2$. Cette expression possède m^2 valeurs, si l'on y comprend m valeurs nulles provenant de la soustraction d'une racine d'elle-même. Nous allons alors trouver une équation de degré m^2 ; formons-la.

Il faut éliminer α_1 et α_2 entre

$$f(\alpha_1)=0,\quad f(\alpha_2)=0,\quad y=\alpha_2-\alpha_1,$$

ou, ce qui revient au même, α_1 entre

$$f(\alpha_1)=0 \quad \text{et} \quad f(y+\alpha_1)=0.$$

La résultante est

$$(1)\qquad f(y+\alpha_1)f(y+\alpha_2)\ldots f(y+\alpha_m)=0$$

ou bien

$$[f(\alpha_1)+yf'(\alpha_1)+\ldots][f(\alpha_2)+yf'(\alpha_2)+\ldots]\ldots=0.$$

Or $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, ... sont nuls, et cette résultante se

réduit, après la suppression de m racines nulles, à

$$[f'(\alpha_1)+\tfrac{1}{2}yf''(\alpha_1)+\ldots][f'(\alpha_2)+\tfrac{1}{2}yf''(\alpha_2)+\ldots]\ldots=0.$$

Cette équation n'est plus que du degré

$$m^2-m=m(m-1).$$

Si l'on observe alors que, $\alpha_1-\alpha_2$ étant racine de cette équation, $\alpha_2-\alpha_1$ doit être racine aussi, on voit qu'elle aura ses racines égales deux à deux et de signes contraires; elle devra donc conserver ses racines quand on changera y en $-y$; elle ne devra donc pas contenir de puissances impaires de y. En posant $y^2=z$, l'équation en z sera de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ et sera précisément l'équation aux carrés des différences.

Si l'on suppose que l'unité soit le coefficient de x^m dans $f(x)$, on voit que le terme de degré le plus élevé dans l'équation en y aura aussi pour coefficient 1; or le terme indépendant de y est $f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)\ldots f'(\alpha_m)$. Cette quantité est donc égale au produit des carrés des différences que l'on peut former avec les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Le produit des différences $\alpha_1-\alpha_2$ est égal, comme l'on sait (t. I, p. 144), au déterminant

$$\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_3^2 \ldots \alpha_m^{m-1},$$

et, si l'on fait son carré, on trouve, en posant $\Sigma\alpha^i=s^i$ (p. 145),

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

Maintenant, indiquons quelques simplifications qui pourront se présenter dans l'application des méthodes que nous venons d'exposer.

Si l'on veut former une équation ayant pour racines des

fonctions $\varphi(\alpha)$ des racines d'une équation donnée $f(x) = 0$, on pourra toujours, si $\varphi(\alpha)$ est rationnel, le remplacer par une fonction entière de α de degré inférieur à celui de $f(x)$ (que nous supposons entière, bien entendu). En effet, soit

$$\varphi(x) = \frac{\chi(x)}{\psi(x)}.$$

On pourra toujours trouver des polynômes N et D tels que l'on ait (p. 128)

$$(1) \qquad \psi(x)\,D(x) - f(x)\,N(x) = +1.$$

Si dans la formule précédente on fait $x = \alpha$, comme $f(\alpha) = 0$, on a

$$\psi(\alpha)\,D(\alpha) = 1 \quad \text{ou} \quad \psi(\alpha) = \frac{1}{D(\alpha)},$$

et alors $\frac{\chi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = \chi(\alpha)\,D(\alpha)$ se trouve ramenée à la forme entière. Divisons $\chi(x)D(x)$ par $f(x)$; soit Q le quotient, $R(x)$ le reste. On a

$$\chi(x)\,D(x) = Qf(x) + R(x),$$

et, pour $x = \alpha$,

$$\chi(\alpha)\,D(\alpha) \quad \text{ou} \quad \frac{\chi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = R(\alpha).$$

$R(\alpha)$ est de degré inférieur à $f(\alpha)$. Le théorème est donc établi.

En écrivant l'équation (1), nous avons supposé $\frac{\psi(x)}{f(x)}$ irréductible, puisque cette équation n'a lieu qu'à cette condition. Si cette fraction ne l'était pas, notre méthode tomberait en défaut, mais $\psi(\alpha)$ serait nul et $\frac{\chi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$ serait infini; on connaîtrait d'ailleurs une racine de $f(x) = 0$, et

il faudrait supprimer cette racine avant de faire la transformation (*).

XIII. — CONDITION POUR QU'UNE ÉQUATION AIT UNE RACINE MULTIPLE.

On appelle *discriminant* d'une équation le premier membre de l'équation qui résulte de l'élimination de l'inconnue entre cette équation et sa dérivée.

Quand on veut exprimer qu'une équation a une racine double, on écrit que l'équation et sa dérivée ont une racine commune; en d'autres termes, on élimine x entre cette équation et sa dérivée, ou, si l'on veut, on égale à zéro le *discriminant* de l'équation.

D'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, on peut former le discriminant de bien des manières :

1° Directement par les fonctions symétriques, en appelant $f(x) = 0$ l'équation proposée et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ses racines. On a, pour valeur du discriminant Δ,

$$\Delta = f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_m).$$

2° On a encore (p. 140)

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

(*) Il faut se rappeler que, si $f(x)$ et $\psi(x)$ ont un facteur commun (p. 128), on peut satisfaire à l'équation

$$\psi(x) D(x) - \varphi(x) N(x) = 0$$

et, s'ils n'ont pas de facteur commun, à l'équation

$$\psi(x) D(x) - f(x) N(x) = \pm 1,$$

$D(x)$ et $N(x)$ étant de degrés inférieurs à f et ψ respectivement.

3° Remplaçons, dans l'équation $f(x) = 0$, x par $\frac{x}{y}$ (*c'est ce que l'on appelle rendre l'équation homogène*), et chassons les dénominateurs; on aura une nouvelle équation que nous désignerons par $f(x, y) = 0$, laquelle se réduira à la proposée pour $y = 1$. Nous supposerons alors $y = 1$. Nous allons voir quel avantage il y a à introduire cette lettre, dont la valeur est 1. La fonction f étant homogène, on a

$$mf(x, y) = xf'_x + yf'_y,$$

et l'équation proposée peut s'écrire

$$xf'_x + yf'_y = 0.$$

Mais, comme on doit avoir $f'_x = 0$, l'équation proposée se réduit à $f'_y = 0$, en sorte que l'équation $\Delta = 0$ s'obtiendra en éliminant x ou x et y (car, en éliminant x, on élimine y) entre $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, ce qui est plus simple que d'éliminer x entre $f = 0$ et $f'_x = 0$, car f'_y est de degré moins élevé que f.

Supposons maintenant que l'on veuille exprimer que $f(x) = 0$ a une racine triple. Il faudra exprimer que

$$f(x) = 0, \quad f'_x = 0, \quad f''_x = 0$$

en même temps; en éliminant x entre ces équations, on aura deux résultantes qui exprimeront la condition cherchée. Mais on peut simplifier le travail de l'élimination.

Rendons l'équation $f(x) = 0$ homogène; on aura, par le théorème des fonctions homogènes (p. 174)

$$m(m-1)f(x, y) = x^2 f''_{x^2} + 2xyf''_{xy} + y^2 f''_{y^2},$$
$$(m-1)f'_x(x, y) = xf''_{x^2} + yf''_{xy}.$$

En vertu de $f = 0$, $f'_x = 0$ et $f''_x = 0$, ces formules de-

viennent

$$0 = f''_{y^2}, \quad 0 = f''_{xy}, \quad 0 = f''_{x^2},$$

et il suffira d'éliminer x ou x et y entre ces trois équations, évidemment plus simples que $f = 0$, $f'_x = 0$, $f''_{x^2} = 0$.

En général, pour exprimer que $f = 0$ ou $f(x, y) = 0$ a une racine d'ordre $m + 1$, il faudra éliminer x entre

$$0 = f^m_{y^m}, \quad 0 = f^m_{xy^{m-1}}, \quad \ldots, \quad f^m_{x^m} = 0.$$

XIV. — SUR UNE MÉTHODE RAPIDE D'ÉLIMINATION.

Pour éliminer x entre deux équations

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = 0,$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = 0,$$

on emploie quelquefois une méthode pratiquement assez rapide. Si $m > n$, on multipliera $\psi = 0$ par $a_0 x^{m-n}$ et $\varphi = 0$ par b_0; puis, par soustraction, on remplacera $\varphi = 0$ par une équation de degré $m - 1$; en opérant sur celle-ci comme sur $\varphi = 0$, on la remplacera par une équation de degré $m - 2$, et ainsi de suite. Considérons alors des équations de même degré

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

Multiplions la première par b_0, la seconde par c_0, et retranchons. Multiplions ensuite la première par b_n, la seconde par c_n, et retranchons. Nous aurons le système suivant, équivalent au système primitif,

$$(c_1 b_0 - b_1 c_0) x^{n-1} + \ldots + (c_n b_n - b_n c_0) = 0,$$
$$(c_0 b_n - b_0 c_n) x^{n-1} + \ldots + (c_n b_{n-1} - c_{n-1} b_n) = 0,$$

système qui ne contient plus x qu'à la puissance $n - 1$. On

remplacera à son tour ce système par un autre plus simple, et ainsi de suite, jusqu'à la complète disparition de x; mais il est clair que cette méthode introduit des solutions étrangères.

NOTES ET EXERCICES.

1. Pour éliminer x entre $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, de degrés m et n, on peut éliminer $x^0, x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ entre les équations

$$\begin{array}{llll} \varphi = 0, & x\varphi = 0, & \ldots, & x^{n-1}\varphi = 0, \\ \psi = 0, & x\psi = 0, & \ldots, & x^{m-1}\psi = 0. \end{array}$$

(*Méthode dialytique*, SYLVESTER.)

2. Trouver la condition pour que $x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0$ ait une racine double, triple, quadruple.

3. Rendre rationnelle l'équation

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = 1.$$

4. Former l'équation aux carrés des différences pour l'équation

$$x^m - 1 = 0.$$

5. Former l'équation aux demi-sommes des racines pour l'équation $x^3 + px + q = 0$.

6. Éliminer x entre deux équations du second degré

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0, \\ a'x^2 + b'x + c' &= 0. \end{aligned}$$

Le résultat est à retenir :

$$(ac' - ca')^2 = (bc' - cb')(ab' - ba').$$

7. Former une équation ayant pour racines les valeurs que prend la fonction $(a - b + c - d)^2$ des racines de l'équation du quatrième

degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

8. Prouver que, si $R = 0$ est la résultante de $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $(R = 0,\ R'_t = 0)$ est la condition pour que ces équations aient deux solutions communes, $(R = 0,\ R'_t = 0,\ R''_t = 0)$ est la condition pour qu'elles aient trois solutions communes, etc., t désignant le terme indépendant de x, soit dans φ, soit dans ψ.

(Lagrange.)

En partant de là, trouver la condition pour que l'équation du troisième degré ait une racine triple.

9. Considérons les équations $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$; si on les rend homogènes, elles prendront la forme

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0,$$

et l'élimination de x fera aussi disparaître y. Prouver que la solution commune à ces deux équations appartient aussi à

$$\varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x = 0.$$

Si cette dernière quantité est identiquement nulle, les équations proposées rentreront l'une dans l'autre ou seront incompatibles.

10. Prouver que, si dans les équations précédentes on fait

$$x = \alpha u + \beta v, \quad y = \alpha' u + \beta' v,$$

la résultante des nouvelles équations sera égale à l'ancienne multipliée par une puissance de $\alpha\beta' - \beta\alpha'$.

11. Prouver que la résultante des deux équations

$$x = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \quad y = \frac{\chi(t)}{\psi(t)},$$

provenant de l'élimination de t, est du degré n, si φ, χ, ψ désignent des polynômes de degré n.

12. Soit $\sum_1^n a_{ij} x_{ij}$ un polynôme homogène du second degré en x_1,

$x_2, \ldots, x_n$. On suppose $a_{ij} = a_{ji}$; la résultante des équations

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = 0,$$

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} \ \ x_2 + \ldots + \alpha_{1n} \ \ x_n = 0, \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} \ \ x_2 + \ldots + \alpha_{2n} \ \ x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{n-1,1} x_1 + \alpha_{n-1,2} x_2 + \ldots + \alpha_{n-1,n} x_n = 0 \end{array}$$

est

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \ldots & \alpha_{n-1,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{n,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{n-1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \ldots & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{11} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \ldots & \alpha_{n-1,n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(OTTO HESSE.)

13. Prouver que, si $\varphi(x) = (a - x)(b - x)\ldots(l - x)$, on a

$$\begin{vmatrix} a & x & x & \ldots & x \\ x & b & x & \ldots & x \\ . & . & . & \ldots & . \\ x & x & x & \ldots & l \end{vmatrix} = \varphi(x) - x\varphi'(x).$$

(SALMON.)

14. Consulter FAA DE BRUNO, *Théorie de l'Élimination;* SALMON, *Algèbre supérieure;* un Mémoire de M. LEMONNIER, *Annales de l'École Normale pour* 1878; CAUCHY, *Nouveaux exercices, Mémoire sur l'élimination;* J.-A. SERRET, *Algèbre supérieure*

15. Une équation de degré pair a ses racines telles que, l'une étant désignée par α, il en existe toujours une autre qui peut être désignée par $c - \alpha$. Abaisser cette équation.

16. Soient $\theta(x)$ une fonction de x, et

$$\theta[\theta(x)] = \theta^2(x), \quad \theta[\theta^2(x)] = \theta^3(x), \quad \ldots.$$

Montrer que, si les racines d'une équation peuvent être représentées par α, $\theta(\alpha)$, $\theta^2(\alpha)$, $\ldots$, $\theta^{n-1}(\alpha)$, en sorte que $\theta^n(\alpha) = \alpha$, cette équation peut être résolue algébriquement.

17. Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

On propose de former l'équation qui aurait pour racines $f(\alpha), f(\alpha^2), \ldots, f(\alpha^n)$; $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n = 1$ désignant les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Cette équation est

$$\begin{vmatrix} a_0 - x & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 - x & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_0 - x \end{vmatrix} = 0.$$

Si dans cette formule on fait $x = 0$, le premier membre se réduit, au signe près, à $f(\alpha), f(\alpha^2), \ldots, f(\alpha^{n-1})$, dont on a ainsi la valeur sous forme de déterminant.

18. Pour résoudre l'équation algébrique $f(x) = 0$, on peut diviser $f'(x)$ par $f(x)$ en ordonnant le quotient suivant les puissances descendantes de x; le rapport d'un terme du quotient au précédent tend vers une limite qui est *ordinairement* la racine de $f(x) = 0$ qui possède le plus grand module. Comment cet énoncé doit-il être modifié quand deux ou plusieurs racines ont le module maximum?

(JEAN BERNOULLI.)

19. Former l'équation aux carrés des racines de $f(x) = 0$, et montrer comment cette équation peut servir à trouver une limite supérieure du nombre des racines imaginaires de $f(x) = 0$.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES FRACTIONS RATIONNELLES.

I. — FORMULE DE LAGRANGE.

Problème. — *Trouver une fonction $f(x)$ entière de x qui prenne pour $x = \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ des valeurs données $a, b, c, \ldots, l$ en nombre n.*

Nous pouvons choisir cette fonction du degré $n-1$ et poser

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1};$$

nous aurons alors la suite d'égalités que voici,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_{n-1} \alpha^{n-1}, \\ b = A_0 + A_1 \beta + A_2 \beta^2 + \ldots + A_{n-1} \beta^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

en nombre n; en les résolvant par rapport à $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, la fonction $f(x)$ se trouvera complètement déterminée. L'existence d'une fonction $f(x)$, du degré $n-1$, satisfaisant à la question, est donc démontrée. On pourrait cependant craindre que le déterminant du système (2) soit nul; mais ce déterminant a été calculé (t. I, p. 141), et nous avons vu qu'il était égal au produit de toutes les différences que l'on peut former avec $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Or, ces quantités étant distinctes par hypothèse, le produit de leurs différences ne saurait être nul. Le système (2) est donc compatible et donne, pour $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, des fonctions linéaires

de a, b, c, ..., l (t. I, p. 140); en substituant ces valeurs dans (1), le second membre de cette formule devient lui-même une fonction linéaire de a, b, ..., l, et nous pourrons écrire

$$(3) \qquad f(x) = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \ldots + \mathrm{L}l.$$

Le second membre de cette équation devant se réduire à a, b, ..., l pour $x = \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, on satisfera évidemment à la question en prenant pour A une fonction qui s'annule pour $x = \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ et qui, pour $x = \alpha$, se réduise à 1, et, en choisissant B, C, ..., L d'une manière analogue, il faudra donc poser

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda),$$

et, en faisant $x = \alpha$,

$$1 = \mathrm{P}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda).$$

En divisant ces relations membre à membre, on trouve

$$\mathrm{A} = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)};$$

on trouverait B, C, ..., L d'une façon tout à fait semblable. La formule (3) devient alors

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = {} & a\frac{(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)} \\ & + b\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\lambda)} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Telle est la formule connue sous le nom de *formule d'interpolation de Lagrange*.

La formule (4) peut s'écrire d'une manière un peu plus simple en posant

$$\mathrm{F}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

On déduit de là, en prenant la dérivée de cette expression,

$$F'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda)+(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\lambda)\dots,$$

et par suite, pour $x=\alpha$,

$$F'(\alpha)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots(\alpha-\lambda);$$

de même

$$F'(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\dots(\beta-\lambda),$$

et ainsi de suite; la formule (4) devient alors

$$f(x)=a\frac{F(x)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha}+b\frac{F(x)}{F'(\beta)}\frac{1}{x-\beta}+\dots.$$

II. — DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

Étant donnée une fonction rationnelle, on peut toujours la mettre sous la forme $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, $\varphi(x)$ et $F(x)$ désignant deux polynômes entiers; en effectuant la division et en désignant par $E(x)$ le quotient, par $f(x)$ le reste, on a

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)}=E(x)+\frac{f(x)}{F(x)},$$

$f(x)$ étant de degré inférieur à $F(x)$.

Une fonction rationnelle telle que $\frac{f(x)}{F(x)}$, dans laquelle $f(x)$ est de degré inférieur à $F(x)$, est ce que l'on appelle proprement une *fraction rationnelle*.

THÉORÈME I. — *Toute fraction rationnelle peut se décomposer en une somme de fractions plus simples de*

la forme $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$, *A et α désignant des quantités indépendantes de x, et m un entier.*

En effet, reprenons la formule de Lagrange,

$$f(x)=a\frac{F(x)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha}+b\frac{F(x)}{F'(\beta)}\frac{1}{x-\beta}+\ldots,$$

dans laquelle $f(x)$ est une fonction qui, pour $x=\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, se réduit à $a, b, \ldots, l$, et dans laquelle $F(x)$ désigne un polynôme de la forme

$$P(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

On peut écrire cette formule comme il suit :

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha}+\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{x-\beta}+\ldots.$$

Elle a lieu quels que soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, f(\alpha), f(\beta), \ldots, f(\lambda)$ et quel que soit x; cela revient à dire qu'elle a lieu quel que soit $F(x)$, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ désignant les racines de $F(x)=0$, et quelle que soit la fonction $f(x)$ de degré inférieur à $F(x)$. En effet, la fonction $f(x)$ n'a été assujettie qu'à être de degré inférieur à $F(x)$ et à devenir $f(\alpha)$ pour $x=\alpha$, $f(\beta)$ pour $x=\beta, \ldots$, et, comme $f(\alpha), f(\beta), \ldots$ sont arbitraires, $f(x)$ est une fonction arbitraire de degré inférieur à $F(x)$. Le problème général de l'interpolation, dont nous n'avons du reste pas à nous occuper ici, consiste à déterminer une fonction quelconque qui admette n valeurs données pour n valeurs données de sa variable.

Ainsi, en supposant $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ différents, on peut poser

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\ldots+\frac{L}{x-\lambda},$$

A, B, ..., L désignant des quantités indépendantes de x. Si le degré de $f(x)$ égalait ou surpassait celui de $F(x)$,

il faudrait compléter cette formule par l'introduction d'une fonction entière $E(x)$, et l'on aurait

$$\frac{f(x)}{F(x)} = E(x) + \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \dots$$

Multiplions par $\frac{1}{x-\alpha}$ les deux membres de cette formule; elle devient

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)} = \frac{E(x)}{x-\alpha} + \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)(x-\beta)} + \dots$$

D'après ce que nous venons de voir, tous les termes du second membre de cette équation, à partir du troisième, pourront se décomposer en fractions plus simples, et l'on aura un résultat de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)} = E_1(x) + \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \dots,$$

$E_1(x)$ désignant une nouvelle fonction entière de x, quotient de $E(x)$ par $x-\alpha$, et A_1, B_1, ... désignant de nouveaux coefficients constants; en multipliant par $\frac{1}{x-\alpha}$ les deux membres de cette nouvelle équation, on a

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)^2} = \frac{E_1(x)}{x-\alpha} + \frac{A}{(x-\alpha)^3} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_1}{(x-\alpha)(x-\beta)} + \dots;$$

par une transformation analogue à celle de tout à l'heure, on arrive à la formule

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)^2} = E_2(x) + \frac{A}{(x-\alpha)^3} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{x-\alpha} + \frac{B_2}{x-\beta} + \dots,$$

et ainsi de suite; on trouve alors

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)^{m-1}} = E_{m-1}(x) + \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} + \frac{B_{m-1}}{x-\beta} + \ldots.$$

On peut maintenant multiplier les deux membres par $\frac{1}{x-\beta}$, $n-1$ fois de suite, par $\frac{1}{x-\gamma}$, $p-1$ fois de suite, etc., et l'on arrivera alors à cette conclusion que *toute fonction rationnelle est décomposable en un polynôme entier plus une série de fractions simples de la forme* $\frac{A}{(x-\omega)^i}$, *ω désignant une racine du dénominateur égale à zéro, et i désignant un exposant égal ou inférieur au degré de multiplicité de cette racine.*

C. Q. F. D.

$\frac{A}{(x-\omega)^i}$ est ce que l'on appelle une *fraction simple.*

THÉORÈME II. — *Une fonction rationnelle ne peut se décomposer que d'une seule manière en un polynôme entier et une somme de fractions simples.*

En effet, si l'on pouvait avoir à la fois

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{B_n}{(n-\beta)^n} + \ldots + E(x)$$

et

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{a_{m'}}{(x-\alpha')^{m'}} + \frac{a_{m'-1}}{(x-\alpha')^{m'-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{a_1}{x-\alpha'} + \frac{b_{n'}}{(x-\beta')^{n'}} + \ldots + E'(x),$$

on en conclurait

$$(6)\qquad \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\ldots=\frac{a_{m'}}{(x-\alpha')^{m'}}+\ldots.$$

Or, si l'on fait $x=\alpha$, le premier membre de cette formule devient infini; le second doit donc le devenir aussi, ce qui exige que l'un des binômes $x-\alpha'$, $x-\beta'$, ... soit nul pour $x=\alpha$ ou que l'une des quantités α', β', ... soit égale à α. Nous supposerons $\alpha'=\alpha$; mais alors il est bien clair que $m=m'$. En effet, si l'on avait $m'<m$, en multipliant les deux membres de la formule (6) par $(x-a)^{m'}$, le premier membre serait encore infini pour $x=\alpha$ et le second serait fini. On verrait de même que l'hypothèse $m'>m$ est inadmissible; donc $m=m'$. Si l'on multiplie alors par $(x-a)^m$ et si l'on fait $x=\alpha$, il reste $A_m=a_{m'}$; en supprimant alors les premiers termes des deux membres de la formule (6), qui sont égaux, on procédera sur la nouvelle formule ainsi obtenue comme sur l'ancienne, et l'on démontrera, comme tout à l'heure, l'égalité de deux nouveaux termes, et ainsi de suite.

C. Q. F. D.

III. — SUR LA MANIÈRE DE DIRIGER LE CALCUL DES FRACTIONS SIMPLES.

Dans le cas où le dénominateur de la fraction à décomposer ne contient que des facteurs simples, on peut faire usage de la formule

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\sum\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\,\frac{1}{x-\alpha};$$

mais on peut aussi faire usage de la méthode des coefficients indéterminés et poser

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\ldots.$$

On déduit de là

$$f(x) = \frac{AF(x)}{x-\alpha} + \frac{BF(x)}{x-\beta} + \ldots;$$

on en conclut, pour $x = \alpha$,

$$f(\alpha) = A \lim \frac{F(x)}{x-\alpha} = A \lim \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = AF'(\alpha);$$

on retrouve ainsi

$$A = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)},$$

et par suite

$$f(x) = \sum F(x) \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{1}{x-\alpha}.$$

Cette égalité ayant lieu pour $x = \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, c'est-à-dire pour plus de valeurs de x qu'il n'y a d'unités dans le degré de $f(x)$, est une identité; en divisant alors par $F(x)$, on retrouve la formule (1).

Première application. — Soit à décomposer

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}.$$

En posant

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

on en conclut

$$x = A(x+1) + B(x-1);$$

en faisant $x = 1$, on a

$$1 = 2A, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1}{2};$$

en faisant $x = -1$, on a au contraire

$$-1 = -2B \quad \text{ou} \quad B = \frac{1}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right);$$

du reste, l'application de la formule (1) aurait donné, en posant $x^2 - 1 = F(x)$,

$$A = \frac{f(1)}{F'(1)} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Deuxième application. — La méthode des coefficients indéterminés s'applique encore dans le cas où le dénominateur a des facteurs multiples; ainsi, par exemple, considérons la fraction

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)};$$

elle se développera de la manière suivante :

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A'}{(x-1)^2} + \frac{A''}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

En chassant les dénominateurs, on a

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 = {} & A(x+1)^2(x-2) + A'(x-1)(x+1)^2(x-2) \\ & + A''(x-1)^2(x+1)^2(x-2) + B(x-1)^3(x-2) \\ & + B'(x+1)(x-1)^3(x-2) + C(x-1)^3(x+1)^2. \end{aligned}$$

Si l'on fait $x = 1$, on a

$$1 = -4A, \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{1}{4}.$$

En faisant $x = -1$, on a

$$3 = +24B, \quad \text{d'où} \quad B = \frac{1}{8}.$$

En faisant $x = 2$, on a

$$3 = 9C, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{1}{3}.$$

Si l'on remplace A, B, C par leurs valeurs, il vient, réductions faites,

$$\begin{aligned} &-8x^5 + 5x^4 + 37x^3 - 19x^2 - 29x + 14 \\ &\quad = 24A'(x-1)(x+1)^2(x-2) + 24A''(x-1)^2(x+1)^2(x-2) \\ &\qquad + 24B'(x+1)(x-1)^3(x-2), \end{aligned}$$

et, en divisant par $(x-1)(x+1)(x-2)$,

$$\begin{aligned} &-8x^2 - 11x + 7 \\ &\quad = 24A'(x+1) + 24A''(x-1)(x+1) + 24B'(x-1)^2. \end{aligned}$$

Si l'on fait alors $x = 1$, on a

$$-12 = 48A', \quad A' = -\frac{1}{4}.$$

Si l'on fait $x = -1$, on a

$$10 = 96B', \quad B' = \frac{5}{48}.$$

Si enfin on fait $x = 0$, en tenant compte des valeurs déjà trouvées, on a

$$7 = -6 - 24A'' + \frac{5}{2}, \quad \text{d'où} \quad A'' = -\frac{21}{48},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = &-\frac{1}{4(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{21}{48(x-1)} \\ &+ \frac{1}{8(x+1)^2} + \frac{5}{48(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)}. \end{aligned}$$

On peut quelquefois abréger les calculs comme il suit.

Posons

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m\varphi(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \psi(x).$$

La fonction $\psi(x)$ est une fonction rationnelle qui a pour dénominateur $\varphi(x)$; quant à son numérateur, il est évidemment de degré inférieur à $\varphi(x)$, en sorte que, si l'on change x en $z+\alpha$ et si l'on multiplie par z^m, on a

$$\frac{f(z+\alpha)}{\varphi(z+\alpha)} = A_m + A_{m-1}z + \ldots + A_1 z^{m-1} + \psi(z+\alpha)z^m;$$

A_m, A_{m-1}, ... sont donc les termes du quotient de $\dfrac{f(z+\alpha)}{\varphi(z+\alpha)}$ ordonné par rapport aux puissances croissantes de z.

Troisième application. — Lorsque le dénominateur d'une fraction contient des facteurs imaginaires, la règle à suivre est toujours la même. Toutefois, il est bon d'observer que, si ces facteurs sont conjugués deux à deux, on peut faire disparaître les imaginaires en adoptant une nouvelle espèce de fractions simples.

Considérons, par exemple, la fraction réelle

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})\ldots} = \frac{f(x)}{F(x)};$$

elle se décomposera de la manière suivante :

$$\frac{A+A'\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{B+B'\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} + \ldots.$$

Or $A+A'\sqrt{-1}$ est égal à $\dfrac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}$, $B+B'\sqrt{-1}$ est égal à $\dfrac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$; ces deux quantités ne diffèrent

donc que par le signe de $\sqrt{-1}$, et l'on a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A + A'\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{A - A'\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en réduisant les deux fractions écrites au même dénominateur,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2A(x-\alpha) - 2A'\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \ldots.$$

On voit que deux facteurs imaginaires conjugués donnent lieu à une fraction simple réelle de la forme $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$; en suivant le même mode de raisonnement que plus haut, on verrait que, si le dénominateur $F(x)$ possède deux facteurs imaginaires multiples d'ordre i conjugués, $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)} = E(x) + \frac{M_p x + N_p}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p} + \frac{M_{p-1} x + N_{p-1}}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]} + \ldots.$$

On peut encore ici employer la méthode des coefficients indéterminés, mais voici une méthode qui sera peut-être plus expéditive dans un certain nombre de cas.

Considérons la fraction suivante,

$$\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p \varphi(x)},$$

dont le numérateur est censé de degré inférieur au dénominateur; on posera l'identité

$$(A) \quad \frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p\varphi(x)} = \frac{Mx + N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} + \frac{f(x) - (Mx+N)\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p\varphi(x)}$$

puis on déterminera $Mx + N$ de telle sorte que

$$f(x) - (Mx + N)\varphi(x)$$

devienne divisible par $(x - \alpha)^2 + \beta^2$; il suffira pour cela d'exprimer que cette quantité est nulle pour $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$. En faisant

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1}, \quad \varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = C + D\sqrt{-1},$$

on aura alors

$$A + B\sqrt{-1} - (M\alpha + M\beta\sqrt{-1} + N)(C + D\sqrt{-1}) = 0,$$

d'où, égalant les coefficients de $\sqrt{-1}$ et les termes réels,

$$A - (M\alpha + N)C + DM\beta = 0,$$
$$B - M\beta C - (M\alpha + N)D = 0.$$

On tire de là pour M et N des valeurs finies, car le déterminant du système est $\beta(C^2 + D^2)$, qui ne saurait être nul, car β est différent de zéro et C et D ne sauraient être nuls à la fois si $\varphi(x)$ ne contient plus le facteur $(x - \alpha)^2 + \beta^2$.

On divisera alors les deux termes de la dernière fraction qui figure dans le second membre de (A) par $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, et l'on aura un résultat de la forme

$$\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p \varphi(x)} = \frac{Mx + N}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p} + \frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}\varphi(x)}.$$

f_1 est de degré inférieur de deux unités à $f(x)$, et par suite de degré inférieur à son dénominateur; on est alors ramené à décomposer $\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}\varphi(x)}$, qui se traitera comme la proposée et ainsi de suite.

Voici enfin une dernière méthode qui conduit assez rapidement au résultat.

Après avoir mis la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ sous la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{A}{(x-a)^i} + \sum \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu},$$

A, M, N restant indéterminés, on chasse les dénominateurs; on remplace alors successivement x par chaque racine de $F(x)=0$: on détermine ainsi autant de coefficients que de racines. On prend ensuite les dérivées des deux membres de l'identité obtenue, et l'on remplace x par chacune des racines doubles de $F(x)=0$: on détermine ainsi autant de coefficients nouveaux que de racines doubles, et ainsi de suite.

Traitons un exemple. Posons

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{M'x+N'}{(x^2+1)^2}.$$

Chassant les dénominateurs, il vient

$$(1)\quad x^3 = A(x^2+1)^2 + (Mx+N)(x-1)(x^2+1) + (M'x+N')(x-1).$$

Si l'on fait $x=1$, on a

$$1 = 4A, \quad A = \frac{1}{4}.$$

Si l'on fait $x=\sqrt{-1}$, on a

$$-\sqrt{-1} = (M'\sqrt{-1}+N')(\sqrt{-1}-1),$$

et, en identifiant,

$$M'+N'=0, \quad M'-N'=1, \quad \text{d'où} \quad M'=\frac{1}{2}, \quad N'=-\frac{1}{2}.$$

Prenons maintenant les dérivées des deux membres de l'identité (1); nous aurons, en n'écrivant pas les termes

nuls pour $x = \sqrt{-1}$.

$$3x^2 = (Mx + N)(x - 1)2x + M'x + N' + M'(x - 1),$$

et, en faisant $x = \sqrt{-1}$ et en remplaçant M′ et N′ par leurs valeurs

$$-3 = (M\sqrt{-1} + N)(\sqrt{-1} - 1)2\sqrt{-1} + \frac{1}{2}\sqrt{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{-1} - 1).$$

On en conclut

$$-3 = 2M - 2N - 1 + \sqrt{-1}(1 - 2M - 2N)$$

et, en identifiant,

$$N - M = 1, \quad M + N = \frac{1}{2},$$

d'où

$$M = -\frac{1}{4}, \quad N = \frac{3}{4}.$$

On a donc

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\,\frac{3-x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{x-1}{(x^2+1)^2}.$$

IV. — A QUOI SERT LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES?

1° La décomposition des fractions rationnelles en fraction simples facilite la recherche de leurs dérivées successives, difficiles à obtenir sans cela. Les dérivées d'une fraction simple telle que $\frac{A}{(x-a)^m}$ sont, en effet,

$$\frac{-mA}{(x-a)^{m+1}},$$

$$+\frac{m(m+1)A}{(x-a)^{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{(-1)^k m(m+1)\ldots(m+k-1)A}{(x-a)^{m+k}},$$

2° Elle sert aussi à trouver les fonctions primitives des

fractions rationnelles, la fonction primitive de $\frac{1}{x-a}$ étant $\log(x-a)$ et celle de $\frac{1}{(x-a)^m}$ étant $-\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}}$. Mais nous n'avons pas ici à insister sur ce point, qui est du ressort du Calcul intégral.

3° Enfin la décomposition des fractions rationnelles a surtout pour but, en Algèbre, de permettre d'effectuer le développement de ces fonctions en série.

Théorème I. — *Toute fonction rationnelle* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *est développable suivant les puissances croissantes de sa variable* x, *pour toutes les valeurs du module de* x *moindres que la plus petite* (*) *des racines de l'équation* $F(x)=0$. *Toute fraction rationnelle* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *est, au contraire, développable suivant les puissances décroissantes de sa variable* x *pour toutes les valeurs de la variable dont le module est supérieur à la plus grande des racines de* $F(x)=0$. *Enfin, le développement de* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *aura lieu à la fois suivant les puissances ascendantes et descendantes de* x *lorsque* x *sera compris entre la plus grande et la plus petite des racines de* $F(x)=0$.

En effet, soit

$$F(x)=(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots;$$

on pourra écrire

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\sum\frac{A}{(x-a)^i}+\sum\frac{B}{(x-b)^j}+\ldots.$$

(*) J'appelle *plus petite* ou *plus grande racine* d'une équation celle qui a le plus petit ou le plus grand module, uniquement pour éviter les périphrases.

Or, si le module de x est moindre que ceux de a, b, ..., on aura, par la formule du binôme (t. II, p. 125), le module de $\frac{x}{a}$ étant < 1,

$$\frac{\text{A}}{(x-a)^i} = \frac{\text{A}(-1)^i}{a^i}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-i} = \frac{\text{A}(-1)^i}{a^i}$$
$$\times\left[1+i\frac{x}{a}+\frac{i(i+1)}{1.2}\frac{x^2}{a^2}+\ldots\right].$$

$\frac{\text{B}}{(x-b)^j}$, ... se développeront d'une façon analogue, et, en ajoutant les résultats, on aura le développement de $\frac{f(x)}{\text{F}(x)}$.

Au contraire, si le module de x est supérieur à ceux des racines a, b, ..., celui de $\frac{a}{x}$ sera moindre que 1, et l'on aura

$$\frac{\text{A}}{(x-a)^i} = \frac{\text{A}}{x^i}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-i} = \frac{\text{A}}{x^i}\left[1+i\frac{a}{x}+\frac{i(i+1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2}+\ldots\right];$$

$\frac{\text{B}}{(x-b)^j}$, ... se développera de la même façon et, par suite, $\frac{f(x)}{\text{F}(x)}$ sera développable suivant les puissances décroissantes de x.

Il est clair enfin que, si x était, par exemple, supérieur à a, inférieur à b, le développement de $\frac{f(x)}{\text{F}(x)}$ se composerait de deux autres, ordonnés l'un suivant les puissances ascendantes, l'autre suivant les puissances descendantes de x.

Dans les deux premiers cas, il est clair que le développement pourra s'obtenir par la théorie de la division (p. 114).

NOTES ET EXERCICES.

1. Décomposer en fractions simples les fractions

$$\frac{mx^m}{x^{2m}-1},\quad \frac{1}{x^m+1},\quad \frac{1.2.3\ldots m}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)},\quad \left[\frac{1}{(x-a)(x-b)}\right]^m.$$

2. Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction dont le degré du numérateur soit inférieur à celui du dénominateur. Soit

$$F(x)=(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots,$$

$$A(x)=(x-a)^m\frac{f(x)}{F(x)},\quad B(x)=(x-b)^n\frac{f(x)}{F(x)},\quad \ldots;$$

démontrer que l'on a

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\sum\left[\frac{A(a)}{(x-a)^m}+\frac{A'(a)}{1.(x-a)^{m-1}}+\frac{A''(a)}{1.2.(x-a)^{m-2}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{A^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)(x-a)}\right],$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\sum\frac{\psi_a^{n-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

$\psi_a(a)$ désignant la fonction $\frac{A(a)}{x-a}=\frac{f(x)}{F(x)}(x-a)^{m-1}$.

(Cauchy.)

3. Soit $\frac{f(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$ une fraction rationnelle. Si l'on ne sait pas décomposer $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ en facteurs du premier degré, on peut néanmoins décomposer la fraction précédente en deux autres plus simples. En effet, on a vu que, φ et ψ étant supposés sans facteurs communs, on pouvait déterminer des polynômes φ_1 et ψ_1 de degrés inférieurs à φ et à ψ tels que $\varphi\psi_1-\psi\varphi_1=1$. Si l'on multiplie par $\frac{f(x)}{\varphi\psi}$, on a alors

$$\frac{f\psi_1}{\psi}-\frac{f\varphi_1}{\varphi}=\frac{f}{\varphi\psi}.$$

Soient alors R_1 le reste de la division de $f\psi_1$ par ψ et R_2 le reste de la

division de $f\varphi_1$ par φ; il est facile de voir que l'on aura

$$\frac{R_1}{\psi} - \frac{R_2}{\varphi} = \frac{f}{\varphi\psi}.$$

On peut aussi employer la méthode des coefficients indéterminés.

4. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\frac{1}{x^2 + px + q}$, de $\operatorname{arc\,tang} x$ et de $\log \frac{x-1}{x+1}$. Trouver la fonction qui admet pour dérivée $\frac{1}{x^2-1}$.

5. La fonction $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{a}}}{1.2.3\ldots(n-1)}$ a pour $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée relative à a la fonction primitive de $\frac{(-1)^n}{(a+x^2)^n}$ relative à x.

6. On appelle *série récurrente* une série telle que

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dans laquelle il existe une relation linéaire entre p coefficients consécutifs, telle que

$$\lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \ldots + \lambda_{p-1} a_{n+p-1} = 0.$$

Les nombres λ_0, λ_1, ... constituent ce que l'on appelle l'*échelle de relation*. Cela posé, prouver que toute série récurrente est le développement d'une fonction rationnelle, et trouver l'expression de cette fonction, connaissant l'échelle de relation. Réciproquement, le développement de toute fraction rationnelle est récurrent.

7. Soient $a, b, c, \ldots, l$ les racines de $F(x) = 0$; soit $f(x)$ une fonction entière de x. La fonction symétrique

$$f(a) + f(b) + \ldots + f(l)$$

est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{F'(x)}{F(x)} f(x)$.

(Cauchy.)

8. Prouver que, si i est un entier inférieur de deux unités au moins

au degré de

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

on a

$$\frac{a^i}{f'(a)} + \frac{b^i}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^i}{f'(l)} = 0.$$

A quoi est égal le second membre pour les autres valeurs entières de i? (Euler.)

9. Si l'on développe

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}$$

en fractions simples de la forme $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$, ..., la somme des coefficients $A+B+C+\ldots$ sera nulle. Les sommes $Aa+Bb+Cc+\ldots$ seront nulles également. Compléter cet énoncé. Profiter de cette remarque pour décomposer en fractions simples $\frac{1}{x^{2n}-1}$, $\frac{1}{x^{2n}+1}$.

CHAPITRE VI.

SUR LES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ ET LEUR APPLICATION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS (*).

I. — DÉCOMPOSITION EN CARRÉS.

Nous désignerons par $a_{ij} = a_{ji}$ un coefficient indépendant des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alors tout polynôme f homogène du second degré en x pourra se présenter sous la forme

$$(1) \qquad f = \Sigma a_{ij} x_i x_j.$$

Ainsi, pour $n = 2$, on aura

$$f = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2,$$

car $a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_1 x_2 = 2 a_{12} x_1 x_2 = 2 a_{21} x_1 x_2$.

On donne quelquefois le nom de *formes* aux polynômes homogènes (*quantic* des Anglais); elles sont quadratiques, cubiques, etc., lorsqu'elles sont du deuxième ou troisième degré; enfin elles sont binaires, ternaires, etc., suivant qu'elles sont à deux, trois, etc., variables. Nous n'emploierons pas ces dénominations, évidemment inutiles.

Théorème I. — *Tout polynôme homogène du second*

(*) Quoique les matières de ce Chapitre sortent des programmes classiques, nous engageons les élèves à les lire; ils y trouveront résumée, sous une forme analytique, la théorie des coniques et des surfaces du second ordre.

degré à n variables est une somme de n carrés positifs, négatifs ou nuls (c'est-à-dire de carrés précédés d'un coefficient positif, négatif ou nul).

Pour le démontrer, posons

$$(2)\qquad \Sigma a_{ij}x_i x_j = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2,$$

X_1, X_2, ... étant définis par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} X_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ X_2 = \alpha_{21}x_2 + \alpha_{22}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n. \end{cases}$$

En identifiant alors les deux membres de (2), on aura $\frac{n(n-1)}{2}$ relations entre n^2 quantités α_{ij}, et, comme $\frac{n(n-1)}{2}$ est toujours plus petit que n^2, on pourra déterminer les α_{ij} d'une infinité de manières. Nous allons voir que l'on peut toujours effectuer cette décomposition directement.

Supposons d'abord que l'un des coefficients a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} ne soit pas nul. Soit $a_{11} \gtrless 0$, on aura

$$f = a_{11}x_1^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n) + f',$$

f' désignant un polynôme du second degré en x_2, x_3, ..., x_n. On peut alors écrire

$$(4)\qquad f = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + f'',$$

f'' désignant un polynôme ne contenant plus x_1. Si a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} sont tous nuls, on observera que

$$(5)\qquad \begin{cases} f = 2a_{12}^{-1}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n) \\ \qquad \times (a_{12}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n) + f', \end{cases}$$

f' désignant un polynôme ne contenant plus x_1 ni x_2. On peut mettre le produit qui entre sur la première

ligne sous la forme d'une différence de deux carrés par la formule $XY = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2$, et l'on voit que l'on peut toujours ramener f à un ou à deux carrés, augmentés d'un polynôme f' ne contenant plus que $n-1$ ou $n-2$ variables. En procédant sur f' comme sur f, et ainsi de suite, on démontre le théorème

THÉORÈME II. — *De quelque manière que s'effectue la décomposition de f en carrés, on doit toujours trouver le même nombre de carrés positifs, négatifs ou nuls.*

En effet, considérons deux groupes de fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_i$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_j$, où $i > j$; les X ne sauraient s'annuler tous quand on suppose tous les Y nuls. En effet, les Y étant indépendants, on pourra calculer $x_1, x_2, \ldots, x_j$ en fonction des Y et de $x_{j+1}, \ldots, x_n$, et on pourra exprimer les X en fonction des Y et de $x_{j+1}, \ldots, x_n$. Soit alors

$$X_k = \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_j Y_j + \lambda_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \lambda_n x_n,$$

λ_1, λ_2 désignant des constantes. Si les X s'annulaient avec les Y, on aurait i équations de la forme

$$\lambda_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \lambda_n x_n = 0,$$

qui, ayant lieu quels que soient $x_{j+1}, \ldots, x_n$, donneraient $\lambda_{j+1} = 0, \ldots, \lambda_n = 0$: les X pourraient s'exprimer en fonction des Y qui sont en nombre moindre; les X ne seraient pas distincts.

Cela posé, soient

$$U_1, U_2, \ldots, U_i, \quad V_1, V_2, \ldots, V_j, \quad X_1, X_2, \ldots, X_k, \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$$

des fonctions linéaires et homogènes des x; supposons les U et les V distincts ainsi que les X et les Y, on aura

$$i + j \leq n, \quad k + l \leq n.$$

Je dis que l'on n'aura pas à la fois, quels que soient les x,

$$f = U_1^2 + \ldots + U_i^2 - V_1^2 - \ldots - V_j^2,$$
$$f = X_1^2 + \ldots + X_k^2 - Y_1^2 - \ldots - Y_l^2,$$

ou

$$(1)\quad U_1^2 + \ldots + U_i^2 - V_1^2 - \ldots - V_j^2 = X_1^2 + \ldots + X_k^2 - Y_1^2 - \ldots - Y_l^2$$

si l'on n'a pas $i = k, j = l$. En effet, supposons $i < k$; on aurait aussi $i + l < k + l$; mais, si l'on suppose nuls les U et les Y, les X et les Y qui sont indépendants et en nombre supérieur aux U et aux Y ne sauraient s'annuler à la fois; c'est cependant ce qui aurait lieu en vertu de (1) qui devient

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2 + V_1^2 + \ldots + V_j^2 = 0$$

et ne saurait avoir lieu que si tous les X sont nuls.

II. — DES SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES.

Lorsque dans une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on pose

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \ldots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ x_2 = \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \ldots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \gamma_{n1}\xi_1 + \gamma_{n2}\xi_2 + \ldots + \gamma_{nn}\xi_n, \end{array} \right.$$

les quantités γ étant indépendantes des x et des ξ, on dit que l'on fait une substitution linéaire et la fonction f devient $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; F est dite transformée de f par la substitution (1). Le *module* d'une substitution telle que (1) est le déterminant $\Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\ldots\gamma_{nn}$ de ses coefficients.

La substitution (1) sera dite *orthogonale* quand on aura

$$(2)\quad \gamma_{1i}\gamma_{1j} + \gamma_{2i}\gamma_{2j} + \ldots + \gamma_{ni}\gamma_{nj} = 0 \quad \text{pour } i \gtrless j,$$

$$(3)\quad \gamma_{1i}^2 + \gamma_{2i}^2 + \ldots + \gamma_{ni}^2 = 1.$$

Les substitutions orthogonales jouissent des propriétés suivantes :

1° *Elles transforment la fonction* $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ *en* $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$.

En effet, la première fonction devient $\Sigma P_{ij} \xi_i \xi_j$, et l'on reconnaît que P_{ij} et P_{ii} sont précisément les premiers membres de (2) et (3).

2° En multipliant la première équation (1) par γ_{1i}, la seconde par γ_{2i}, etc., et en ajoutant en ayant égard à (2) et (3), on a

$$(4) \qquad \xi_i = \gamma_{1i} x_1 + \gamma_{2i} x_2 + \ldots + \gamma_{ni} x_n,$$

et il est facile de s'assurer que, si l'on changeait dans cette formule x en ξ et *vice versa*, on obtiendrait de nouvelles formules de substitution orthogonales. En effet, nous avons vu que, en vertu de (1), (2), (3), on avait

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

identiquement. Remplaçons dans cette formule les ξ par leurs valeurs (4); le coefficient de $x_i x_j$ sera

$$\gamma_{i1}\gamma_{j1} + \gamma_{i2}\gamma_{j2} + \ldots + \gamma_{in}\gamma_{jn},$$

c'est-à-dire nul si $i \gtrless j$ et l'unité si $i = j$. Les formules (4) sont donc celles d'une substitution orthogonale.

III. — RÉDUCTION A UNE SOMME DE CARRÉS PAR UNE SUBSTITUTION ORTHOGONALE.

Considérons un polynôme du second degré à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma a_{ij} x_i x_j.$$

Il existe, en général, des valeurs des variables satisfaisant aux relations

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{1}{x_n},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Pour le démontrer, égalons cette suite de rapports à s, nous aurons

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} : x_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} : x_2 = \ldots = s, \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

et, en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\cdots$ par leurs valeurs tirées de (1),

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = sx_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = sx_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \end{array}\right.$$

ou

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a_{11} - s)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - s)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - s)x_n = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1. \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce système, nous éliminerons $x_1, \ldots, x_n$, ce qui donne

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0,$$

équation que nous écrirons aussi, pour abréger,

$$(6)\qquad \theta(s) = 0,$$

en désignant par θ le déterminant qui est son premier membre. En général, l'équation $\theta = 0$ est du degré n et a n racines distinctes; ces racines, portées dans (4), fournissent des valeurs déterminées pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de sorte que les équations (1) ont en général n solutions.

IV. — DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN s.

L'équation $\theta(s) = 0$, que l'on appelle l'équation en s, jouit de propriétés curieuses que nous allons étudier.

Soient $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ses racines, soient $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que l'on déduit de (3) quand à s on substitue s_i.

THÉORÈME I. — *A une racine simple de* $\theta(s) = 0$ *correspondent des valeurs bien déterminées de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En effet, si les équations (3) donnaient pour $x_1 : x_2 : x_3 : \ldots$ des valeurs indéterminées, les mineurs de $\theta(s)$ seraient nuls; or, comme on a

$$\theta'(s) = -\frac{\partial\theta}{\partial(a_{11}-s)} - \frac{\partial\theta}{\partial(a_{22}-s)} - \ldots,$$

$\theta'(s)$ serait nul avec $\theta(s)$: la valeur de s pour laquelle on calcule $x_1, x_2, \ldots$ ne serait pas simple.

THÉORÈME II. — *Les valeurs* $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ *et* $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *correspondant à des valeurs différentes* s_1 *et* s_2 *de* s *satisfont à la relation*

$$x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + \ldots + x_{1n}x_{2n} = 0.$$

En effet, les équations (2) donnent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})}{\partial x_{11}} = s_1 x_{11},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})}{\partial x_{12}} = s_1 x_{12},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on en tire

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{11}, \ldots)}{\partial x_{11}} x_{21} + \frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{11}, \ldots)}{\partial x_{12}} x_{22} + \ldots$$
$$= s_1(x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + \ldots);$$

on aurait de même

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{21}, \ldots)}{\partial x_{21}} x_{11} + \frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{21}, \ldots)}{\partial x_{22}} x_{12} + \ldots$$
$$= s_2(x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + \ldots).$$

En vertu d'un théorème connu (*), les deux premiers membres de ces équations sont égaux : on en conclut

$$(s_1 - s_2)(x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + \ldots) = 0,$$

et comme $s_1 \gtrless s_2$ par hypothèse,

$$(6) \qquad x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + \ldots + x_{1n}x_{2n} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. — *Si les a_{ij} sont réels, l'équation $\theta(s) = 0$, aura toutes ses racines réelles.*

En effet, soit, s'il est possible, s_1 une racine imaginaire, il y aura une racine s_2 conjuguée de celle-ci, et $x_{11}, x_{12}, \ldots$ seront respectivement conjugués de $x_{21}, x_{22}, \ldots$; mais s_1 et s_2 étant conjugués, c'est-à-dire inégaux, la relation (6) aura lieu : elle revient à

$$(\bmod x_{11})^2 + (\bmod x_{12})^2 + \ldots = 0,$$

ce qui ne saurait avoir lieu si $x_{11}, x_{12}, \ldots$ n'ont pas des modules nuls, c'est-à-dire ne sont pas nuls, ce qui est absurde, puisque

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 + \ldots = 1 :$$

$\theta(s) = 0$ ne saurait donc avoir de racines imaginaires.

Théorème IV. — *Si l'équation $\theta(s) = 0$ a une racine double, tous les mineurs de $\theta(s)$ sont nuls quand on y remplace s par cette racine.*

(*) Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désigne une fonction du second degré, on a

$$x_1 \frac{\partial f(x'_1, x'_2, \ldots)}{\partial x'_1} + x_2 \frac{\partial f(x'_1, x'_2, \ldots)}{\partial x'_2} + \ldots$$
$$= x'_1 \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_2} + \ldots.$$

Il se démontre en développant $f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots)$, par rapport aux puissances de $x_1, x_2, \ldots$ ou de $x'_1, x'_2, \ldots$, par la formule de Taylor : dans l'un des cas, on trouve

$$f(x_1, x_2, \ldots) + x'_1 \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_1} + \ldots + f(x'_1, x'_2, \ldots);$$

dans l'autre,

$$f(x'_1, x'_2, \ldots) + x_1 \frac{\partial f(x'_1, x'_2, \ldots)}{\partial x'_1} + \ldots + f(x_1, x_2, \ldots).$$

En effet, rien ne nous empêche de regarder la première équation (4) comme étant l'équation $\theta(s)=0$; il suffit pour cela de supposer $x_1, x_2, \ldots$ tirés des autres équations (4) et substitués dans la première; $x_1, x_2, \ldots$ sont alors fonctions de s et en différentiant la première équation (4) dans cette hypothèse et les autres pour en tirer $x'_1=\frac{dx_1}{ds}$, $x'_2=\frac{dx_2}{ds}$, ..., on a les équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_{11}-s)x'_1+a_{12}x'_2+\ldots+a_{1n}x'_n=x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x'_1+a_{n2}x'_2+\ldots+(a_{nn}-s)x'_n=x_n. \end{array}\right.$$

Multiplions la première par $\frac{\partial\theta}{\partial a_{11}}$, la seconde par $\frac{\partial\theta}{\partial a_{21}}$, . et ajoutons, nous aurons

$$\theta x'_1 = x_1\frac{\partial\theta}{\partial a_{11}}+x_2\frac{\partial\theta}{\partial a_{21}}+\ldots+x_n\frac{\partial\theta}{\partial a_{n1}},$$

ou si $\theta=0$

$$(8)\qquad 0=x_1\frac{\partial\theta}{\partial a_{11}}+\ldots+x_n\frac{\partial\theta}{\partial a_{n1}};$$

mais, en vertu de (4),

$$x_1:\frac{\partial\theta}{\partial a_{11}}=x_2:\frac{\partial\theta}{\partial a_{21}}=\ldots,$$

la formule (8) devient alors

$$0=\left(\frac{\partial\theta}{\partial a_{11}}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial a_{12}}\right)^2+\ldots,$$

donc, si les a_{ij} sont réels

$$\frac{\partial\theta}{\partial a_{11}}=0,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial a_{12}}=\ldots,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial a_{ij}}=0,\qquad \ldots\ \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème V. — *Si l'équation $\theta(s)=0$ admet une racine triple, cette racine annule tous les mineurs du second ordre de $\theta(s)$.*

En effet, en différentiant encore les équations (7), on a

$$(a_{11}-s)x''_1+a_{12}x''_2+\ldots a_{1n}x''_n=2x'_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En multipliant la première de ces équations par $\frac{\partial^2\theta}{\partial a_{11}^2}$, la

seconde par $\frac{\partial^2 \theta}{\partial a_{11} \partial a_{12}}, \dots$ et en ajoutant on a

$$x''_1 \frac{\partial \theta}{\partial a_{11}} = 2x'_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial a_{11}} + 2x'_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial a_{11} \partial a_{12}} + \dots.$$

Si l'on observe que le premier membre est nul en vertu du théorème IV et que $x'_1, x'_2, \dots$ sont proportionnels à leurs coefficients, il vient

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial a_{11}^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial a_{11} \partial a_{12}}\right)^2 + \dots = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} = 0,$$

et ainsi de suite. Donc :

Théorème VI. — *Si $\theta(s)$ a une racine d'ordre de multiplicité i, cette racine annule les mineurs d'ordre $i+1$ de $\theta(s)$.*

Réciproquement, *si les mineurs d'ordre $m-1$ de $\theta(s)$ sont nuls pour $s = s_1$, $\theta(s) = 0$ a s_1 pour racine d'ordre de multiplicité m.*

En effet,

$$\theta'(s) = -\sum \frac{\partial \theta}{\partial a_{ii}},$$

$$\theta''(s) = (-1)^2 \sum \frac{\partial^2 \theta}{\partial a_{ii} \partial a_{jj}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\theta^m(s) = (-1)^m \sum \frac{\partial^m \theta}{\partial a_{ii} \partial a_{jj} \partial a_{kk} \dots}.$$

Maintenant concluons. A chaque racine simple de $\theta(s) = 0$ correspond un système unique et bien déterminé de x_1, $x_2, \dots, x_n$. A une racine double de $\theta(s) = 0$ correspondent une infinité de systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$; mais, comme tous les mineurs du second ordre de θ ne sont pas nuls, sans quoi la racine considérée serait triple, on pourra choisir arbitrairement x_1 par exemple, et les autres valeurs $x_2, x_3, \dots$ seront déterminées. A une

racine triple de $\theta(s)$ correspondront une infinité de systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; x_1 et x_2 pourront être choisis arbitrairement, mais alors $x_3, x_4, \ldots, x_n$ seront bien déterminées, etc.; donc :

Théorème VII. — *Les équations* (2) *ou* (3) *auront toujours au moins n systèmes de solutions.*

Théorème VIII. — *Soient*

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{nn} \end{array}$$

n systèmes de solutions des équations (3); *si l'on pose*

$$\begin{gathered} x_1 = x_{11}y_1 + x_{12}y_2 + \ldots + x_{1n}y_n, \\ x_2 = x_{21}y_1 + x_{22}y_2 + \ldots + x_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_{n1}y_1 + x_{n2}y_2 + \ldots + x_{nn}y_n, \end{gathered}$$

la fonction $f = \Sigma a_{ij}x_i x_j$ *se transformera en*

$$s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n^2.$$

En effet, en faisant le changement de variable en question, on a

$$(11)\quad \Sigma a_{ij}x_i x_j = \Sigma a_{ij}(x_{i1}y_1 + x_{i2}y_2 \ldots)(x_{j1}y_1 + x_{j2}y_2 \ldots)$$

Dans le second membre, le coefficient de y_μ^2 est

$$(12)\qquad \Sigma a_{ij}x_{i\mu}x_{j\mu} = b_{\mu\mu},$$

celui de $y_\mu y_\nu$ est

$$(13)\qquad \Sigma a_{ij}x_{i\mu}x_{j\nu} = b_{\mu\nu};$$

or on a

$$\begin{aligned} b_{\mu\nu} = \Sigma a_{ij}x_{i\mu}x_{j\nu} = \; & \frac{1}{2}x_{1\nu}\frac{\partial f(x_{1\mu}, x_{2\mu}, \ldots)}{\partial x_{1\mu}} \\ & + \frac{1}{2}x_{2\nu}\frac{\partial f(x_{1\mu}, x_{2\mu}, \ldots)}{\partial x_{2\mu}} + \ldots \end{aligned}$$

ou, en vertu de (2),

$$b_{\mu\nu} = s_{\mu}(x_{1\mu}x_{1\nu} + x_{2\mu}x_{2\nu} + \ldots + x_{n\mu}x_{n\nu}).$$

On déduit de là et du théorème II

$$b_{\mu\nu} = 0, \quad \text{si} \quad \mu \gtrless \nu,$$
$$b_{\mu}^{2} = s_{\mu}, \quad \text{si} \quad \mu = \nu.$$

Les formules (11), (12) et (13) donnent alors

$$\Sigma a_{ij}x_i x_j = s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n^2.$$

Donc $\Sigma a_{ij}x_i x_j = f$ *pourra se décomposer en une somme de* n *carrés, respectivement multipliés par les racines de l'équation en* s.

Le dernier terme de l'équation $\theta(s) = 0$, qui est le déterminant $\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{1n}$, est ce que nous appellerons le *discriminant* de la fonction $f = \Sigma a_{ij}x_i x_j$.

V. — APPLICATIONS.

Première application. — *Quelles sont les conditions pour que* $f = \Sigma a_{ij}x_i x_j$ *soit un carré parfait?*

Il devra pouvoir se mettre sous la forme $s_1 y_1^2$; l'équation $\theta(s) = 0$ devra avoir toutes ses racines nulles sauf une : donc $\theta(s)$ ainsi que tous ses mineurs jusqu'à ceux du second degré inclusivement devront être nuls pour $s = 0$; en d'autres termes, le discriminant Δ de f devra être nul ainsi que ses mineurs jusqu'à ceux du second degré inclusivement; ainsi on aura

$$a_{ij}a_{kl} - a_{il}a_{jk} = 0.$$

Bien entendu, ces équations ne sont pas toutes distinctes.

Deuxième application. — *Quelles sont les conditions pour que* f *soit un produit de deux facteurs, c'est-à-dire la somme de deux carrés?*

$\theta(s) = 0$ devra avoir toutes ses racines nulles sauf deux, donc Δ et tous ses mineurs devront être nuls jusqu'à ceux du troisième degré inclusivement.

TROISIÈME APPLICATION. — *$f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ peut-il conserver un signe constant, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$?*

Oui, si toutes les racines de $\theta(s) = 0$ sont de même signe, c'est-à-dire si $\theta(s)$ ou $\theta(-s)$ n'ont que des variations; dans le premier cas f sera positif, dans le second il sera toujours négatif.

QUATRIÈME APPLICATION. — *Trouver la condition pour que l'on puisse, par une substitution linéaire, transformer le polynôme*

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D$$

et le mettre sous la forme

$$X^2 + Y^2 + H,$$

H *désignant une constante* (*).

Il faut que f rendue homogène puisse se réduire à une somme de trois carrés; donc, son discriminant étant désigné par Δ, on devra avoir

$$(a) \qquad \Delta = 0.$$

Une substitution linéaire faite sur l'ensemble des termes de second degré doit ramener cette somme à deux carrés; donc, en appelant δ le discriminant $\frac{\partial \Delta}{\partial D}$ des termes du second degré, on doit avoir

$$(b) \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial D} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = 0.$$

Les conditions (a), (b) peuvent se transformer; en effet,

(*) C'est demander la condition pour que $f = 0$ représente un cylindre.

on peut vérifier que

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial D\, \partial A''} = \frac{\partial \Delta}{\partial D}\, \frac{\partial \Delta}{\partial A''} - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial C''}\right)^2;$$

donc, si Δ et $\frac{\partial \Delta}{\partial D}$ sont nuls, on a aussi

$$\frac{\partial \Delta}{\partial C} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial C'} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial C''} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial D} = 0,$$

et *vice versa* d'ailleurs.

VI. — QUELQUES MOTS SUR LA RÉDUCTION SIMULTANÉE DE DEUX POLYNOMES A UNE SOMME DE CARRÉS.

Une substitution orthogonale n'altérant pas une somme de n carrés, en d'autres termes, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ devenant $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ par une substitution orthogonale, il en résulte que l'on peut toujours, au moyen de deux substitutions orthogonales successives, ramener simultanément deux fonctions du second degré à des sommes de carrés. En effet, considérons les deux fonctions à n variables

$$f = \Sigma a_{ij} x_i x_j, \quad g = \Sigma b_{ij} x_i x_j,$$

effectuons la substitution orthogonale qui ramène f à la forme $s_1 y_1^2 + \ldots + s_n y_n^2$, en posant $y_1 = \frac{z_1}{\sqrt{s_1}}$, $y_2 = \frac{z_2}{\sqrt{s_2}}$, $\ldots$; la fonction f sera ramenée à la forme $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$, et la fonction g pourra être représentée par $\Sigma c_{ij} z_i z_j$. Si maintenant on effectue une nouvelle substitution orthogonale, celle qui ramène $\Sigma c_{ij} z_i z_j$ à une somme de carrés $A_1 t_1^2 + \ldots + A_n t_n^2$, f prendra la forme

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2,$$

puisque la définition même de la substitution orthogonale est de conserver leur forme aux fonctions

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

La méthode que nous venons d'indiquer tombera en défaut quand f et g seront à la fois des sommes de moins de n carrés, parce qu'alors la substitution $y = \frac{z_1}{\sqrt{s_1}}, \cdots$ sera illusoire, l'une des quantités s_1 s'annulant. Mais alors f et g ne sont plus, à proprement parler, des fonctions de n variables, et c'est sur les variables effectives, c'est-à-dire réduites à leur minimum, que l'on effectuera les substitutions orthogonales dont il a été question.

Comme on le voit, la substitution unique qui revient aux deux substitutions orthogonales que l'on est obligé de faire ne sera pas toujours réelle, puisque l'on doit remplacer y_1 par $\frac{z_1}{\sqrt{s_1}}, \cdots$ et que $s_1, s_2, \ldots$ peuvent être négatifs; mais on voit qu'elle sera réelle *si l'une des formes f ou g est une somme de carrés tous positifs ou tous négatifs.*

La possibilité de réduire deux formes à des sommes de carrés étant établie, voici comment il conviendra de procéder dans la pratique.

On effectuera sur f et sur g la substitution (1) sans la supposer orthogonale, c'est-à-dire sans supposer les relations (2), et, pour ramener f et g à des sommes de carrés, on posera, comme on a fait plus haut pour f seul,

$$(16) \qquad \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0, \quad \Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0,$$

$$(17) \qquad \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = A_\mu, \quad \Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = B_\mu;$$

en appelant alors $f_1, f_2, \ldots$ les demi-dérivées de

$$f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots),$$

prises par rapport à $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$, et $g_1, g_2, \ldots$ celles de $g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots)$ par rapport aux mêmes variables $\gamma_{1\mu}$,

$y_{2\mu}, \ldots,$ les formules (16) et (17) s'écriront

$$(18)\quad \begin{cases} f_1 y_{1\nu} + f_2 y_{2\nu} + \ldots + f_n y_{n\nu} = 0, \\ g_1 y_{1\nu} + \ldots + g_n y_{n\nu} = 0, \\ f_1 y_{1\mu} + f_2 y_{2\mu} + \ldots + f_n y_{n\mu} = A_\mu, \\ g_1 y_{1\mu} + \ldots + g_n y_{n\mu} = B_\mu \end{cases}$$

ou

$$(19)\quad f(y_{1\mu}, y_{2\mu}, \ldots) = A_\mu, \quad g(y_{1\mu}, y_{2\mu}, \ldots) = B_\mu.$$

Des équations (18) on tire

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \ldots = \frac{f_n}{g_n},$$

et, si l'on désigne par λ cette suite de rapports égaux, on aura, pour déterminer $y_{1\mu}, y_{2\mu}, \ldots, y_{n\mu}$, les équations

$$f_1 - g_1\lambda = 0, \quad f_2 - g_2\lambda = 0, \quad \ldots, \quad f_n - g_n\lambda = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(20)\quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11}) y_{1\mu} \\ \quad + (a_{12} - \lambda b_{12}) y_{2\mu} + \ldots + (a_{1n} - \lambda b_{1n}) y_{n\mu} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1}) y_{1\mu} \\ \quad + (a_{n2} - \lambda b_{n2}) y_{2\mu} + \ldots + (a_{nn} - \lambda b_{nn}) y_{n\mu} = 0. \end{cases}$$

Pour les résoudre, on formera l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \ldots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \ldots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu, \ldots, \lambda_n$. Ces racines, portées dans les équations (20), feront connaître les rapports des quantités $y_{1\mu}, y_{2\mu}, \ldots$ à l'une d'elles; on

achèvera de les déterminer, si l'on veut, en se donnant A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

Chaque racine de l'équation en λ faisant connaître un groupe des quantités $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$, le problème sera résolu.

Si l'on multiplie les équations (20) par $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$ respectivement et si on les ajoute, on trouve, en remplaçant λ par λ_μ,

$$f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) - \lambda_\mu g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) = 0$$

ou

$$A_\mu = s_\mu B_\mu.$$

Ainsi, en résumé, *pour ramener simultanément deux formes à des sommes de carrés, on peut se donner arbitrairement la forme réduite de l'une*

$$B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \ldots + B_n y_n^2,$$

et l'autre sera alors

$$B_1 \lambda_1 y_1^2 + B_2 \lambda_2 y_2^2 + \ldots + B_n \lambda_n y_n^2,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *étant les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant dont les éléments sont les coefficients des dérivées de* $f - \lambda g$.

La discussion de l'équation en λ est un peu compliquée; nous ne la donnerons pas pour ce motif.

VII. — SUR LES INVARIANTS.

Soient, en général, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a, b, c, \ldots)$ une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $a, b, c, \ldots$ ses coefficients; si l'on fait subir à ses variables une *substitution linéaire*, c'est-à-dire si l'on pose

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \ldots + c_{1n} y_n, \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \ldots + c_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \ldots + c_{nn} y_n, \end{cases}$$

cette fonction φ se changera en une fonction

$$\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n, a', b', \ldots)$$

des variables $y_1, y_2, \ldots$, dont les coefficients seront a', b', c', ...

Ceci posé, si l'on a

$$\theta(a, b, c, \ldots) = \Omega\theta(a', b', c', \ldots),$$

Ω désignant une puissance du déterminant

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

on dira que $\theta(a, b, c, \ldots)$ est un *invariant*. C est ce que l'on appelle le *module*, ou le *déterminant* de la substitution. Une substitution est unimodulaire quand son module est 1.

Un invariant $\theta(a, b, c, \ldots)$ est absolu quand on a

$$\theta(a, b, c, \ldots) = \theta(a', b', c', \ldots).$$

On appelle *discriminant* d'une fonction homogène du second degré le dernier terme de l'équation en s relatif à cette fonction, ou, si l'on veut, le déterminant de ses coefficients.

THÉORÈME I. — *Le discriminant d'une fonction homogène du second degré est un invariant.*

Considérons, en effet, la fonction $\sum_1^n a_{ij}x_ix_j$, et déterminons la quantité s de telle sorte que

$$(2) \qquad \sum a_{ij}x_ix_j - s(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n)^2$$

se réduise à une somme de $n - 1$ carrés. Pour qu'il en soit

ainsi, il faut écrire que le discriminant de cette fonction est nul ou que

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0.$$

Cela posé, appliquons à la fonction (2) la substitution (1); elle prendra la forme

$$(4)\qquad \Sigma b_{ij}y_iy_j - s\Sigma k_{ij}y_iy_j,$$

$\Sigma b_{ij}y_iy_i$ désignant la fonction dans laquelle se transforme $\Sigma a_{ij}x_ix_j$ et $\Sigma k_{ij}y_iy_j$ la fonction dans laquelle se transforme $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, en sorte que l'on a

$$(5)\qquad k_{ij} = c_{1i}c_{1j}+c_{2i}c_{2j}+\ldots+c_{ni}c_{nj}.$$

Or, si la fonction (2) est une somme de $n-1$ carrés, la fonction (4) devra être aussi, pour les mêmes valeurs de s, une somme de $n-1$ carrés, en vertu de la loi de M. Sylvester (p. 175); donc on devra avoir

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}-k_{11}s & b_{12}-k_{12}s & \dots & b_{1n}-k_{1n}s \\ b_{21}-k_{21}s & b_{22}-k_{22}s & \dots & b_{2n}-k_{2n}s \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ b_{n1}-k_{n1}s & b_{n2}-k_{n2}s & \dots & b_{nn}-k_{nn}s \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations en s (3) et (6) ont donc les mêmes racines, et, par suite, le produit des racines doit être le même dans ces deux équations; on en conclut

$$A = \frac{B}{K} \quad \text{ou} \quad B = AK,$$

A désignant le déterminant des quantités a_{ij}, B celui des quantités b_{ij} et K celui des quantités k_{ij}. Or A est le dis-

criminant de la fonction $\Sigma a_{ij}x_ix_j$, B est le discriminant de la fonction transformée $\Sigma b_{ij}y_iy_j$; quant à K, c'est précisément, en vertu des relations (5), le carré du déterminant C de la substitution (t. I, p. 141). Donc :

Le nouveau discriminant est égal à l'ancien, multiplié par le carré du déterminant de la substitution; donc le discriminant d'une fonction du second degré est un invariant.

THÉORÈME II. — *Les coefficients de l'équation en s* (3) *sont,* si l'on peut s'exprimer ainsi, *des invariants de la fonction* $\Sigma a_{ij}x_ix_j$ *pour toute substitution orthogonale.*

En effet, l'équation en s s'obtient en égalant à zéro le discriminant de

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j - s(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2);$$

or, ce discriminant étant désigné par S et celui de la fonction F transformée par T, on a identiquement

$$F = \Sigma b_{ij}y_iy_j - s(y_1^2 + y_2^2 \ldots), \quad T = C^2S.$$

Les coefficients de T ne diffèrent donc de ceux de S que par le facteur $C^2 = 1$. C. Q. F. D.

C'est ce qui était presque évident *a priori*; en effet, en égalant à zéro les coefficients de l'équation en s, on exprime que $\Sigma a_{ij}x_ix_j$ se décompose en n carrés, dont un, deux, trois, etc., sont nuls.

VIII. — MÉTHODE POUR SÉPARER LES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS.

Voici une méthode qui permet de séparer les racines des équations et qui exige moins de calculs que celle de Sturm.

Considérons une équation $f(x) = 0$; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$

α_n ses racines. Le polynôme

$$
\begin{aligned}
&(x-\alpha_1)(x_0+x_1\alpha_1+x_2\alpha_1^2+\ldots+x_{n-1}\alpha_1^{n-1})^2\\
+&(x-\alpha_2)(x_0+x_1\alpha_2+x_2\alpha_2^2+\ldots+x_{n-1}\alpha_2^{n-1})^2\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&(x-\alpha_n)(x_0+x_1\alpha_n+x_2\alpha_n^2+\ldots+x_{n-1}\alpha_n^{n-1})^2,
\end{aligned}
$$

que nous représenterons aussi par

$$
(1)\qquad V(x)=\Sigma(x-\alpha_i)(x_0+x_1\alpha_i+\ldots+x_{n-1}\alpha_i^{n-1})^2,
$$

est une somme de n carrés, qui contient autant de carrés positifs qu'il y a de racines réelles de $f(x)$ inférieures à x et autant de carrés négatifs qu'il y a de racines de $f(x)$ supérieures à x. J'ajoute qu'un couple de racines imaginaires introduit deux carrés imaginaires, dont la somme réelle peut être remplacée par la différence de deux carrés réels. En effet, considérons la somme

$$
\begin{aligned}
&(x-p-q\sqrt{-1})[x_0+x_1(p+q\sqrt{-1})+\ldots]^2\\
+&(x-p+q\sqrt{-1})[x_0+x_1(p-q\sqrt{-1})+\ldots]^2,
\end{aligned}
$$

où $p+q\sqrt{-1}$ et $p-q\sqrt{-1}$ désignent deux racines conjuguées; elle peut se mettre sous la forme

$$
(A+B\sqrt{-1})(P+Q\sqrt{-1})^2+(A-B\sqrt{-1})(P-Q\sqrt{-1})^2,
$$

A, B désignant des nombres indépendants de x_0, x_1, ..., x_{n-1}, et P, Q des fonctions linéaires de ces variables. En effectuant les calculs, on trouve $2A(P^2-Q^2)-4BPQ$, ce qui est bien une différence de carrés, les coefficients de P^2 et Q^2 étant de signes contraires.

Cela posé, soient N le nombre des racines réelles de $f(x)=0$ inférieures à x, N′ le nombre des racines réelles inférieures à x', C le nombre des carrés positifs de $V(x)$, C′ le nombre des carrés positifs de $V(x')$, $2i$ le nombre

des racines imaginaires de $f(x) = 0$; on aura

$$N = C + i, \quad N' = C' + i.$$

Donc *le nombre* $N - N'$ *des racines de* $f(x) = 0$ *comprises entre* x *et* x' *est égal à la différence des nombres de carrés* C *et* C' *positifs dans lesquels on peut décomposer* $V(x)$ *et* $V(x')$.

Reste à montrer comment on peut former $V(x)$. En appelant $s_0, s_1, s_2, \ldots$ les sommes des puissances 0, 1, 2, ... des racines de $f(x) = 0$, on a, en développant (1),

$$V(x) = x_0^2(s_0 x - s_1) + 2x_0 x_1(s_1 x - s_2) + x_1^2(s_2 x - s_3) \\ + 2x_0 x_2(s_3 x - s_4) + \ldots.$$

Le discriminant de $V(x)$ est

$$\theta(x) = \begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & s_1 x - s_2 & \ldots & s_{n-1} x - s_n \\ s_1 x - s_2 & s_2 x - s_3 & \ldots & s_n x - s_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ s_{n-1} x - s_n & s_n x - s_{n-1} & \ldots & s_{2n-2} x - s_{2n-1} \end{vmatrix},$$

ou

$$\theta(x) = \begin{vmatrix} x - \alpha_1 & x - \alpha_2 & \ldots & x - \alpha_n \\ \alpha_1 x - \alpha_1^2 & \alpha_2 x - \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n x - \alpha_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^{n-1} x - \alpha_1^n & \alpha_2^{n-1} x - \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^{n-1} x - \alpha_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

ou, en appelant P le deuxième déterminant, qui n'est autre que le produit des différences des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$\theta(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) P^2;$$

$\theta(x)$ sera donc identiquement nul quand $f(x) = 0$ aura des racines égales. $V(x)$, ce qui alors est bien évident, ne

sera pas la somme de n carrés, mais de moins de n carrés.

Le polynôme

$$\begin{vmatrix} s_0x - s_1 - s & s_1x - s_2 & \dots & s_{n-1}x - s_n \\ s_1x - s_2 & s_2x - s_3 - s & \dots & s_nx - s_{n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ s_{n-1}x - s_n & s_nx - s_{n-1} & \dots & s_{2n-2}x - s_{2n-1} - s \end{vmatrix}$$

étant désigné par $\psi(s, x)$, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soient v le nombre des variations de $\psi(s, x)$ et v' le nombre des variations de $\psi(s, x')$; le nombre de racines de $f(x) = 0$ comprises entre x et x' sera la différence des nombres v et v'.*

NOTES.

THÉORÈME DE BORCHARDT.

Soit $f(x)$ une fonction entière du degré m, dans laquelle nous supposerons le coefficient de x^m égal à 1 ; soit $f'(x)$ sa dérivée. Divisons $f(x)$ par $f'(x)$; soient q_1 le quotient et $-R_1$ le reste. Divisons $f'(x)$ par R_1; soient q_2 le quotient et $-R_2$ le reste, et ainsi de suite. On aura

$$(1)\quad f = f'q_1 - R_1, \quad f' = R_1 q_2 - R_2, \quad R_1 = R_2 q_3 - R_3, \quad \ldots,$$

et l'on pourra ainsi supposer $f' = R_0$, afin de régulariser la notation. Cela posé, on tire de là

$$\frac{f}{f'} = q_1 - \frac{R_1}{f'},$$

ou bien, en inversant,

$$\frac{f'}{f} = \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{R_1}{f'}} = \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{R_2}{R_1}}} = \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \cfrac{R_3}{R_2}}}} = \ldots,$$

et l'on développe ainsi $\dfrac{f'}{f}$ en fraction continue. Si l'on appelle $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{1}{q_1}, \dfrac{P_2}{Q_2}, \ldots, \dfrac{P_m}{Q_m} = \dfrac{f'}{f}$ les réduites successives de cette fraction continue, on a, comme l'on sait (t. II,

p. 145),

$$(2)\qquad \begin{cases} P_{n+1} = q_{n+1} P_n - P_{n-1}, \\ Q_{n+1} = q_{n+1} Q_n - Q_{n-1}, \\ R_{n+1} = q_{n+1} R_n - R_{n-1}. \end{cases}$$

La dernière relation se déduit de (1). Nous nous servirons de ces formules pour définir deux quantités P_0, Q_0, en y faisant $n = 1$, et nous aurons $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, en observant que $P_1 = 1$, $Q_1 = q_1$, $P_2 = q_2$, $Q_2 = q_1 q_2 - 1$. Cela posé, si l'on élimine q_{n+1} entre les formules (2), on trouve

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = \ldots = P_1 Q_0 - Q_1 P_0,$$
$$P_{n+1} R_n - R_{n+1} P_n = P_n R_{n-1} - R_n P_{n-1} = \ldots = P_1 R_0 - R_1 P_0,$$
$$Q_{n+1} R_n - R_{n+1} Q_n = Q_n R_{n-1} - R_n Q_{n-1} = \ldots = Q_1 R_0 - R_1 Q_0,$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \begin{cases} P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = 1, \\ P_{n+1} R_n - R_{n+1} P_n = f', \\ Q_{n+1} R_n - R_{n+1} Q_n = f. \end{cases}$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par R_n, la deuxième par Q_n, la dernière par P_n, on trouve, en les combinant convenablement par voie d'addition,

$$(4)\qquad R_n = f' Q_n - f P_n,$$

d'où

$$(4\ bis)\qquad \frac{f'}{f} Q_n - P_n = \frac{R_n}{f}.$$

Si l'on observe que Q_n est de degré n, que P_n est de degré $n - 1$ et R_n de degré $m - n - 1$, et si l'on pose

$$(5)\qquad Q_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$(6)\qquad P_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

$$(7)\qquad R_n = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m-n-1} x^{m-n-1}$$

et

$$(8)\qquad \frac{f'}{f} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3}\cdots,$$

$s_0, s_1, s_2, \ldots$ seront les sommes des puissances $0, 1, 2, \ldots$ des racines de l'équation $f(x) = 0$, et l'équation (4 *bis*) deviendra

$$\left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots\right)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) - (b_0 + b_1 x + \ldots)$$
$$= \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m-n-1} x^{m-n-1}}{f}.$$

Le second membre de cette équation peut être développé suivant les puissances de $\frac{1}{x}$; le premier terme est $\frac{c_{m-n-1}}{x^{n+1}}$. Si l'on égale alors les coefficients des mêmes puissances de x et de $\frac{1}{x}$ dans les deux membres, on a, entre autres formules,

$$a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n = 0 \quad \left(\text{coefficient de } \frac{1}{x}\right),$$
$$a_0 s_1 + a_1 s_2 + \ldots + a_n s_{n+1} = 0 \quad \left(\text{coefficient de } \frac{1}{x^2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_0 s_{n-1} + a_1 s_n + \ldots + a_n s_{2n-1} = 0,$$
$$a_0 s_n + a_1 s_{n+1} + \ldots + a_n s_{2n} = c_{m-n-1}.$$

Des n premières on tire les rapports des quantités a_0, $a_1, \ldots, a_n$ à l'une d'entre elles, et, en les portant dans la dernière et dans (5), on trouve

$$(9)\qquad Q_n = \lambda_n G_n, \quad c_{m-n-1} = \lambda_n \Delta_n,$$

formules dans lesquelles λ_n désigne un coefficient constant

encore inconnu et dans lesquelles on a posé

$$(9\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} G_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \\ \\ \Delta_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix}, \end{array}\right.$$

Dans la dernière des formules (3), égalons les coefficients de x^m, en observant que dans Q_n le coefficient de x^n est $\lambda_n \Delta_{n-1}$, que dans Q_{n+1} il est $\lambda_{n+1}\Delta_n$, que dans R_n il est $\lambda_n \Delta_n$, que dans $Q_n R_{n+1}$ il est zéro et que dans f il est 1 par hypothèse; on aura

$$\lambda_{n+1}\lambda_n \Delta_n^2 = 1$$

ou

$$(10)\qquad \lambda_{n+1} = \frac{1}{\lambda_n \Delta_n^2}.$$

Or, en divisant $f(x)$ par $f'(x)$, on trouve $q_1 = Q_1 = \frac{x}{m} - \frac{s_1}{m^2}$ ou

$$Q_1 = \frac{s_0 x - s_1}{s_0^2} = \frac{G_1}{\Delta_0^2}.$$

Si l'on égale cette valeur de Q_1 à $\lambda_1 G_1$ on en conclut que λ_1 est égal à $\frac{1}{\Delta_0^2}$, et la formule (10) donne

$$\lambda_2 = \frac{\Delta_0^2}{\Delta_1^2}, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_1^2}{\Delta_0^2 \Delta_2^2}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \left(\frac{\Delta_1^2 \Delta_3^2 \dots}{\Delta_0^2 \Delta_2^2 \dots}\right)^{\pm 1}.$$

On a ainsi l'expression de λ_n et de Q_n sous forme explicite

et il faut observer que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont essentiellement positifs, en sorte qu'*à un facteur positif près* $Q_n = G_n$. Il y a une conséquence importante à tirer de là ; comme $\frac{P_m}{Q_m} = \frac{f'(x)}{f(x)}$, il faut en conclure, les polynômes $f'(x)$ et $f(x)$ étant de mêmes degrés que P_m et Q_m, que $f(x)$ est égal à Q_m à un facteur constant près, et l'on peut remplacer l'équation $f(x) = 0$ par $Q_m = 0$. Mais les polynômes $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ ou $G_0, G_1, \ldots, G_m$, qui n'en diffèrent que par des facteurs positifs, forment une suite de Sturm. En effet, la deuxième formule (2) prouve que : 1° quand $Q_n = 0$, Q_{n-1} et Q_{n+1} sont de signes contraires; 2° Q_n et Q_{n+1} ne peuvent être nuls à la fois, sans quoi on aurait $Q_{n-1} = 0$, $Q_{n-2} = 0$, ..., $Q_0 = 0$ ou $Q_0 = 1$; 3° quand Q_m ou $f(x)$ s'annule, Q_{m-1} est toujours de même signe que Q_m, ou toujours de signe contraire avant le passage de Q_m par zéro; cela résulte de (4), qui devient, pour $f(x) = 0$,

$$Q_n f' = R_n,$$

et en particulier

$$Q_{m-1} f' = R_{m-1}:$$

R_{m-1} étant une constante; Q_{m-1} est donc, pour $f = 0$, ou toujours de même signe ou toujours de signe contraire à f' (il va sans dire que l'on suppose $R_{m-1} \gtrless 0$, et, par suite, f n'a pas de racines doubles).

Corollaire. — Si dans la suite $G_0, G_1, \ldots, G_m$ on suppose $x = -\infty$ et $x = \infty$, les signes de ses termes seront ceux des suites

$$\Delta_0, \quad -\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \pm\Delta_m,$$
$$\Delta_0, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_m;$$

donc, *pour que* $f(x) = 0$ *ou* $G_m = 0$ *ait toutes ses racines*

réelles et inégales, il faut et il suffit que $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_m$ *soient tous positifs.*

Ce théorème est dû à M. Borchardt, qui l'a démontré par d'autres considérations.

SUR L'ÉLIMINATION.

Je vais dans cette Note montrer que l'on peut mettre sous forme explicite la résultante d'un nombre quelconque d'équations algébriques. Ce résultat est la généralisation de celui que j'ai fait connaître à la page 123; je l'ai obtenu pour la première fois en 1893. La démonstration que l'on va lire est le développement de celle que j'ai donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques;* elle repose sur une généralisation de la formule de Lagrange que je vais d'abord faire connaître.

I. — Formule de Lagrange généralisée.

Posons, en appelant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables quelconques et F une fonction entière de $x_1, \ldots, x_n$,

$$f_1(x_1) = (x_1-\alpha_{11})(x_1-\alpha_{12})\ldots(x_n-\alpha_{1,m_1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_n(x_n) = (x_n-\alpha_{n1})(x_n-\alpha_{n2})\ldots(x_n-\alpha_{n,m_n}),$$

$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$ désignant des quantités distinctes, et

$$\xi_{ij\ldots k} = \frac{f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)}{(x_1-\alpha_{1i})(x_2-\alpha_{2j})\ldots(x_n-\alpha_{nk})f'_1(\alpha_{1i})\ldots f'_n(\alpha_{nk})}.$$

La fonction $\xi_{ij\ldots k}$ sera nulle pour les valeurs des x annulant les f, excepté pour $x_1=\alpha_{1i}$, $x_2=\alpha_{2i}$, ..., valeurs pour lesquelles elle se réduira à l'unité; donc on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\quad = \sum \frac{f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)F(\alpha_{1i}, \alpha_{2j}, \alpha_{nk})}{(x_1-\alpha_{1i})\ldots(x_n-\alpha_{nk})f'_1(\alpha_{1i})\ldots f'_n(\alpha_{nk})},\end{aligned}\right.$$

pour toutes les valeurs des x annulant les f. En particulier, si F est de degré $m_1 - 1$ par rapport à $x_1, \ldots$, de degré $m_2 - 1$ par rapport à $x_2, \ldots$, la formule (1) sera une identité.

Il y a plus : divisons F par f_1, soient Q_1 le quotient, R_1 le reste, divisons R_1 par f_2, soient Q_2 le quotient, R_2 le reste, etc., on aura

$$F = f_1 Q_1 + R, \quad R_1 = f_2 Q_2 + R_2, \quad \ldots, \quad R_{n-1} = f_n Q_n + R_n,$$

et par suite

$$F = f_1 Q_1 + f_2 Q_2 + \ldots + f_n Q_n + R_n,$$

et R_n sera de degré $m_1 - 1$ en $x_1, \ldots$, du degré $m_2 - 1$ en $x_2, \ldots$; de plus, R_n étant égal à F quand les f sont nuls, on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} F = {} & f_1 Q_1 + f_2 Q_2 + \ldots + f_n Q_n \\ & + \sum \frac{f_1(x_1)\ldots f_n(x_n) F(\alpha_{1i}, \ldots \alpha_{nk})}{(x_1 - \alpha_{1i})\ldots(x_n - \alpha_{nk}) f'(\alpha_{1i})\ldots f'(\alpha_{n,k})}. \end{aligned} \right.$$

II. — Préliminaires.

Je vais démontrer que, étant données n équations algébriques

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ désignent des polynômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$:

1° *Il est possible de mettre leurs résultantes*

$$(2) \qquad G_1(x_1) = 0, \quad G_2(x_2) = 0, \quad \ldots, \quad G_n(x_n) = 0$$

sous la forme de déterminants symétriques égaux à zéro, et d'écrire effectivement, sans calculs préalables, les quantités $G_1, G_2, \ldots$;

2° *Les polynômes* $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *sont de degrés* $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$;

3° *Les polynômes* $G_1, G_2, \ldots$ *sont de la forme*

$$(3)\qquad \begin{cases} G_1 = \lambda_{11} f_1 + \lambda_{12} f_2 \ldots + \lambda_{1n} f_n, \\ G_2 = \lambda_{21} f_1 + \lambda_{22} f_2 \ldots + \lambda_{2n} f_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_n = \lambda_{n1} f_1 + \lambda_{n2} f_2 \ldots + \lambda_{nn} f_n, \end{cases}$$

les λ_{ij} *désignant des polynômes entiers de degré* $\mu - m_i$;

4° *Les équations* (1) *ont ordinairement* μ *solutions.*

Ces théorèmes sont surabondamment démontrés pour le cas où $n = 2$; j'admets qu'ils sont vrais pour le cas de n équations; je vais démontrer qu'ils ont encore lieu dans le cas où l'on considère $n+1$ équations

$$(4)\qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = 0.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ désigneront alors des polynômes de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$, en $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; je supposerai que m_{n+1} est au plus égal au plus grand des nombres m_1, m_2, m_n. Les théorèmes seront alors démontrés.

Puisque nos théorèmes sont admis pour n équations, je choisis les équations (1) de telle sorte que l'on en connaisse *a priori* les solutions, et que ces solutions

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \ldots, & \alpha_{n\mu} \end{matrix}$$

soient distinctes (on pourra, par exemple, prendre les f égaux à des produits de facteurs linéaires).

Différentions les équations (3), nous obtenons n^2 équations de la forme

$$\frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial x_j} f_1 + \ldots \frac{\partial \lambda_{in}}{\partial x_j} f_n + \lambda_{i1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_{in} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \gtrless j \\ G'_j \text{ si } i = j \end{cases},$$

et si l'on donne aux x des valeurs annulant les φ

$$(5) \qquad \lambda_{i1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}+\ldots+\lambda_{in}\frac{\partial f_n}{\partial x_j}=\begin{cases} 0 \text{ si } i \gtrless j \\ G'_j \text{ si } i=j \end{cases}.$$

Si l'on pose

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = D(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$D_i = D(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}),$$
$$\Lambda = \Sigma \pm \lambda_{11}\lambda_{22}\ldots\lambda_{nn},$$
$$\Lambda_i = \Lambda(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}),$$

les μn^2 équations analogues à (5) montrent que

$$(6) \qquad \Lambda_i D_i = G'_1(\alpha_{1i})G'_2(\alpha_{2i})\ldots G'_n(\alpha_{ni}) = \Pi\, G'_j(\alpha_{ji});$$

la fonction Λ est d'ailleurs de degré $n\mu - \sum_1^n m_k$; si alors on applique la formule de Lagrange à la fonction $F\Lambda$ où F désigne un polynôme entier, on aura

$$\Lambda F = \omega + \sum \frac{G_1 G_2 \ldots G_n \Lambda_i F(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{(x_1-\alpha_{1i})\ldots(x_n-\alpha_{ni})\Pi\, G'_j(\alpha_{ji})},$$

ω désignant une somme de multiples de G_1, G_2, ... ou, en vertu de (6),

$$\Lambda F = \omega + \sum \frac{G_1 G_2 \ldots G_n F(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{(x_1-\alpha_{1i})\ldots(x_n-\alpha_{ni})D_i},$$

ou

$$\frac{\Lambda F - \omega}{G_1 G_2 \ldots G_n} = \sum \frac{F(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{(x_1-\alpha_{1i})(x_2-\alpha_{2i})\ldots D_i}.$$

Si l'on égale les coefficients de $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ dans les deux membres après les avoir développés suivant les puissances de $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$, on voit que le coefficient de $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ dans

$$\frac{\Lambda F}{G_1 G_2 \ldots G_n},$$

est la fonction symétrique $\sum \frac{F(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni})}{D_i}$. Or A étant de degré $n\mu - \sum_1^n m_k$, si F est de degré moindre que $\sum_1^n m_k - n$, c'est-à-dire de degré inférieur à celui de D, on aura

$$\sum \frac{F(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni})}{D_i} = 0.$$

Ce théorème est de Jacobi.

III. — Formation de la résultante.

Posons maintenant

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi_j = \varphi_j(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}) \\ \qquad + (x_1 - \alpha_{1i})\varphi^i_{j1} + \ldots + (x_n - \alpha_{ni})\varphi^i_{jn}, \end{cases}$$

les φ^i_{jk} seront, si l'on veut, des polynômes entiers en x_1, x_2, ..., α_{1i}, α_{2i}, ... du degré $m_j - 1$; cette formule n'est au fond que la formule de Taylor où les termes ont été convenablement groupés. Nous supposerons (mais seulement pour plus d'élégance dans les résultats) que les φ^i_{jk} ne changent pas quand on change x_1 en α_{1i}, x_2 en α_{2i}, ... à la fois et *vice versa*.

[Cette hypothèse peut être justifiée en observant que, si l'on permute x_1 et α_{1i}, x_2 et α_{2i}, ..., la formule (7) devient

$$(8)\qquad \varphi_j(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots) = \varphi_j + (\alpha_{1i} - x_1)\psi^i_{j1} + \ldots,$$

ψ^i_{jk} désignant ce que devient φ^i_{jk} après la permutation.

En retranchant (8) de (7) et en divisant par (2), on trouve

$$\varphi_j = \varphi_j(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots) + \tfrac{1}{2}(x_1 - \alpha_{1i})(\varphi^i_{j1} + \psi^i_{j1}) + \ldots$$

et les fonctions $\frac{1}{2}(\varphi^i_{jk} + \psi^i_{jk})$ remplissent bien la condition que nous avons supposée.]

Posons alors

$$\theta_i = \theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{1i}^i & \cdots & \varphi_{1n}^i \\ \varphi_2 & \varphi_{21}^i & \cdots & \varphi_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+1,1}^i & \cdots & \varphi_{n+1,n}^i \end{vmatrix};$$

$$\theta_{ij} = \theta_i(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}) = \theta_j(\alpha_{1i}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}),$$

les fonctions θ_i jouissent des propriétés suivantes :

1° θ_i ne change pas quand on remplace la première colonne par $\varphi_1(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)$, $\varphi_2(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)$, ... et cela en vertu des relations (7).

2° θ est de degré $\sum_1^n m_k - n$ en $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots$, et, par suite, en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3° On a

$$\frac{\theta_1}{D_1} + \frac{\theta_2}{D_2} + \ldots + \frac{\theta_n}{D_n} = \varepsilon_1\varphi_1 + \ldots + \varepsilon_{n+1}\varphi_{n+1}$$

ε_i désignant une quantité indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En effet, les coefficients des termes qui contiennent les x dans le coefficient de φ_i sont des polynômes en $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots$ de degré inférieur à $\sum_1^n m_k - n$; le coefficient de $x_1^p x_2^q \ldots$ dans ε_i est donc une fonction symétrique nulle, en vertu du théorème de Jacobi.

Cela posé, considérons le déterminant symétrique

$$\Theta = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1\mu} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \cdots & \theta_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{\mu 1} & \theta_{\mu 2} & \cdots & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix}.$$

Le produit $\Theta A_1 A_2 \ldots A_\mu$ est nul pour $\alpha_{11} = \alpha_{12}$, pour $\alpha_{11} = \alpha_{13}$, ... pour $\alpha_{11} = \alpha_{1\mu}$: donc il est divisible par $G_1'(\alpha_{11})$; on verrait de même qu'il l'est par tous les

$G'_i(\alpha_{ij})$: par suite il l'est par leur produit : donc

$$\frac{\Theta A_1 A_2 \ldots A_\mu}{\Pi G_1(\alpha_{1i}) \ldots \Pi G_n(\alpha_{nk})},$$

ou, en vertu de (6), $\frac{\Theta}{D_1 D_2 \ldots D_\mu}$ est un polynôme entier par rapport aux α_{ij} qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{\Theta_{11}}{D_1} & \frac{\Theta_{21}}{D_2} & \ldots & \frac{\Theta_{1\mu}}{D_\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\Theta_{\mu 1}}{D_1} & \frac{\Theta_{\mu 2}}{D_2} & \ldots & \frac{\Theta_{\mu\mu}}{D_\mu} \end{vmatrix},$$

Θ étant de degré $\mu(\Sigma m - n)$ au plus, par rapport aux α_{ij}. Le déterminant précédent est donc au plus de degré

$$\mu(\Sigma m - n) - \mu\left(\sum_1^n m - n\right) = \mu m_{n+1};$$

or on démontrerait, comme on l'a fait pour Θ, que s'il n'est pas indépendant des α_{ij}, il est encore divisible par $D_1 D_2 \ldots D_\mu$, ce qui ne peut pas être, son degré étant inférieur à celui de $D_1 D_2 \ldots D_\mu$. Pour évaluer $\frac{\Theta}{D_1 \ldots D_\mu}$, on peut donc supposer les fonctions f quelconques, les faire coïncider, par exemple, avec $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; mais alors

$$\pm \Theta_{ij} = \varphi_{n+1}(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}) \begin{vmatrix} \varphi^i_{11} & \varphi^i_{12} & \cdots & \varphi^i_{1n} \\ \varphi^i_{21} & \varphi^i_{22} & \cdots & \varphi^i_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix};$$

le déterminant est nul quand $i \gtrless j$, en vertu de (7), et pour $i = j$ il se réduit au déterminant

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{1i}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{2i}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{ni}}$$

ou actuellement à D_i, puisque les f sont identiques aux φ.

On a donc, dans l'hypothèse actuelle,

$$\Theta = \pm D_1 D_2 \ldots D_n \prod_i \varphi_{n+1}(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni});$$

donc on a, identiquement, en général,

$$\Theta = \pm \varepsilon D_1 D_2 \ldots D_n \Pi \varphi_{n+1}(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni});$$

or $D_1 D_2 \ldots$ ne dépend pas de la forme des fonctions φ, ε en dépend à la rigueur, mais seulement par les termes du degré le plus élevé; il ne contient pas x_{n+1}. Donc $\Theta = 0$ *est la résultante des équations* (4).

IV. — Propriétés de la résultante.

Il reste à prouver que la résultante est de la forme

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \varphi_{n+1} = 0,$$

qu'elle est de degré μm_{n+1}, et que le système (4) a μm_{n+1} solutions.

Pour établir le premier point, nous renverrons au § V; nous observerons ensuite que, si l'on pose

$$(9) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_{11}\xi_1 + \theta_{12}\xi_2 \ldots + \theta_{1\mu}\xi_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_\mu = \theta_{\mu 1}\xi_1 + \theta_{\mu 2}\xi_2 \ldots + \theta_{\mu\mu}\xi_\mu, \end{cases}$$

en général ξ_i sera nul pour $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{2j}$, ..., si $i \gtrless j$ et égal à 1 dans le cas où $i = j$; pour s'en convaincre, il suffit de faire $x_1 = \alpha_{11}$, $x_2 = \alpha_{21}$, ...; on a alors

$$\begin{gathered} \theta_{11} = \theta_{11}\xi_1 + \theta_{12}\xi_2 \ldots \\ \theta_{21} = \theta_{21}\xi_1 + \theta_{22}\xi_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

équations satisfaites pour $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, ..., $\xi_\mu = 0$. Si l'on forme la fonction $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, il arrivera parfois qu'elle sera constante, et par suite

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = 1.$$

De cette formule et de (9), on tire

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_{11} & \dots \\ \theta_2 & \theta_{21} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_\mu & \theta_{\mu 1} & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\Theta = A_1\theta_1 + A_2\theta_2 \ldots = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\varphi_{n+1},$$

A_1, A_2, ... désignant des constantes et λ_1, λ_2, ... des polynômes entiers en x_1, x_2, ..., x_n.

Pour évaluer le degré de Θ, nous donnerons au coefficient de $x_1^p x_2^q \ldots x_n^s$ dans φ_i l'indice $m_i - p - q \ldots - s$, il sera de ce degré en x_{n+1}. Si l'on assimile les indices à des exposants, Θ_{ij} sera par rapport aux indices des φ et aux lettres α_{ij} de degré $\Sigma m - n$; Θ lui-même sera de degré

$$\mu[\Sigma m - n]$$

et $\dfrac{\Theta}{D_1 D_2 \ldots D_n}$ sera de degré $\mu[\Sigma m - n] - \mu\left[\sum_1^n m_k - n\right]$, c'est-à-dire de degré $\mu\Sigma m - \mu\sum_1^n m_k$ ou μm_{n+1}. C'est le degré de la résultante en x_{n+1}.

Il reste à montrer que les équations (4) ont bien μm_{n+1} solutions, au moins dans le cas général; on voit bien que, la résultante étant de degré μm_{n+1}, il y aura *au moins* μm_{n+1} solutions, mais on ne voit pas qu'il n'y en aura pas plus, Or, si, pour une valeur de x_{n+1} tirée de la résultante, il pouvait y avoir plus d'un système de valeurs de x_1, x_2, ..., les équations (9) seraient satisfaites pour plusieurs valeurs des ξ, les premiers membres étant nuls; alors Θ et ses mineurs seraient nuls : on aurait

$$\frac{d\Theta}{dx_{n+1}} = \Sigma \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_{ij}} \frac{d\theta_{ij}}{dx_{n+1}} = 0$$

et $\Theta = 0$ aurait une racine double, ce qui n'aura pas lieu en général; d'ailleurs, $\Theta = 0$ aurait alors moins de μm_{n+1} solutions et on rentrerait dans le cas général.

D'ailleurs une solution quelconque sera déterminée par la formule (théorème de Jacobi)

$$x_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{i\mu}\xi_\mu.$$

V. — Corollaire.

Pour terminer, je démontrerai un théorème important, souvent admis sans démonstration, ce qui est d'autant plus fâcheux qu'il n'est pas vrai sans restrictions.

Reprenons les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et supposons que les équations

$$(10) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

admettent les μ solutions finies et distinctes en x_1, $x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \ldots, & \alpha_{n\mu} \end{matrix}$$

(c'est supposer les φ identiques aux f), μ étant toujours égal à $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Si nous posons

$$\varpi_i = \begin{vmatrix} \varphi^i_{11} & \varphi^i_{12} & \cdots & \varphi^i_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^i_{n1} & \varphi^i_{n2} & \cdots & \varphi^i_{nn} \end{vmatrix} : D_i,$$

ϖ_i s'annulera en vertu de (7), pour toutes les valeurs des x annulant les φ, excepté pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, $\ldots$, et pour $x_1 = \alpha_{1i}, x_2 = \alpha_{2i}, \ldots$, on aura $\varpi_i = 1$. En outre, on aura

$$(11) \qquad \varpi_1 + \varpi_2 + \ldots + \varpi_\mu = 1,$$

car le premier membre de cette équation est égal à 1 pour les valeurs des x qui annulent les φ et est indépendant

des x, en vertu du théorème démontré § II. Soit alors φ_{n+1} une fonction entière quelconque des x,

$$\varphi_{n+1} - \varphi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)$$

s'annulera avec les φ et l'on aura

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{11}^i & \ldots & \varphi_{1n}^i \\ \varphi_2 & \varphi_{21}^i & \ldots & \varphi_{2n}^i \\ \varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots) & \varphi_{n+1,1}^i & \ldots & \varphi_{n+1,n}^i \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on conclut

$$(12) \qquad [\varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)]\varpi_i = \Omega,$$

Ω désignant une expression de la forme

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n,$$

où

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

sont des polynômes entiers ; nous désignerons par $\Omega', \Omega'', \ldots$ des expressions de même forme. Si dans (12) on fait $i = 1, 2, 3, \ldots, \mu$ et si l'on ajoute en tenant compte de (11), on a

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots)\varpi_1 + \ldots + \varphi_{n+1}(\alpha_{\mu 1}, \alpha_{\mu 2}, \ldots) + \Omega',$$

en sorte que, si φ_{n+1} *s'annule avec les* φ, *on aura*

$$\varphi_{n+1} = \Omega''$$

ou, si l'on veut,

$$\varphi_{n+1} = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *désignant des polynômes entiers en* x_1, x_2, x_n. C'est le théorème que nous voulions établir ; il suppose les solutions α_{ij} *au nombre de* μ *distinctes et finies.*

FIN DE LA TROISIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

Pages.

CHAPITRE PREMIER. — Théorie générale des équations 1

I. — Quelques notions fondamentales 1
II. — Théorème de d'Alembert 3
III. — Corollaires du théorème de d'Alembert 6
IV. — Relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique 9
V. — Des diviseurs algébriques 10
VI. — Des racines égales 16
VII. — De l'irréductibilité 18
VIII. — Remarque sur les équations quelconques 19
IX. — Quelques mots sur la transformation des équations 21
X. — Des racines commensurables 24

CHAPITRE II. — Séparation des racines 33

I. — Marche à suivre pour résoudre une équation 33
II. — Propositions fondamentales 34
III. — Limites des racines 37
IV. — Méthode des substitutions successives 44
V. — Théorème de Descartes 45
VI. — Démonstration d'un lemme important 51
VII. — Théorème de Rolle 52
VIII. — Théorème de Fourier 57
IX. — Théorème de Sturm 59
X. — Théorème de Cauchy 64

CHAPITRE III. — Formules d'approximation pour le calcul des racines et des équations que l'on sait résoudre 76

I. — Formule d'approximation de Newton et de Fourier..... 76

Pages.

II. — Interprétation géométrique de la méthode de Newton et méthode de fausse position 79
III. — Méthode de Lagrange 82
IV. — Méthode des substitutions successives 86
V. — Des équations que l'on peut résoudre par abaissement.. 87
VI. — Équations binômes 92
VII. — Théorèmes de Moivre et de Cotes 100
VIII. — Équations du troisième degré 102
IX. — Équations du quatrième degré 107

CHAPITRE IV. — De l'élimination et des fonctions symétriques 112

I. — Sur les racines des équations qui contiennent des paramètres variables 112
II. — Remarques sur la division des polynômes 114
III. — Sommes des puissances semblables des racines d'une équation 116
IV. — De l'élimination en général 120
V. — Élimination par les fonctions symétriques 121
VI. — Sur les polynômes multiplicateurs 124
VII. — Formation de la résultante 126
VIII. — Discussion 128
IX. — Résolution de deux équations à deux inconnues.. 129
X. — Théorème général de Bézout 131
XI. — Usages de l'élimination 136
XII. — Problème général de la transformation des équations.. 138
XIII. — Condition pour qu'une équation ait une racine multiple. 142
XIV. — Sur une méthode rapide d'élimination 144

CHAPITRE V. — Étude des fractions rationnelles 149

I. — Formule de Lagrange 149
II. — Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples 151
III. — Sur la manière de diriger le calcul des fractions simples. 155
IV. — A quoi sert la décomposition des fractions rationnelles? 163

CHAPITRE VI. — Sur les polynômes homogènes du second degré et leurs applications a la théorie des équations 169

I. — Décomposition en carrés 169
II. — Des substitutions orthogonales 172

Pages.

III. — Réduction à une somme de carrés par une substitution orthogonale 173
IV. — Discussion de l'équation en s 174
V. — Applications 180
VI. — Quelques mots sur la réduction simultanée de deux polynômes à une somme de carrés 182
VII. — Sur les invariants 185
VIII. — Méthode pour séparer les racines réelles des équations. 188

NOTES 193

Théorème de Borchardt 193
Sur l'élimination 198

TABLE DES MATIÈRES 209

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA TROISIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

20214 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

R. P. B...

TRAITÉ
D'ALGÈBRE.

COMPLÉMENTS,

Par H. LAURENT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE :

THÉORIE DES POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

COMPLÉMENTS,

PAR H. LAURENT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE :

THÉORIE DES POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894



TRAITÉ

D'ALGÈBRE.


Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡ

TRAITÉ
D'ALGÈBRE.

COMPLÉMENTS,

PAR H. LAURENT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE :
THÉORIE DES POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

PRÉFACE.

Les Traités d'Algèbre supérieure contiennent la théorie des fonctions algébriques inverses et des substitutions, ou la théorie des transformations que l'on peut faire subir aux fonctions entières, sans en altérer certaines propriétés essentielles. Aucune de ces théories ne sera abordée dans ce petit opuscule dont le but, très modeste, est de compléter l'Algèbre élémentaire enseignée officiellement, en étudiant les propriétés fondamentales des polynomes à plusieurs variables, et en essayant de généraliser les propriétés connues des polynomes à une variable.

On y trouvera une théorie complète de l'élimination et des fonctions symétriques, fondée entièrement sur un théorème de Jacobi, qui a déjà rendu des services dans l'analyse des fonctions abéliennes, et qui est appelé à en rendre encore beaucoup d'autres.

Je crois avoir considérablement simplifié la théorie de l'élimination, assez, je pense, pour la mettre à la portée de toutes les personnes qui ont suivi un cours de Mathématiques spéciales.

TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

QUATRIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

LE THÉORÈME DE JACOBI.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre $n+1$ équations, ce sera, pour nous, trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient au moins une solution commune. Cette condition est la *résultante*. Si $\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ sont ces équations, la résultante sera évidemment l'équation

$$\Pi\, \varphi_0(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = 0,$$

dans laquelle $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ sera une quelconque des solutions des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$.

Dans ce qui va suivre, j'admettrai que : 1° n équations algébriques des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont $m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions; 2° qu'elles ont

une résultante du degré $m_1 m_2 \ldots m_n$, quand on élimine $n-1$ quelconques des variables; 3° que la résultante est de la forme

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignent des polynomes entiers.

Je montrerai qu'en admettant ces hypothèses elles permettent d'établir que $n+1$ équations des degrés $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ à $n+1$ variables ont $m_0 m_1 \ldots m_n$ solutions; que leurs résultantes sont de degré $m_0 m_1 \ldots m_n$ et sont de la forme

$$\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n = 0,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ désignant les premiers membres des équations et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ des polynomes entiers. Comme nos hypothèses sont réalisées pour $n=1$, $n=2$, elles se trouveront pleinement justifiées.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, je crois devoir dire ce que j'entends par équations qui admettent des solutions *distinctes* et *normales*. Supposons que

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

soient satisfaites. Pour $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\ldots$, on a

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots) = \varphi_i(a_1, a_2, \ldots) + (x_1 - a_1)\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_1} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha_n}.$$

Si ces équations admettent une autre solution $a_1 + h_1$, $a_2 + h_2$, $\ldots$, en remplaçant $x_1, x_2, \ldots$ par ces valeurs, on aura

$$0 = h_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_1} + h_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_2} + \ldots + h_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_n},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant des quantités comprises entre a_1 et $a_1 + h_1$, a_2 et $a_2 + h_2$, ... On conclut de cette

équation et de ses analogues

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} = 0$$

et, si h_1, h_2, ... tendent vers zéro,

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = 0.$$

Dès lors, nous dirons que les équations φ_1, φ_2, ..., φ_n ont leurs solutions distinctes et normales, si le déterminant

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

ne s'annule pas avec les φ. Hâtons-nous de dire que ce déterminant peut être nul, sans pour cela qu'il y ait de solutions confondues; néanmoins, supposer les solutions distinctes et normales, ce sera supposer ce déterminant différent de zéro.

II. — THÉORÈME DE JACOBI.

Soient f_1, f_2, ..., f_n des polynomes entiers en x_1, x_2, ..., x_n, des degrés m_1, m_2, ..., m_n respectivement et choisis de telle sorte que les équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0$$

aient leurs $m_1 m_2 \ldots m_n = \mu$ solutions

$$\begin{array}{llll} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{n2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \ldots, & \alpha_{n\mu} \end{array}$$

finies, distinctes et normales. Soient λ_{ij} des polynomes multiplicateurs tels que

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda_{11}\varphi_1 + \lambda_{12}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{1n}\varphi_n = F_1(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{n1}\varphi_1 + \lambda_{n2}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{nn}\varphi_n = F_n(x_n), \end{cases}$$

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ désignant des polynomes de degré μ, dans lesquels nous supposerons les coefficients de $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots$ égaux à l'unité. Soit

$$\Lambda = \Sigma \pm \lambda_{11}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{nn};$$

Λ *sera nul pour toutes les valeurs des* x *annulant les* F *sans annuler les* f, et, si l'on désigne par Λ_i la valeur de Λ pour $x_1 = \alpha_{1i}, x_2 = \alpha_{2i}, \ldots$, en général Λ_i sera différent de zéro.

Si l'on différentie les équations (2), on trouve des relations de la forme

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \lambda_{k1}}{\partial x_j} \varphi_1 + \ldots + \dfrac{\partial \lambda_{kn}}{\partial x_j} \varphi_n \\ + \lambda_{k1} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_{kn} \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } j \gtrless k, \\ F'_j(x_j) & \text{si } j = k, \end{array}\right.$$

en sorte que, si l'on fait $x_1 = \alpha_{1i}, x_2 = \alpha_{2i}, \ldots$, on aura

$$(3) \qquad \lambda_{k1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_{kn} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} = \left\{\begin{array}{ll} F'_j(\alpha_{ji}) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \gtrless k \end{array}\right. .$$

Si l'on pose alors

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = D,$$

et si l'on appelle D_i la valeur de D pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}, \ldots$, la formule (3) montre que l'on aura

$$(4) \qquad \Lambda_i D_i = F'_1(\alpha_{1i}) F'_2(\alpha_{2i}) \ldots F'_n(\alpha_{ni}).$$

Soit maintenant $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynome quelconque; divisons G par F_1. Soient Q_1 le quotient, G_1 le reste; divisons G_1 par F_2. Soient Q_2 le quotient, G_2 le reste, et ainsi de suite; nous aurons

$$(a) \qquad G = Q_1 F_1 + Q_2 F_2 + \ldots + Q_n F_n + G_n,$$

et G_n sera de degré $\mu - 1$ au plus en x_1, de degré $\mu - 1$ au plus en $x_2, \ldots$. La formule d'interpolation de Lagrange

donnera

$$G_n = \sum \frac{F_1}{x_1 - \alpha_{1i}} \frac{G_n(\alpha_{1i}, x_2, \ldots)}{F'_1(\alpha_{1i})},$$

puis

$$G_n = \sum_i \sum_j \frac{F_1 F_2}{(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - x_{2j})} \frac{G_n(\alpha_{1i}, \alpha_{2j}, x_3, \ldots)}{F'_1(\alpha_{1i}) F'_2(\alpha_{2j})}, \quad \ldots,$$

et finalement

$$G_n = \sum_{i,j,\ldots} \frac{\Pi F}{(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2j}) \ldots} \frac{G_n(\alpha_{1i}, \alpha_{2j}, \alpha_{3k}, \ldots)}{F'_1(\alpha_{1i}) F'_2(\alpha_{2j}) \ldots};$$

mais, en vertu de (a),

$$G(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)$$

est égal à

$$G_n(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)$$

et cette formule (a) pourra s'écrire

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} G &= Q_1 F_1 + Q_2 F_2 + \ldots + Q_n F_2 \\ &+ \sum_{i,j,\ldots} \frac{\Pi F}{(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2j}) \ldots} \frac{G(\alpha_{1i}, \alpha_{2j}, \ldots)}{F'_1(\alpha_{1i}) F'_2(\alpha_{2i}) \ldots}. \end{aligned} \right.$$

Si G est de degré inférieur à μ les termes $Q_1 F_1$, $Q_2 F_2$, ... disparaîtront.

Maintenant si, dans la formule (5), nous faisons

$$G = \Lambda \psi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

ψ désignant un polynome entier, on aura, en vertu de la première propriété de la fonction Λ,

$$\begin{aligned} \Lambda \psi &= Q_1 F_1 + Q_2 F_2 + \ldots + Q_n F_n \\ &+ \sum_i \frac{\Pi F}{(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2i}) \ldots} \frac{\Lambda_i \psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{F'_1(\alpha_{1i}) F'_2(\alpha_{2i}) \ldots} \end{aligned}$$

et, en vertu de (4),

$$\begin{aligned} \Lambda \psi &= Q_1 F_1 + \ldots + Q_n F_n \\ &+ \sum_i \frac{\Pi F}{(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2i}) \ldots} \frac{\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{D_i}; \end{aligned}$$

on en tire

$$\frac{\Lambda\psi}{\Pi F} = \frac{Q_1F_1 + Q_2F_2 + \ldots}{\Pi F} + \sum \frac{\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2i}) \ldots D_i}.$$

Le deuxième et le premier membre sont développables en série procédant suivant les puissances de x_1^{-1}, x_2^{-2}, ... et leurs produits, et l'identification montre que *le coefficient de* $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ *dans* $\frac{\Lambda\psi}{\Pi F}$ *est égal à* $\sum \frac{\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{D_i}$.

Si donc $\Lambda\psi$ est de degré inférieur à $n\mu - n$, il n'y aura pas de termes en $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ dans $\frac{\Lambda\psi}{\Pi F}$, et l'on aura

$$(6) \qquad \sum \frac{\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)}{D_i} = 0.$$

Soit δ le degré de ψ, celui de Λ est

$$\Sigma(\mu - m) = n\mu - \Sigma m.$$

Pour que la formule (6) ait lieu, il suffit donc que

$$\delta + n\mu - \Sigma m < n\mu - n$$

ou que

$$\delta < \Sigma m - n.$$

Or $\Sigma m - n$ est le degré de D; donc la formule (6) aura lieu si le degré de ψ est moindre que celui de D.

C'est en cela que consiste le théorème de Jacobi.

III. — ÉTUDE DES FONCTIONS INTERPOLAIRES.

On peut toujours poser

$$(7) \quad f_k = (x_1 - \alpha_{1i}) f_{k1}^i + (x_2 - \alpha_{2i}) f_{k2}^i + \ldots + (x_n - \alpha_{ni}) f_{kn}^i,$$

f_{kj}^i désignant un polynome entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$, qui ne change pas quand on permute à la fois x_1 et α_{1i}, x_2 et α_{2i}, ... En effet, on peut d'une

infinité de manières poser

$$\begin{aligned}(x_1-\alpha_{1i})\,g_1+(x_2-\alpha_{2i})\,g_2+\ldots+(x_n-\alpha_{ni})\,g_n\\=f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\alpha_{1i},\alpha_{2i},\ldots,\alpha_{ni}),\end{aligned}$$

$g_1, g_2, \ldots, g_n$ désignant des polynomes entiers et x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si dans cette formule on change x en α_{1i} et *vice versa*, x_2 en α_{2i} et *vice versa*, etc., on trouve

$$\begin{aligned}(\alpha_{1i}-x_1)\,g'_1+(\alpha_{2i}-x_2)\,g'_2+\ldots+(\alpha_{ni}-x_n)\,y'_n\\=f_k(\alpha_{1i},\alpha_{2i},\ldots)-f_k(x_1,x_2,\ldots),\end{aligned}$$

$g'_1, g'_2, \ldots$ ne différant de $g_1, g_2, \ldots$ que par la permutation simultanée de x_1 et $\alpha_{1i}, \ldots$, on en conclut

$$\begin{aligned}(x_1-\alpha_{1i})\,\frac{g_1+g'_1}{2}+\ldots+(x_n-\alpha_{ni})\,\frac{g_n+g'_n}{2}\\=f_k(x_1,x_2,\ldots)-f_k(\alpha_{1i},\alpha_{2i},\ldots),\end{aligned}$$

et il est clair que $\frac{g_j+g'_j}{2}$ jouira de la propriété que nous avons attribuée à f^i_{kj}.

Posons alors

$$\xi_i=\begin{vmatrix} f^i_{11} & f^i_{12} & \ldots & f^i_{1n}\\ f^i_{21} & f^i_{22} & \ldots & f^i_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f^i_{n1} & f^i_{n2} & \ldots & f^i_{nn}\end{vmatrix} : \mathrm{D}_i. \tag{8}$$

Les fonctions ξ_i seront ce que nous appellerons les *fonctions interpolaires* relatives au système $f_1, f_2, \ldots, f_n$, pour une raison que l'on comprendra un peu plus loin :

1° ξ_i *ne change pas quand on permute à la fois* x_1 et α_{1i}, x_2 et α_{2i}, ... *au numérateur.*

2° ξ_i s'annule pour toutes les valeurs des x qui annulent les f, excepté pour $x_1=\alpha_{1i}$, $x_2=\alpha_{2i}$, ..., valeurs pour lesquelles il se réduit à l'unité.

En effet, en vertu de (7), la formule (8) pourra s'écrire

$$\xi_i(x_1-\alpha_{1i}) = \begin{vmatrix} f_1 & f_{12}^i & \cdots & f_{1n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_n^i & \cdots & f_{nn}^i \end{vmatrix} : \mathrm{D}_i.$$

Le second membre est donc nul avec les f; donc ξ_i est nul avec les f, excepté pour $x_1=\alpha_{1i}$, $x_2=\alpha_{2i}$, ...; mais, dans ce cas, $f_{kj}^i=\frac{\partial f_k}{\partial x_{ji}}$, et ξ_i égal à un.

3° *Il n'existe pas de relation linéaire et homogène à coefficients constants entre* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$.

Car, s'il pouvait exister une semblable relation

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots+a_\mu\xi_\mu=0,$$

on en déduirait pour $x_1=\alpha_{1i}$, $x_2=\alpha_{2i}$, ...

$$a_i=0.$$

4° On a

$$(9)\qquad \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\mu=1.$$

En effet, en vertu du théorème de Jacobi, l'expression $\Sigma\xi$ ou

$$\Sigma\begin{vmatrix} f_{11}^i & f_{12}^i & \cdots & f_{1n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}^i & f_{n2}^i & \cdots & f_{nn}^i \end{vmatrix} : \mathrm{D}_i$$

se décompose en termes dont les coefficients sont nuls, à l'exception du terme indépendant des x, qui est de même degré que D_i par rapport aux α_{ij}; $\Sigma\xi$ est donc indépendant des x, et, pour avoir sa valeur, il suffit par exemple de faire $x_1=\alpha_{11}$, $x_2=\alpha_{21}$, ... pour voir qu'il se réduit à un.

5° *Si l'on désigne par* f_0 *une fonction entière de* x_1, $x_2, \ldots, x_n$, *on pourra toujours la mettre sous la forme*

$$(6)\qquad f_0=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n+f_{01}\xi_1+f_{02}\xi_2+\ldots+f_{0\mu}\xi_\mu,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *désignant des polynomes entiers, et* f_{0i} *désignant, pour abréger,* $f_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots)$.

6° *Si* f_0 *est de degré inférieur au plus petit des nombres* m, *on aura seulement*

$$f_0 = f_{01}\xi_1 + f_{02}\xi_2 + \ldots + f_{0\mu}\xi_\mu,$$

ce qui justifie le nom de fonctions interpolaires *donné aux* ξ, *et si* f_0 *s'annule en même temps que les* f, *on aura*

$$f_0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_1 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n.$$

En effet, on a

$$\begin{vmatrix} f_0 - f_{0i} & f_{01}^i & \cdots & f_{0n}^i \\ f_1 & f_{11}^i & \cdots & f_{1n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n1}^i & \cdots & f_{1n}^i \end{vmatrix} = 0,$$

car, en multipliant la deuxième colonne par $x_1 - \alpha_{1i}$, la troisième par $x_2 - \alpha_{2i}, \ldots$ et en les retranchant de la première, celle-ci se trouve composée de zéros; on en conclut, en divisant par D_i,

$$(f_0 - f_{0i})\xi_i + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ désignant des polynomes entiers. Si dans cette formule on fait $i = 1, 2, \ldots, \mu$ et si l'on ajoute en tenant compte de la relation (9), on a

$$f_0 = f_{01}\xi_1 + \ldots + f_{0\mu}\xi_\mu + P_1 f_1 + \ldots + P_n f_n.$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont évidemment des polynomes entiers, et il est important d'évaluer leurs degrés.

P_1 est de la forme

$$\Sigma \begin{vmatrix} f_{01}^i & \cdots & f_{0n}^i \\ f_{21}^i & \cdots & f_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}^i & \cdots & f_{nn}^i \end{vmatrix} : D_i = P_1.$$

Le déterminant placé sous le signe Σ est, en appelant m_0 le degré de f_0 par rapport à α_{1i}, α_{2i}, ... ou à x_1, x_2, ...,

$$m_0 + m_1 + \ldots + m_n - n = \nu.$$

Le coefficient d'un terme en x_1, x_2, ..., x_n de degré $\nu - h$ dans P_1 est de degré h en α_{1i}, α_{2i}, ... Si donc $h \leqq \Sigma m - n - 1$, ce terme sera nul, en vertu du théorème de Jacobi; le degré de P ne surpassera donc pas

$$\nu - \Sigma m + n + 1;$$

il sera au plus égal à ce nombre ou à

$$m_0 - m_1 + 1.$$

En particulier, si le degré m_0 de f est inférieur au plus petit des nombres m_1, m_2, ..., m_n, on aura seulement

$$f_0 = f_{01}\xi_1 + f_{02}\xi_2 + \ldots + f_{0a}\xi_n,$$

et si f_0 est nul en même temps que les f,

$$f_0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n;$$

si en particulier $m_0 = m_1 = \ldots = m_n$, dans la formule précédente, λ_1, λ_2, ..., λ_n seront des constantes.

Remarque I. — Ce théorème et ses conséquences supposent les solutions des équations (1) distinctes et normales, il ne faut pas l'oublier.

7° *Le produit $f_{01} f_{02} \ldots f_{0\mu}$ est de la forme*

$$(b) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_i f_1 \ldots + \lambda_n f_n,$$

ou, si l'on veut, la résultante des équations

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0$$

est de la forme

$$(c) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0,$$

λ_0, λ_1, ... *désignant des polynomes entiers.*

En effet, le polynome

$$f_{01}f_{02}\dots f_{0\mu}-\left(\frac{\xi_1}{f_{01}}+\frac{\xi_2}{f_{02}}+\dots+\frac{\xi_\mu}{f_{0\mu}}\right)f_0 f_{01}\dots f_{0\mu}$$

est nul pour toutes les valeurs des x annulant les f; en exprimant qu'il est de la forme $\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_n f_n$, on a

$$f_{01}f_{02}\dots f_{0\mu}=f_0 f_{01}\dots f_{0\mu}\left(\frac{\xi_1}{f_{01}}+\dots+\frac{\xi_\mu}{f_{0\mu}}\right)$$
$$+\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_n f_n. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque II. — Dans la formule (c), comme d'ailleurs dans (b), les polynomes λ n'ont pas de valeur bien déterminée; on pourrait les remplacer par une infinité d'autres, car on a évidemment l'identité

$$a_0 f_0+a_1 f_1+\dots+a_n f_n=0,$$

si l'on choisit les polynomes $a_0, a_1, \dots, a_n$ ainsi :

$$\begin{aligned} a_0 &= c_{00}f_0+c_{01}f_1+\dots+c_{0n}f_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_n &= c_{n0}f_0+c_{n1}f_1+\dots+c_{nn}f_n,\end{aligned}$$

et si les c_{ij} satisfont aux relations

$$c_{ii}=0, \qquad c_{ij}=-c_{ji}.$$

Les coefficients des ξ, au contraire, sont bien déterminés, car la formule (b) devant avoir lieu pour $x_1=\alpha_{1i}$, $x_2=\alpha_{2i}$, $\dots$, on a forcément f_{0i} pour coefficient de ξ_i.

IV. — SUR LA FONCTION Λ.

La fonction Λ joue un rôle important dans la théorie des polynomes entiers, mais elle n'est, jusqu'à présent, définie qu'à des multiples des fonctions f près; nous allons achever de la définir avec plus de précision, et nous po-

serons

$$(10) \qquad \Lambda = \sum \frac{F_1 F_2 \ldots F_n}{D_i(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2i}) \ldots}$$

C'est sous cette forme que nous allons en étudier les propriétés.

1° *La fonction* Λ *est de degré* $n\mu - \Sigma m$.

En effet, la quantité placée sous le signe Σ, dans la formule (10), est une fonction entière de degré $n\mu - n$; le coefficient de $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\lambda$ dans Λ est un polynome entier, par rapport aux α_{ij} de degré

$$n\mu - n - (\alpha + \beta + \ldots + \lambda),$$

en vertu du théorème de Jacobi; ce polynome sera nul si l'on a

$$n\mu - n - (\alpha + \beta + \ldots + \lambda) \leqq \Sigma m - n$$

ou

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda \geqq \Sigma n\mu - \Sigma m.$$

Donc Λ est, au plus, de degré $n\mu - \Sigma m$.

2° *La fonction* Λ *est nulle pour les valeurs des* x *annulant les* F, *sans annuler les* f.

3° *Pour* $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ...,

$$\Lambda = \frac{F'_1(x_1)\, F'_2(x_2) \ldots}{D},$$

car, en vertu de la formule (10), elle se réduit bien à cette quantité.

Il résulte de là que la nouvelle fonction Λ est égale à l'ancienne, à des multiples des F près, et même à des multiples des f près.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET L'ÉLIMINATION.

I. — DÉFINITION DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Soient f_1, f_2, ..., f_n des polynomes entiers en x_1, x_2, ..., x_n, de degrés m_1, m_2, ..., m_n;

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \dots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \dots, & \alpha_{n2}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \dots, & \alpha_{n\mu} \end{array}$$

les $m_1 m_2 \dots m_n = \mu$ solutions supposées finies, normales et distinctes des équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \dots, \qquad f_n = 0.$$

On appelle *fonctions symétriques* des solutions de ces équations des fonctions qui ne changent pas de valeur, quand on permute les éléments de deux solutions, par exemple, quand on permute à la fois α_{1i} et α_{1j}, α_{2i} et α_{2j}, etc.

Le théorème de Jacobi, qui a servi de base à la théorie de l'élimination, peut être pris aussi comme point de départ de la théorie des fonctions symétriques; il montre, par exemple, que la fonction symétrique

$$\sum \frac{\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots)}{D_i}$$

est le coefficient de $x_1^{-1} x_2^{-1} \dots$ dans $\frac{\mathrm{A}\Psi}{\Pi \mathrm{F}}$ (*voir* § II, Chap. I).

Malheureusement, pour former cette fonction symétrique, il faut avoir formé les fonctions F et A. Il montre aussi que la fonction $\Sigma\Psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots)$ est le coefficient de $x_1^{-1} x_2^{-1} \dots$ dans le développement de $\frac{\mathrm{A}\Psi \mathrm{D}}{\Pi \mathrm{F}}$. On voit que l'on pourra calculer les fonctions symétriques de la forme $\Sigma\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots)$.

II. — DEUXIÈME EXEMPLE.

Soient $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\mu$ des polynomes entiers et ψ_{ij} la valeur de ψ_i pour $x_1 = \alpha_{ij}$, $x_2 = \alpha_{ij}$, ... Soit

$$\Psi = \Sigma \pm \psi_{11} \psi_{22} \dots \psi_{\mu\mu}.$$

Le produit $\Psi^2 \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_\mu$ est symétrique; il s'annule pour $\alpha_{11} = \alpha_{21}$, $\alpha_{11} = \alpha_{31}$, ...; donc il est divisible par le produit des différences $\alpha_{1i} - \alpha_{ij}$ et même par les autres produits analogues; et, comme il est symétrique, il est divisible par leur carré, en sorte que

$$\Psi^2 \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_\mu = \Pi\, \mathrm{F}'_1(\alpha_{1i})\, \Pi\, \mathrm{F}'_2(\alpha_{2j}) \dots \mathrm{K},$$

K désignant un polynome entier par rapport aux α_{ij}. En vertu des propriétés de la fonction A, cette formule peut s'écrire

$$\Psi^2 = \mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2 \dots \mathrm{D}_\mu \mathrm{K},$$

et, si Ψ^2 est de degré $\mu(\Sigma m - n)$, il sera égal à $\mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2 \dots \mathrm{D}_\mu$, à un facteur près indépendant des f, ou plutôt des F. Si Ψ^2 est de degré inférieur à $\mu(\Sigma m - n)$, il est nul.

Supposons, par exemple, que $\psi_1, \psi_2, \dots$ soient les termes du produit

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \dots + x_1^{m_1 - 1}) \dots (1 + x_n + x_n^2 + \dots + x_n^{m_n - 1}) = \mathrm{G},$$

au nombre de μ. Le degré de Ψ sera la somme des exposants des termes de ce produit, ou la valeur pour $x_1 = x_2 = \ldots = 1$ du polynome $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}$ G ou

$$\frac{\mu}{m_1}\frac{m_1(m_1-1)}{2}+\frac{\mu}{m_2}\frac{m_2(m_2-1)}{2}+\ldots,$$

c'est-à-dire $\frac{\mu}{2}(\Sigma m - n)$. Donc, dans ce cas, Ψ^2 est égal à $D_1 D_2 \ldots D_\mu$, à un facteur près, indépendant des F.

III. — FORMATION DE LA RÉSULTANTE.

Soit f_0 un polynome entier, et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\mu$ les termes du produit

$$(1)\quad (1+x_1+x_1^2+\ldots+x_1^{m_1-1})\ldots(1+x_n+x_n^2+\ldots+x_n^{m_n-1});$$

faisons le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \psi_{11}f_{01} & \psi_{12}f_{02} & \cdots & \psi_{1\mu}f_{0\mu} \\ \psi_{21}f_{01} & \psi_{22}f_{02} & \cdots & \psi_{2\mu}f_{0\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\psi_{11}}{D_1} & \frac{\psi_{12}}{D_2} & \cdots & \frac{\psi_{1\mu}}{D_\mu} \\ \frac{\psi_{21}}{D_1} & \frac{\psi_{22}}{D_2} & \cdots & \frac{\psi_{2\mu}}{D_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Il est égal à $\Psi^2 \frac{f_{01}f_{02}\ldots f_{0\mu}}{D_1 D_2 \ldots D_\mu}$, ou à $f_{01}f_{02}\ldots f_{0\mu}$, à un facteur près indépendant des F : c'est le premier membre de la résultante de

$$(2)\qquad f_0 = 0,\qquad f_1 = 0,\qquad \ldots,\qquad f_n = 0.$$

D'autre part, il est égal à

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\psi_{1i}^2 f_{0i}}{D_i} & \sum \frac{\psi_{1i}\psi_{2i}f_{0i}}{D_i} & \cdots & \sum \frac{\psi_{1i}\psi_{\mu i}f_{0i}}{D_i} \\ \sum \frac{\psi_{2i}\psi_{1i}f_{0i}}{D_i} & \sum \frac{\psi_{2i}^2 f_{0i}}{D_i} & \cdots & \sum \frac{\psi_{2i}\psi_{\mu i}f_{0i}}{D_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

En égalant ce déterminant à zéro, on obtiendra la résultante des équations (2). On voit que tous les termes de ce déterminant sont calculables par la méthode de Jacobi.

On a ainsi une première méthode pour la formation de la résultante, méthode impraticable, et qui exige la formation successive de la résultante d'un grand nombre d'équations, par des méthodes qui se compliquent de plus en plus. D'ailleurs, la méthode précédente repose sur une hypothèse : c'est que le déterminant

$$\Sigma \pm \psi_{11} \psi_{22} \ldots \psi_{nn}$$

n'est pas nul. Il ne serait pas difficile de montrer qu'il ne l'est pas en général, en le calculant dans un cas particulier, mais les cas où il s'annule sont nombreux, et il est important de ne laisser planer aucun doute sur la possibilité de former la résultante dans tous les cas.

Nous allons donc présenter une nouvelle méthode qui nous permettra de former la résultante d'un nombre quelconque d'équations, d'une manière explicite, et d'en déduire une méthode pour le calcul de toutes les fonctions symétriques.

IV. — NOUVELLE MÉTHODE POUR FORMER LA RÉSULTANTE.

Soient $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des polynomes entiers en x_1, $x_2, \ldots, x_n$, des degrés $m_0, m_1, \ldots, m_n$; conservant d'ailleurs toutes les notations des paragraphes précédents, posons (*voir* § 3, Chap. I)

$$\begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{01}^i & \cdots & \varphi_{0n}^i \\ \varphi_1 & \varphi_{11}^i & \cdots & \varphi_{1n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_n & \varphi_{n1}^i & \cdots & \varphi_{nn}^i \end{vmatrix} = \theta(x_1, x_2, \ldots, \alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots) = \theta_i.$$

En supposant les φ_{ij}^k définis par les relations

$$\varphi_k = \varphi_k(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots) + (x_1 - \alpha_{1i})\varphi_{k1}^i + \ldots + (x_n - \alpha_{ni})\varphi_{kn}^i,$$

θ_i, si l'on veut, ne changera pas quand on remplacera, dans sa première colonne, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ par

$$\varphi_0(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots), \quad \varphi_1(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots), \quad \ldots.$$

θ_i sera donc de degré $\sum_1^n m - n$, soit par rapport aux x, soit par rapport aux α, pourvu que m_0 ne soit pas plus grand que le plus grand des nombres $m_1, m_2, \ldots$, ce que nous supposerons. De plus, si l'on désigne par θ_{ij} la quantité $\theta(\beta_{1i}, \beta_{2i}, \ldots, \alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots)$, on aura

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}.$$

Considérons alors le déterminant

$$\Sigma \pm \theta_{11}\theta_{22}\ldots\theta_{\mu\mu} = \Theta,$$

et supposons que les β_{ij} soient les solutions d'équations

(3) $$f'_1 = 0, \quad f'_2 = 0, \quad \ldots, \quad f'_n = 0$$

obtenues en modifiant les coefficients des f, de sorte que nous pourrons ultérieurement faire $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$.

θ_{ij} est de la forme $\Sigma A_i B_j$, A_i désignant une fonction de $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots$, et B_j une fonction de $\beta_{ij}, \beta_{2j}, \ldots$, et l'on a

$$\Theta = \begin{vmatrix} \Sigma A_1 B_1 & \Sigma A_1 B_2 & \ldots & \Sigma A_\mu B_\mu \\ \Sigma A_2 B_1 & \Sigma A_2 B_2 & \ldots & \Sigma A_2 B_\mu \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix};$$

donc Θ est une somme de produits de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{\mu 1} \\ a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{\mu 2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{\mu 1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{\mu 2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

où les a_{ij} sont fonctions des α_{ij}, et les b_{ij} des fonctions des β_{ij}.

Désignons par u le premier facteur et par v le second; la première ligne de u ne contient que les α_{p1}, la seconde

ne contient que les $\alpha_{p2}, \ldots$; la première ligne de v ne contient que les $\beta_{p1}, \ldots$. D'ailleurs, a_{pi} et a_{pj} ne diffèrent que par le changement de $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots$ en $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots$. Les éléments de u et ceux de v sont de degré $\sum_1^n m - n$: donc u et v sont chacun au plus de degré $\mu\left(\sum_1^n m - n\right)$; donc, d'après ce qu'on a vu au § 2, u^2 sera ou nul, ou égal à $D_1 D_2 \ldots D_\mu$, à un facteur près, indépendant des α_{ij}. De même, si l'on appelle $D'_1 D'_2 \ldots$ ce que deviennent $D_1 D_2 \ldots$ quand on remplace les f par les f', v^2 sera ou nul, ou égal à $D'_1 D'_2 \ldots D'_\mu$, à un facteur indépendant des β_{ij} près; donc, enfin, Θ^2 sera de la forme $D_1 D_2 \ldots D_\mu D'_1 D'_2 \ldots D'_\mu \varepsilon^2$, ε^2 étant indépendant des α_{ij} et des β_{ij}.

Si maintenant on suppose les f' identiques aux f, on aura

$$\Theta^2 = (D_1 D_2 \ldots D_\mu)^2 \varepsilon^2$$

ou

$$\Theta = D_1 D_2 \ldots D_\mu \varepsilon,$$

ε étant indépendant des α_{ij}, c'est-à-dire de la forme des F; il pourra dépendre de la forme des f, mais non de leurs solutions. Faisons alors coïncider les α_{ij} avec les solutions des équations

$$\varphi_i = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0.$$

θ_{ij} se réduira à

$$\varphi_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots) \begin{vmatrix} \varphi^i_{11} & \varphi^i_{12} & \cdots & \varphi^i_{1n} \\ \varphi^i_{21} & \varphi^i_{22} & \cdots & \varphi^i_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (x_1 = \alpha_{1j}, x_2 = \alpha_{2j}, \ldots);$$

il sera nul si $i \gtrless j$, et égal à $\varphi_{0i} D_i$, si $i = j$, en sorte que l'on aura

$$\frac{\Theta}{D_1 D_2 \ldots D_\mu} = \varphi_0(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots), \varphi_0(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots), \ldots, \varphi_0(\alpha_{1\mu}, \alpha_{2\mu}, \ldots).$$

et $\frac{\Theta}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = 0$ sera la résultante des équations

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dots \quad \varphi_n = 0.$$

THÉORÈME DE BÉZOUT. — *Supposons que $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ contiennent, outre les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, une autre variable x_0, et que ces polynomes restent, par rapport à $x_0, x_1, \dots, x_n$, des degrés $m_0, m_1, \dots, m_n$. Le degré de Θ ou de la résultante sera $m_0, m_1, \dots, m_n$ en x_0.*

En effet, le degré de Θ par rapport aux α_{ij} et à x_0 est $\left(\sum_0^m m - n\right)\mu$; celui de $D_1 D_2 \dots D_\mu$ est $\left(\sum_1^n m - n\right)\mu$; donc le degré de $\frac{\Theta}{D_1 D_2 \dots D_\mu}$, par rapport à x_0 est

$$\mu\left(\sum_0^n m - n\right) - \mu\left(\sum_1^n m - n\right) = \mu m_0 = m_0 m_1 \dots m_n.$$

C. Q. F. D.

V. — LES POLYNOMES MULTIPLICATEURS.

Considérons maintenant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_\mu & \theta_{\mu 1} & \theta_{\mu 2} & \dots & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} = T;$$

il est de la forme

$$\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n + \Theta = T.$$

et le coefficient λ_0 est égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \varpi_1 & \theta_{11} & \dots & \theta_{1\mu} \\ \varpi_2 & \theta_{21} & \dots & \theta_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \lambda_0,$$

ϖ_i désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi^i_{11} & \varphi^i_{12} & \dots & \varphi^i_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi^i_{n1} & \varphi^i_{n2} & \dots & \varphi^i_{nn} \end{vmatrix}.$$

Or, il est facile de voir, en raisonnant sur le déterminant λ_0, comme on l'a fait sur Θ, que

$$\frac{\lambda_0}{D_1 D_2 \dots D_\mu}$$

ne dépend pas des α_{ij}. Or, si l'on fait coïncider les f avec les φ, on trouve

$$\frac{\lambda_0}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = \begin{vmatrix} \varphi_0\xi_1 & \varphi_{01} & \varphi_{01} & \dots & 0 \\ \varphi_0\xi_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{01}\varphi_2 \dots \varphi_{0\mu} . \varphi_0 \left(\frac{\xi_1}{\varphi_{01}} + \frac{\xi_2}{\varphi_{02}} + \dots + \frac{\xi_\mu}{\varphi_{0\mu}} \right).$$

C'est, en vertu de la première remarque, Chap. I, § 3, le multiplicateur qu'il faut appliquer à φ_0 pour obtenir l'identité

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n = \varphi_{01}\varphi_{02}\dots\varphi_{0n}.$$

On a donc ainsi une méthode pour former les *multiplicateurs* λ_0, λ_1, ... qu'il faut appliquer à φ_0, φ_1, ... pour obtenir la résultante.

VI. — CONCLUSION.

Nous avons admis qu'un système d'équations composé de n équations à n inconnues et de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ avait un système de $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions, racines d'équations à une inconnue de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0;$$

nous en avons conclu qu'en général les équations (4) avaient une résultante de degré $m_0 m_1 \ldots m_n$ en x_0. A chaque racine de la résultante correspondra une solution de (4) et, par suite, les équations (4) auront $m_0 m_1 \ldots m_n$ solutions; d'ailleurs, la résultante est bien de la forme

$$\lambda_0 \varphi_0 + \ldots + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

On peut donc conclure de là que, sauf dans des cas exceptionnels :

n équations de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ont $m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions, puisque ce théorème est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

Toutefois, nous avons admis que les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

admettaient $m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions, et, s'il n'en était pas ainsi, nos raisonnements ne seraient plus valables. Enfin, nous avons trouvé que Θ était au plus de degré $m_0 m_1 \ldots m_n$. Il convient donc de soumettre nos conclusions à une discussion : c'est ce que nous ferons après avoir achevé la théorie des fonctions symétriques.

VII. — CALCUL DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Nous appellerons *poids* d'une fonction des coefficients des équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0$$

le degré de cette fonction, par rapport à x_0, paramètre contenu dans $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et tel que $f_1, f_2, \ldots$ conservent leurs degrés en ayant égard à ce paramètre.

Il est clair que le poids d'une fonction des coefficients ne changera pas, en supposant que x_0 n'entre qu'en facteur dans chaque coefficient; et, par suite, ν fois en facteur dans un coefficient de poids ν. Les éléments d'une solution sont de poids un et, par suite, si φ est de degré ς, par rapport aux éléments des solutions, et si φ est une fonction rationnelle des coefficients des f, φ sera de poids ς. Si donc une fonction symétrique telle que $\Sigma\varphi_i$, par exemple, est fonction entière des coefficients des f, son poids sera égal à son degré, par rapport aux α_{ij}.

Or, il est facile de prouver que toute fonction symétrique entière des solutions des f est entière, par rapport aux coefficients de ces fonctions. Soit, en effet, T un terme d'une semblable fonction symétrique; T sera lui-même symétrique, sinon la fonction contiendra les termes obtenus en permutant toutes les solutions dans T, et la somme des termes ainsi obtenus sera une fonction symétrique; il suffit de prouver qu'une fonction symétrique ainsi obtenue est entière, par rapport aux coefficients des f.

Soient $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ des polynomes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit

$$\varphi_i = \varphi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots), \qquad \chi_i = \chi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots), \qquad \ldots$$

Nous allons montrer comment on peut calculer

$$\Sigma \varphi_i \chi_j \psi_k \ldots$$

en fonction entière des coefficients des f. On posera

$$z = \varphi_i \chi_j \psi_k, \ldots, \tag{2}$$

et l'on aura

$$\left\{\begin{array}{llll} f_{1i}=0, & f_{2i}=0, & \ldots, & f_{ni}=0, \\ f_{1j}=0, & f_{2j}=0, & \ldots, & f_{nj}=0, \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \end{array}\right. \tag{3}$$

en posant $f_{\mu i} = f_\mu(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots) \ldots$. Si, entre (2) et (3), on élimine les α_{ij}, on aura une équation en z dont les coefficients seront entiers, par rapport aux coefficients des f, et dont les racines seront les valeurs de la fonction $\varphi_i \chi_j \psi_k \ldots$. Si δ est le degré de cette équation, le coefficient de $z^{\delta-1}$, pris en signe contraire, divisé par le coefficient de z^δ, donnera la valeur de $\Sigma \varphi_i \chi_j \psi_k \ldots$; donc évidemment, d'après la forme connue de la résultante, $\Sigma \varphi_i \chi_j \psi_k \ldots$ sera rationnelle, par rapport aux coefficients des f. Le coefficient de z^δ sera évidemment indépendant de la forme de φ (ce qui est évident à l'inspection de la forme que nous avons donnée à la résultante); il sera donc le même que si l'on avait pris $\varphi_i \chi_j \ldots = 1$, et ne dépendra que des termes de poids zéro. $\Sigma \varphi_i \chi_j \ldots$ sera donc entière, par rapport aux coefficients dont le poids n'est pas nul.

Toute fonction symétrique rationnelle est le quotient de deux fonctions symétriques entières. En effet, soit $\frac{P}{Q}$ une fonction symétrique rationnelle, P et Q étant entiers, par rapport aux α_{ij}. $\frac{P}{Q}$ est égal à un facteur numérique entier près, égal à $\sum \frac{P_i}{Q_i}$, P_i désignant une des valeurs que

prend P quand on y permute les α_{ij}. Or, $\sum \frac{P_i}{Q_i}$ est de la forme $\frac{V}{Q_1 Q_2 \dots}$; le dénominateur ne change pas quand on y permute les α_{ij}. Il doit donc en être de même de V.

Puisque toute fonction symétrique rationnelle est le quotient de deux fonctions symétriques entières, elle s'exprimera rationnellement au moyen des coefficients des f.

VIII. — RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS.

Reprenons le système

(4) $$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0,$$

dont la résultante a été mise sous la forme

(5) $$\Theta = \Sigma \pm \theta_{11}\theta_{22}\dots\theta_{\mu\mu} = 0,$$

et que l'on peut également présenter sous la forme

$$R = \varphi_{01}\varphi_{02}\dots\varphi_{0\mu} = 0,$$

R et Θ ne différant entre eux que par un facteur de poids nul, φ_{0i} désignant la valeur que prend φ_0 quand on y remplace $x_1, x_2, \dots, x_n$ par les éléments $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$ d'une solution des équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0.$$

Soit c le coefficient de $x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\lambda$ dans φ_0, on aura

(6) $$\frac{\partial R}{\partial c} = \frac{R}{\varphi_{01}} x_{11}^\alpha x_{21}^\beta + \dots + \frac{R}{\varphi_{02}} x_{12}^\alpha x_{22}^\beta + \dots.$$

Supposons que $x_{11} x_{21} \dots$ soit et soit seule solution de $\varphi_0 = 0$, on aura simplement

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \frac{R}{\varphi_{01}} x_{11}^\alpha x_{21}^\beta \dots;$$

soit k le terme tout connu dans φ_0, on aura de même

$$\frac{\partial R}{\partial k} = \frac{R}{\varphi_{01}}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial R}{\partial c} : \frac{\partial R}{\partial k} = x_{11}^{\alpha} x_{21}^{\beta} \ldots .$$

On a ainsi le moyen de calculer les éléments d'une solution commune quand elle est *unique*.

Lorsque les équations (4) ont deux solutions communes, $x_{11} x_{21} \ldots$ et $x_{12} x_{22} \ldots$ $\frac{\partial R}{\partial c}$ sont nuls et, il en est de même de toutes les quantités analogues ; mais, en différentiant une seconde fois (6), on a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial c^2} = \frac{2R}{\varphi_{01}\varphi_{02}} x_{11}^{\alpha} x_{21}^{\beta} \ldots x_{12}^{\alpha} x_{22}^{\beta} \ldots + \ldots,$$

de même

$$\frac{\partial^2 R}{\partial c\, \partial k} = \frac{R}{\varphi_{01}\varphi_{02}} (x_{11}^{\alpha} x_{21}^{\beta} \ldots + x_{21}^{\alpha} x_{22}^{\beta} \ldots) + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial k^2} = \frac{2R}{\varphi_{01}\varphi_{02}} + \ldots .$$

Si l'on suppose $x_{11} x_{12} \ldots$ et $x_{21} x_{22} \ldots$ solutions communes, les termes représentés par des points disparaissent, et l'on a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial c^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial k^2} x_{11}^{\alpha} \ldots x_{12}^{\alpha} \ldots,$$

$$2 \frac{\partial^2 R}{\partial c\, \partial k} = \frac{\partial^2 R}{\partial k^2} (x_{11}^{\alpha} \ldots + x_{12}^{\alpha} \ldots).$$

On a alors la somme et le produit de $x_{11}^{\alpha} \ldots$ et $x_{12}^{\alpha} \ldots$ et par suite une équation du second degré dont $x_{11}^{\alpha} \ldots$ et x_{12}^{α} seront racines et ainsi de suite.

Réciproquement, si tous les $\frac{\partial R}{\partial c}$ sont nuls, il est clair que

les équations (4) auront deux solutions différentes ou égales, etc.

Maintenant, il faut remarquer que, si tous les $\frac{\partial R}{\partial c}$ sont nuls, on a

$$\frac{\partial R}{\partial x_0} = \sum \frac{\partial R}{\partial c} \frac{dc}{dx_0},$$

et par suite $R = 0$, ou $\Theta = 0$ a une racine double; si toutes les dérivées secondes de R par rapport aux c sont nulles, $\frac{\partial^2 R}{\partial x_0^2}$ est nul, $R = 0$ ou $\Theta = 0$ a une racine triple, etc. On peut donc dire qu'à chacune des $m_0 m_1 \ldots m_n$ solutions de $\Theta = 0$, ne correspond qu'une solution des équations (4); donc, ce qui restait à prouver, *les équations* (4) *ont* $m_0 m_1 \ldots m_n$ *solutions au plus.* Cependant, cette conclusion tomberait en défaut si R ou Θ était nul quel que soit x_0 et alors les équations (4) auraient une infinité de solutions.

Il est bon d'observer que R ou Θ peuvent être identiquement nuls sans que les $\frac{\partial R}{\partial c}$ le soient, de sorte que à chaque valeur de x_0 correspondront des valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_n$; mais il peut arriver que certaines valeurs de x_0 annulent les $\frac{\partial R}{\partial c}$, et constituent, en quelque sorte, des solutions singulières remarquables, en nombre fini, et isolées de la solution générale.

R et tous les $\frac{\partial R}{\partial c}$ peuvent être nuls, la solution des équations (4) prend alors un caractère d'indétermination plus élevé, et des solutions singulières peuvent encore s'introduire, si, pour certaines valeurs de x_0, les dérivées secondes de R sont toutes nulles, etc.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS HOMOGÈNES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Soit $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ un polynome de degré m en x_1, $x_2, \dots, x_n$; si l'on remplace x_1 par $\frac{x_1}{x_0}$, x_2 par $\frac{x_2}{x_0}$, ... et si l'on multiplie par x_0^m, le polynome $F(x_1, x_2, \dots)$ deviendra

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

et sera homogène; il est clair que l'on aura identiquement

$$F(1, x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

le polynome $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est ce que l'on appelle le polynome F rendu homogène.

Éliminer $x_1, x_2, \dots, x_n$ entre les polynomes homogènes

$$f_0(x_0, x_1, \dots) = 0, \qquad f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0,$$
$$f_2 = 0, \qquad \dots \qquad f_n = 0,$$

c'est en définitive éliminer $x_0, x_1, \dots, x_n$, car, dans la résultante, il entre x_0 en facteur que l'on peut supprimer, si l'on rejette la solution $x_0 = 0$.

Il importe d'observer que, de quelque manière que l'on fasse l'élimination, la résultante reste toujours la même après la suppression du facteur en x_0, en x_1, ... qui provient de la variable non éliminée.

En effet, pour faire l'élimination, résolvons les équations

$$(a) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_1 = 0;$$

et pour cela divisons par x_0, on aura pour $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots$ des solutions que l'on peut représenter par

$$\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{0i}}, \quad \frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{0i}}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_{ni}}{\alpha_{0i}},$$

et les porter dans f_0, ce qui donne, après l'évanouissement des dénominateurs,

$$\Pi f_0(\alpha_{0i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}) = 0,$$

où les α_{ij} ne sont déterminés qu'à un facteur commun près. Les mêmes équations (a) peuvent être résolues par rapport à $\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots$, et comme, en définitive, elles ne font connaître que les rapports des inconnues, leurs solutions seront

$$\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{1i}}, \quad \frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{1i}}, \quad \ldots,$$

et la résultante restera la même après l'évanouissement des nouveaux dénominateurs. Ces raisonnements supposent seulement qu'il n'y a pas de solutions nulles.

II. — CHANGEMENT DE VARIABLES.

Soient $f_0, f_1, \ldots, f_n$ des polynomes homogènes en x_0, x_1, x_2, ..., x_n des degrés m_0, m_1, ..., m_n. Considérons les équations

$$(1) \qquad f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

et posons

$$(2) \qquad \frac{x_0}{\psi_0} = \frac{x_1}{\psi_1} = \ldots = \frac{x_n}{\psi_n},$$

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ désignant des polynomes homogènes de degrés p en $y_0, y_1, \ldots, y_n$; éliminons $x_0, x_1, \ldots$ entre (1) et (2), ce qui se fera en remplaçant $x_0, x_1, \ldots$ par $\psi_0, \psi_1, \ldots$ dans (1); nous obtiendrons de nouvelles équations

$$(3) \qquad g_0 = 0, \qquad g_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad g_n = 0,$$

où $g_0, g_1, \ldots$ seront des polynomes homogènes en $y_0, y_1, \ldots, y_n$, des degrés $pm_0, pm_1, \ldots, pm_n$.

Si l'on désigne par $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \ldots$ une solution de (1), en la mettant à la place de $x_0, x_1, \ldots$ dans (3), on aura

$$\frac{\alpha_{0i}}{\psi_0} = \frac{\alpha_{1i}}{\psi_1} = \ldots = \frac{\alpha_{ni}}{\psi_n},$$

ce qui déterminera pour $y_0, y_1, \ldots$, ou pour les rapports $y_0 : y_1 : y_2 : \ldots$, p^n valeurs correspondantes; ces valeurs et leurs analogues seront les solutions des équations (3); si les équations (1) n'ont pas de solutions, (3) n'en auront pas non plus.

La résultante des équations (1) peut être mise sous la forme

$$\Pi f_0(\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni}) = 0,$$

celle des équations (3) sous la forme

$$\Pi g_0(\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj}) = 0,$$

ou

$$\Pi f_0[\psi_0(\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots), \psi_1(\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots), \ldots] = 0.$$

Dans cette dernière formule, les valeurs des β_{ij} se décomposeront en groupes de p^n solutions donnant les mêmes valeurs à $\psi_0, \psi_1, \ldots$, valeurs proportionnelles à α_{0i}, $\alpha_{1i}, \ldots$; donc la résultante des équations (3) contiendra le facteur R^{p^n}, $R = 0$ désignant la résultante de (1); ainsi, R' désignant le premier membre de la résultante de (3),

on aura

$$R' = R^{p^n} S,$$

S désignant un facteur à déterminer. Or, les g s'annulent pour les valeurs des y, non toutes nulles, annulant les ψ, s'il y en a ; R′ s'annulera donc quand le premier membre de la résultante T des équations

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \dots, \quad \psi_n = 0$$

s'annulera ; S d'ailleurs ne s'annulera que dans ce cas, en sorte que S sera une puissance q de T, et l'on aura

$$R' = R^{p^n} T^q.$$

Pour déterminer q, il suffit d'évaluer le degré de

$$\Pi f_0[\psi_0(\beta_{0j}, \beta_{1j}, \dots), \dots]$$

par rapport aux coefficients des ψ ; il est évidemment $np\mu$, donc $q = \mu$.

Il résulte de là qu'*en effectuant sur les variables une substitution linéaire, le premier membre de la résultante est multiplié par la puissance* μ *du déterminant de cette substitution.*

On peut rapprocher ce théorème, évident sur la forme que nous avons donnée de la résultante :

La résultante des équations

$$a_{00}\varphi_0 + a_{01}\varphi_1 + \dots + a_{0n}\varphi_n = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n0}\varphi_0 + a_{n1}\varphi_1 + \dots + a_{nn}\varphi_n = 0,$$

où les a_{ij} *sont indépendants des* x, *est le produit de la résultante des équations* $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, ... *par la puissance* μ *du déterminant* $\Sigma \pm a_{00} a_{11} \dots a_{nn}$, μ *désignant le produit des degrés de* $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$.

III. — THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS.

Considérons un système d'équations homogènes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *de même degré* m,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_m = 0.$$

L'équation

$$D = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0$$

admettra les mêmes solutions, ainsi que

$$\frac{\partial D}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial D}{\partial x_n} = 0.$$

En effet, on a, par le théorème des fonctions homogènes :

$$m f_1 = x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$m f_n = x_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

On en conclut (et cela même lorsque $f_1, f_2, \ldots$ ne seraient pas de même degré) que, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont nuls,

$$D = 0.$$

D'ailleurs, on aurait

$$\frac{1}{m} D x_i = f_1 \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} + f_2 \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_i}} + \ldots$$

et, en différentiant par rapport à x_j ou $j \gtrless i$,

$$\frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial x_j} x_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_i}} + \ldots$$
$$f_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} + \ldots;$$

or, la première ligne du second membre est nulle ; donc

$$\frac{1}{m}\frac{\partial D}{\partial x_j}x_i = f_1\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial D}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}+\ldots,$$

et, par suite, $\frac{\partial D}{\partial x_j}$ s'annule avec les f. C. Q. F. D.

Ce théorème a été parfois utilisé pour écrire la résultante de trois équations homogènes du second degré.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS.

I. — NOMBRE DES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR DÉTERMINER UN POLYNOME.

Considérons un polynome homogène de degré m à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soit $N(m, n)$ le nombre de ses termes. Les lettres x y entrent un nombre de fois égal à $mN(m, n)$, en comptant pour α fois le cas où un x entre dans un terme avec l'exposant α; chaque lettre entrant un même nombre de fois, il en résulte que x_1, par exemple, entre $\frac{m}{n}N(m, n)$ fois dans le polynome. D'un autre côté, les termes qui contiennent x_1, si l'on en retranche une fois x_1, seront les termes d'un polynome de degré $m-1$; ils sont donc en nombre $N(m-1, n)$ et ils contiennent x_1

$$\frac{m-1}{n}N(m-1, n)$$

fois; x_1 est donc contenu dans le polynome primitif $\frac{m-1}{n}N(m-1, n)$ fois plus $N(m-1, n)$ fois, qui représente le nombre de fois que l'on en a ôté x_1, donc

$$\frac{m}{n}N(m, n) = \frac{m-1}{n}N(m-1, n) + N(m-1, n);$$

d'où l'on tire

$$m\,\mathrm{N}(m, n) = (m + n - 1)\,\mathrm{N}(m - 1, n)$$

ou

$$\mathrm{N}(m, n) = \frac{m + n - 1}{m}\,\mathrm{N}(m - 1, n),$$

$$\mathrm{N}(m - 1, n) = \frac{m + n - 2}{m - 1}\,\mathrm{N}(m - 2, n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{N}(1, n) = \frac{n}{1},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{N}(m, n) = \frac{n(n + 1)(n + 2)\ldots(n + m - 1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Si l'on considère un polynome non homogène à n variables, il a le même nombre de termes qu'un polynome homogène de même degré, à $n + 1$ variables de même degré; *le nombre* $\mathrm{M}(m, n)$ *des termes d'un polynome du degré m à n variables, non homogène, sera donc* $\mathrm{N}(m, n + 1)$ ou

$$\mathrm{M}(m, n) = \frac{(n + 1)(n + 2)\ldots(n + m)}{1.2.3\ldots m}$$
$$= \frac{(m + 1)(m + 2)\ldots(m + n)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(m + n)!}{m!\,n!}.$$

Il résulte de là que l'on peut assujettir un polynome du degré m à n variables à prendre

$$\frac{(m + n)!}{m!\,n!}$$

valeurs données, pour un nombre égal de valeurs simultanées données aux variables, au moins en général. Toutefois, il convient d'examiner la question de plus près avant de conclure d'une façon absolue.

Nous commencerons par prouver que :

L'on peut toujours trouver un polynome f du degré m

à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nul pour

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}-1=\nu$$

systèmes de valeurs de ses variables. Ce polynome est, en général, bien déterminé à un facteur constant près.

Je suppose ce théorème démontré pour les polynomes à $n-1$ variables, et pour les polynomes de degré $m-1$ à n variables. Je vais le démontrer pour les polynomes de degré m à n variables. A cet effet, je décompose f en groupes de termes homogènes, et je pose

$$f=\varphi_m+\varphi_{m-1}+\ldots+\varphi_0,$$

φ_i désignant l'ensemble des termes de degré i. Soit φ_{ij} la valeur de φ_i pour $x_1=x_{1j}, x_2=x_{2j}, \ldots$. En exprimant que f est nul pour ν systèmes de valeurs des x, on aura ν équations de la forme

$$(a)\qquad \varphi_{mj}+\varphi_{m-1,j}+\ldots+\varphi_{0j}=0,$$

On pourra résoudre ces équations par rapport aux coefficients de $\varphi_{m-1}, \varphi_{m-2}, \ldots, \varphi_0$, en fonction linéaire des coefficients de φ_m, et cela en choisissant, par exemple, $\varphi_{0j}=1$; en effet, le déterminant des équations, considérées à ce point de vue, est le dénominateur commun des inconnues dans les équations que l'on aurait à résoudre, si l'on voulait exprimer qu'un polynome de degré $m-1$ est nul, pour autant de systèmes de valeurs des variables, qu'il y a de coefficients moins un dans ce polynome; ces équations ont des solutions bien déterminées en vertu de notre hypothèse.

Si l'on porte les valeurs des coefficients en question dans les équations (a) non employées, celles-ci prennent

la forme

$$\Sigma\, A(\omega_i + h) = k,$$

où A, h, k sont indépendants des valeurs $x_{1i}, x_{2i}, \ldots$ qui entrent dans les équations, dans lesquelles on a fait la substitution. ω_i, au contraire, sont des arguments homogènes par rapport à ces valeurs des $x_{1i}, x_{2i}, \ldots$; il reste alors à montrer que le déterminant des coefficients A des ω_i n'est pas nul. Or, ce déterminant est celui des inconnues qu'il faudrait considérer, si l'on voulait assujettir le polynome φ_m à s'annuler pour un nombre de valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, égal au nombre de ses coefficients moins un; par hypothèse, ce déterminant est différent de zéro. Donc la proposition que nous voulions établir est démontrée, grâce aux hypothèses que nous avons faites.

Or, le théorème est vrai pour un polynome quelconque du premier degré, donc il est vrai pour un polynome du second, etc.

Bien entendu, ce théorème sera soumis à de nombreuses exceptions et nous ne tarderons pas à en signaler.

Puisqu'il est possible de trouver un polynome de degré m nul pour $M(m, n) - 1$ systèmes des valeurs des variables et renfermant un facteur arbitraire, on pourra disposer de ce facteur de manière à lui faire acquérir une valeur donnée pour un nouveau système de valeurs des variables; et, par suite, il sera facile d'écrire un polynome de degré m prenant $M(m, n)$ valeurs données pour $M(m, n)$ systèmes de valeurs données des variables; ce polynome sera de la forme

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{\nu+1},$$

P_i désignant un polynome nul pour ν systèmes donnés des variables et égal à l'une des valeurs données pour le $\nu + 1$ système.

Il y aura, bien entendu, de nombreux cas particuliers dans lesquels ces conclusions seront en défaut.

II. — RELATIONS ENTRE LES SOLUTIONS.

Supposons que l'on se donne

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}-n$$

systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et que l'on astreigne un polynome de degré m à s'annuler pour ces systèmes de valeurs; il restera n coefficients arbitraires dans ce polynome qui sera de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \ldots + \lambda_n f_n,$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ désignant des polynomes entiers du degré m en général bien déterminés, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des constantes arbitraires. L'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \ldots + \lambda_n f_n = 0$$

admettra les m^n solutions de

$$(1) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0;$$

donc, *en se donnant*

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}-n$$

solutions d'un système d'équations du degré m à n inconnues, les m^n autres solutions sont bien déterminées et sont par conséquent fonctions de celles-ci.

Il y a donc entre les solutions

$$m^n + n - \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \text{ relations.}$$

Tout porte donc à penser qu'il y aura également des relations entre les solutions d'un système quelconque.

En écartant les cas particuliers, on peut dire que l'équation

$$(2) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0,$$

f_i désignant un polynome de degré m_i, est l'équation la plus générale admettant les solutions de (1)

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

si, m désignant le plus grand des nombres m_1, m_2, ..., m_n, λ_i est un polynome arbitraire de degré $m - i$, le degré de (2) étant assujetti à ne pas dépasser m.

L'équation (2) pourra remplacer l'une des équations (1) de degré m, car elle admet les $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions de (1), et le système (1) (2), abstraction faite d'une équation de degré m, n'admet que ces μ solutions.

Or, en se donnant

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!} - \sum \frac{(m_i + n_i)!}{m_i!\,n!} = \nu$$

solutions, on détermine, autant qu'il peut être déterminé, le premier membre de (2); donc, en se donnant ν solutions du système (1), les autres sont déterminées.

Il est bien difficile d'écrire les relations distinctes qui existent entre ces solutions, mais on peut théoriquement les obtenir en éliminant les coefficients entre les équations de la forme

$$f_i(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots) = 0.$$

III. — DES DIVERSES FORMES QUE PEUT REVÊTIR UNE FONCTION DES SOLUTIONS COMMUNES.

Soient

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0$$

des équations algébriques en x_1, x_2, ..., x_n des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$; soient $\mu = m_1, \ldots, m_n$ et α_{1i}, α_{2i}, ...,

α_{ni} les éléments d'une solution ; soit enfin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ μ polynomes choisis de telle sorte que le déterminant

$$\Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22}\ldots\omega_{\mu\mu}$$

soit différent de zéro, ω_{ji} désignant la valeur de ω_j pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ... Supposons enfin les solutions de (1) distinctes et normales.

Étant donné un polynome entier ψ prenant pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ... la valeur ψ_i, on pourra toujours déterminer des constantes $a_1, a_2, \ldots$ donnant lieu aux μ équations

$$\psi_1 = a_1\omega_{11} + a_2\omega_{21} \ldots + a_\mu\omega_{\mu 1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\psi_\mu = a_1\omega_{\mu 1} + a_2\omega_{\mu 2}\ldots + a_\mu\omega_{\mu\mu},$$

car le déterminant $\Sigma \pm \omega_{11}\ldots\omega_{\mu\mu}$, par hypothèse, n'est pas nul; il résulte de là que :

1° *Toute fonction entière ψ peut se mettre sous la forme*

$$\psi = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_\mu\omega_\mu,$$

les λ désignant des polynomes entiers et les a des constantes.

2° *Toute fonction entière des solutions de* (1) *est équivalente à une fonction linéaire à coefficients constants des ω.*

Si l'on pose (ce qui est possible)

$$(2)\quad \begin{cases} \psi\omega_1 = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2 \ldots + b_{1\mu}\omega_\mu, \\ \psi\omega_2 = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2 \ldots + b_{2\mu}\omega_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi\omega_\mu = b_{\mu 1}\omega_1 + b_{\mu 2}\omega_2 \ldots + b_\mu\omega_{\mu\mu}. \end{cases}$$

Le déterminant $\Sigma \pm b_{11}b_{22}\ldots b_{\mu\mu}$ sera le premier membre de la résultante des équations

$$\psi = 0, \quad f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0;$$

en effet, si dans (2), on remplace x_1, x_2, ... par les solutions de (1), on obtient μ^2 équations, en vertu desquelles on a

$$\psi_1\psi_2\ldots\psi_\mu \Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22}\ldots = \Sigma \pm \omega_{12}\omega_{22}\ldots \Sigma \pm b_{11}b_{22}\ldots b_{\mu\mu},$$

donc

$$\psi_1\psi_2\ldots\psi_\mu = \Sigma \pm b_{11}b_{22}\ldots b_{\mu\mu}.$$

Les polynomes 1, x_1, x_1^2, ..., $x_1^{\mu-1}$ étant pris pour ω_1, ω_2, ..., ω_μ, le déterminant $\Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22}\ldots$ n'est pas nul, puisqu'il se réduit au produit des différences des α_{1i}; on peut donc énoncer les théorèmes suivants :

Toute fonction entière de x_1, x_2, ..., x_n est, à des multiples des f près, égal à un polynome entier de degré $\mu - 1$ à une seule variable x_1 ou x_2, ...

Toute fonction entière d'une solution (1) *est équivalente à une fonction entière et de degré $\mu - 1$ d'une des quantités α_{i1}, α_{2i}, ...*

On peut prendre en général pour ω_1, ω_2, ..., ω_μ les termes du produit

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \ldots + x_1^{m_1-1})(1 + x_2 \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1 + x_n + x_n^2 + \ldots + x_n^{m_n-1}).$$

C'est en s'appuyant sur cette remarque, qu'il n'a pas pleinement justifiée, que Bézout a fait connaître la première méthode d'élimination. Dans le cas qui nous occupe, la mise sous la forme

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_\mu\omega_\mu$$

de la fonction ψ est la généralisation la plus naturelle de l'opération à laquelle on donne le nom de *division*. ψ est alors un dividende, f_1, f_2, ... jouent le rôle du diviseur, $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_\mu\omega_\mu$ joue le rôle du reste; il est en x_1

de degré inférieur à f_1, en x_2 de degré inférieur à f_2, ...

Malheureusement, la division ainsi généralisée n'est pas toujours possible, même quand les f ont leurs solutions distinctes.

Quoi qu'il en soit, le jour où l'on aura trouvé un moyen simple d'effectuer cette division généralisée, on aura par cela même découvert une méthode d'élimination simple, qui au fond sera celle de Bézout rendue pratique.

IV. — THÉORÈME D'ABEL.

Il existe entre les solutions des équations d'un système d'équations telles que (1) des relations différentielles, qui sont la généralisation d'un théorème d'Abel resté célèbre et qui a reçu un grand nombre de formes diverses. Nous allons faire connaître les relations en question.

Je suppose que l'on fasse varier simultanément tous les coefficients des fonctions f; une solution $x_1, x_2, \ldots, x_n$ quelconque variera, et alors, en différentiant les équations (1) dans cette hypothèse et en représentant par un δ une différentielle totale prise en faisant varier les coefficients $c, c', c'', \ldots$ des f, mais en laissant les x constants $\left(\text{en sorte que } \delta F = \frac{\partial F}{\partial c}\, dc + \frac{\partial F}{\partial c'}\, dc' + \ldots\right)$, on aura

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\, dx_n + \delta f_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx_n + \delta f_n = 0.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, \ldots$, on a

$$dx_i = \frac{1}{D}\left(\delta f_1 \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} + \delta f_2 \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_i}} + \ldots\right), \tag{3}$$

D désignant, comme toujours, le déterminant

$$D = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Supposons $\delta f_2 = \delta f_3 \ldots = \delta f_n = 0$, c'est-à-dire supposons que l'on fasse varier seulement les coefficients de f_1, les autres restant fixes ; on aura simplement

$$dx_i = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} \delta f_1,$$

Multiplions par $G(x_1, x_2, \ldots)$, en désignant ainsi un polynome de degré inférieur à $\Sigma m - n - m_1$, et divisons par $\frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}}$; nous aurons

$$\frac{G\, dx_i}{\left(\frac{\partial D}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}}\right)} = \frac{G\, \delta f_1}{D}.$$

Remplaçons $x_1, x_2, \ldots$ successivement par toutes les solutions $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots; \alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots; \alpha_{1\mu}, \alpha_{2\mu}, \ldots$ de (1) et ajoutons, nous aurons en vertu du théorème de Jacobi

$$(i) \qquad \sum \frac{G(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots)\, d\alpha_{ij}}{\left[\frac{\partial D(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots)}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{ij}}}\right]} = 0.$$

C'est là une relation, qui en contient un grand nombre d'autres, et qui est remarquable en ce sens qu'elle ne contient pas les différentielles des coefficients variables de f_1, ni ces coefficients eux-mêmes.

Supposons que les équations (1) se réduisent à deux

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0;$$

l'équation (4) prend la forme

$$\sum \frac{G(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})\, d\alpha_{ij}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial \alpha_{ij}}} = 0.$$

C'est surtout sous cette forme que l'on emploie le théorème d'Abel.

V. — NOTIONS SUR LES DISCRIMINANTS.

Le discriminant d'une fonction est le premier membre de l'équation qui exprime qu'elle s'annule pour un même système de variables que ses dérivées, ou, ce qui revient au même, le discriminant de la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0),$$

rendue homogène par l'introduction de la variable x_0, est le premier membre de la résultante des équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

qui ont pour conséquence $f = 0$, en vertu de l'équation

$$mf = x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

m désignant le degré de f. Nous poserons

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et la recherche du discriminant de f reviendra à la recherche de la résultante des équations

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0.$$

Nous supposerons dans la suite que

$$(1) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0$$

ont leurs solutions distinctes et normales.

Si $f_0 = 0$ a plus de

$$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!} - n - 1$$

solutions communes avec (1), elle admettra toutes les solutions de (1), et il existera une identité de la forme

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0,$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ désignent des constantes. Cette relation peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial(f, X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ désignant des fonctions linéaires, et cela d'une infinité de manières; donc f est une fonction homogène de n fonctions linéaires et homogènes; f n'est pas, en réalité, fonction de n variables quand on rompt l'homogénéité. Si l'on écarte ce cas, on voit que le discriminant ne peut pas s'annuler pour plus de

$$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!} - n - 1$$

systèmes des variables.

Le discriminant d'un produit de deux polynomes est nul.

En effet, soit φ et ψ deux polynomes entiers en x_1, $x_2, \ldots, x_n, x_0$ et

$$f = \varphi\psi,$$

on aura, en posant toujours $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \ldots,$

$$f_0 = \varphi_0\psi - \psi_0\varphi, \qquad \ldots. \qquad f_n = \varphi_n\psi - \psi_n\varphi;$$

ces équations sont satisfaites pour $\varphi = 0$, $\psi = 0$; elles ont donc une infinité de solutions communes et leur résultante est identiquement nulle.

Ce raisonnement est évidemment en défaut :

Quand f est une fonction d'une seule variable, ou une fonction homogène de deux variables.

Le discriminant de f est encore nul quand f est fonction entière de moins de n polynomes.

En effet, si

$$f = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \qquad (k < n)$$

on a

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i},$$

et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont nuls en même temps que $\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_k}$ qui, égalés à zéro, donnent un système d'équations qui a une infinité de solutions.

CHAPITRE V.

ÉQUIVALENCES ALGÉBRIQUES.

I. — ÉQUIVALENCES ALGÉBRIQUES.

Nous dirons que deux polynomes A, B entiers en x_1, x_2, ..., x_n sont équivalents par rapport à f_1, f_2, ..., f_n, quand on aura, en adoptant les notations du Chapitre I,

$$A = B + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n,$$

λ_1, λ_2, ..., λ_n désignant des polynomes entiers, et nous exprimerons cette équivalence au moyen de la notation

$$A \equiv B.$$

D'après cela

$$A \equiv 0$$

voudra dire que A s'annule avec les f, et l'on voit que l'on aura

$$(1) \qquad \xi_i \xi_j \equiv 0 \quad \text{si } i \gtrless j, \qquad \xi_i^2 \equiv \xi_i.$$

Maintenant, soient y un polynome entier en x_1, x_2, ..., x_n; y_i la valeur qu'il prend pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ... On aura ([1])

$$1 \equiv \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu,$$
$$y \equiv y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + \ldots + y_\mu \xi_\mu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y^{\mu-1} \equiv y_1^{\mu-1} \xi_1 + \ldots + y_\mu^{\mu-1} \xi_\mu,$$

([1]) Il est clair que l'on peut remplacer le signe $=$ par $\equiv$, mais non $\equiv$ par $=$.

et, en supposant

$$\Sigma \pm y_1^0 y_2^1 \dots y_\mu^{\mu-1} \lessgtr 0,$$

on aura évidemment

$$\xi_1 = a_{10} + a_{11} y + \dots + a_{1\mu-1} y^{\mu-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\xi_\mu = a_{\mu 0} + a_{\mu 1} y + \dots + a_{\mu\mu-1} y^{\mu-1},$$

a_{ij} désignant une quantité indépendante des x. Quant à y, il pourra être égal, si l'on veut, à l'une des variables x.

Il résulte de là que tout polynome G pourra se mettre sous la forme

$$G = b_0 + b_1 y + \dots + b_{\mu-1} y^{\mu-1},$$

puisqu'il peut se mettre sous la forme

$$G = G_1 \xi_1 + \dots + G_\mu \xi_\mu,$$

les G_i et les b_i étant indépendants des x.

II. — RACINES DES ÉQUIVALENCES.

Considérons l'équivalence suivante, où F(X) est entier en X, x_1, x_2, ...

$$F(X) = 0,$$

et dans laquelle il s'agit de déterminer X en fonction de x_1, x_2, ..., x_n. Les valeurs de X satisfaisant à cette équivalence sont ce que l'on peut appeler ses *racines*. Un premier système de racines coïncidera évidemment avec les racines de l'équation

$$F(X) = 0;$$

mais il y en a d'autres, soit en effet

$$F(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_p X^p.$$

Si l'on pose

$$X = X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 + \dots + X_\mu \xi_\mu,$$
$$X^2 = X_1^2 \xi_1 + X_2^2 \xi_2 + \dots + X_\mu^2 \xi_\mu,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

notre équivalence prendra la forme

$$\xi_1(a_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_p X_1^p) +$$
$$\xi_2(a_0 + a_1 X_2 + \ldots + a_p X_2^p) + \ldots \equiv 0.$$

Je suppose que les coefficients a_1, a_2, ..., s'ils contiennent les x, aient été préalablement mis sous forme linéaire en ξ_1, ξ_2, ..., en négligeant les multiples des f; alors, dans la formule précédente, si l'on a

$$a_0 = \beta_{11}\xi_1 + \beta_{02}\xi_2 + \ldots,$$
$$a_1 = \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il s'opérera des réductions, et l'on aura (en vertu de $\xi_i\xi_j \equiv 0$, $\xi_i^2 = \xi_i$)

$$\xi_1(\beta_{01} + \beta_{11}X_1 + \ldots + \beta_{p1}X_1^p)$$
$$+ \xi_2(\beta_{02} + \beta_{12}X_1 + \ldots + \beta_{p2}X_2^p) + \ldots \equiv 0,$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$\beta_{01} + \beta_{11}X_1 + \ldots + \beta_{p1}X_1^p = 0,$$
$$\beta_{02} + \beta_{12}X_2 + \ldots + \beta_{p2}X_2^p = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces équations déterminent X_1, X_2, ..., X_μ, et par suite

$$X \equiv X_1\xi_1 + X_2\xi_2 + \ldots + X_\mu\xi_\mu;$$

chacune d'elles étant de degré p, il y aura μp solutions en négligeant les multiples des f; mais ce nombre μp est évidemment un maximum.

On voit qu'il y aura une infinité de solutions si l'on a

$$\beta_{0i} = 0, \qquad \beta_{1i} = 0, \qquad \ldots \qquad \beta_{\mu i} = 0.$$

Mais, pour que F(X) soit identiquement équivalent à o, c'est-à-dire quel que soit X, il faut que tous les β_{ij} soient nuls, ou que tous les a_i soient équivalents à zéro.

Désignons par Z_1 l'une des solutions de l'équivalence

$F(X) = 0$. On devra avoir

$$X_1 = \varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \ldots + \varepsilon_\mu \xi_\mu,$$

ε_i désignant une solution de

$$\beta_{0i} + \beta_{1i} X_i + \ldots + \beta_{pi} X_i^p = 0;$$

on aura donc

$$\beta_{0i} + \beta_{1i} X_i + \ldots + \beta_{pi} X_i^p = (X_i - \varepsilon_i) A_i(X_i),$$

A_i désignant un polynome entier en X_i de degré $p - 1$. Il en résulte que $F(X)$ peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned} F(X) &= \Sigma (X_i - \varepsilon_i) A_i(X_i) \xi_i \\ &= \Sigma (X_i - \varepsilon_i) \xi_i \Sigma A_i(X_i) \xi_i \\ &= (X - Z_1) \Sigma A_i(X_i) \xi_i. \end{aligned}$$

On peut dire alors que $F(X)$ est divisible par $X - Z_1$, par rapport aux diviseurs $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et que le quotient de $F(X)$ par $(X - Z_1)$ est $\Sigma A_i(X_i) \xi_i$.

Il est remarquable que la division par $X - Z_1$ a fait disparaître μ solutions, car $\Sigma A_i(X_i) \xi_i$ n'est plus que de degré $p - 1$; et l'on voit que $F(X)$ sera décomposable de bien des manières en un produit de p facteurs linéaires.

III. — EXTENSION DE LA NOTION DE FONCTION.

Désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ des variables indépendantes des x et par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ des fonctions des z. On pourra considérer une expression de la forme

$$U = Z_1 \xi_1 + Z_2 \xi_2 + \ldots + Z_\mu \xi_\mu$$

comme une fonction de

$$u = z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + \ldots + z_\mu \xi_\mu,$$

pourvu que

$$dU = k\,du,$$

k désignant une quantité bien déterminée à des multiples

des f près. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le rapport de

$$dU \equiv \left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial z_2}dz_2 + \ldots\right)\xi_1 + \left(\frac{\partial Z_2}{\partial z_1}dz_1 + \ldots\right)\xi_2 + \ldots$$

à

$$du \equiv dz_1\xi_1 + dz_2\xi_2 + \ldots$$

soit bien déterminé. Or, ce rapport est

$$\frac{dU}{du} = \frac{1}{dz_1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial z_2}dz_2 + \ldots\right)\xi_1 + \ldots;$$

il dépend en général des rapports $dz_1 : dz_2 : dz_3 : \ldots$ et, pour qu'il n'en dépende pas, il faut que

$$\frac{\partial Z_i}{\partial z_j} = 0 \quad \text{si} \quad i \gtrless j.$$

En général, Z_i devra donc être uniquement fonction de z_i.

Pour montrer l'utilité des considérations qui précèdent, je ferai une application; je supposerai que les fonctions f se réduisent à une seule, $f = x^\mu - 1$, alors

$$\xi_i = \frac{x^\mu - 1}{x - \alpha^i}\,\frac{1}{\mu\alpha^{(\mu-1)i}},$$

α désignant $\cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\mu}$, racine de $x^\mu - 1 = 0$. Alors

$$\begin{aligned} x &\equiv \alpha\xi_1 + \alpha^2\xi_2 + \ldots + \alpha^\mu\xi_\mu, \\ x^2 &\equiv \alpha^2\xi_1 + \alpha^4\xi_2 + \ldots + \alpha^{2\mu}\xi_\mu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^\mu &\equiv 1 \equiv \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu. \end{aligned}$$

Si l'on regarde

$$V \equiv Y_0 + Y_1 x + \ldots + Y_{\mu-1}x^{\mu-1}$$

comme fonction de

$$v \equiv y_0 + y_1 x + \ldots + y_{\mu-1}x^{\mu-1},$$

Y_0, Y_1, ... étant fonctions de $y_0, y_1, \ldots$, il faudra que $\frac{dV}{dv}$ soit bien déterminé. Ce rapport est égal au quotient de

$$\left(\frac{\partial Y_0}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial y_1} dy_1 + \ldots\right) + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial y_0} dy_0 + \ldots\right) x + \ldots$$

par

$$dy_0 + x\,dy_1 + x^2 dy_2 + \ldots$$

et, pour qu'il ne dépende pas de $dy_0 : dy_1 : dy_2 : \ldots$, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial Y_0}{\partial y_0} + x\frac{\partial Y_1}{\partial y_0} + x^2\frac{\partial Y_2}{\partial y_0} + \ldots = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial Y_0}{\partial y_0} + x\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \ldots\right) = \ldots,$$

ou bien

$$\frac{\partial Y_0}{\partial y_0} + x\frac{\partial Y_1}{\partial y_0} + \ldots = x^{\mu-1}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial v_0} + x\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \ldots\right) = \ldots,$$

ce qui exige que l'on ait

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial Y_0}{\partial y_0} = \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial Y_2}{\partial y_2} = \ldots, \\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_0} = \dfrac{\partial Y_2}{\partial y_1} = \dfrac{\partial Y_3}{\partial y_2} = \ldots, \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial y_0} = \dfrac{\partial Y_3}{\partial y_1} = \dfrac{\partial Y_4}{\partial y_2} = \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, si dans V et v, on remplace x, x^2, ... par leurs valeurs en ξ_1, ξ_2, ..., on a

$$\begin{aligned} V = {} & \xi_1(Y_0 + \alpha Y_1 + \alpha^2 Y_2 + \ldots) \\ & + \xi_2(Y_0 + \alpha^2 Y_1 + \alpha^4 Y_2 + \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v = {} & \xi_1(y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \ldots) \\ & + \xi_2(y_0 + \alpha^2 y_1 + \alpha^4 y_2 + \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et, pour que V soit fonction de v, il faut que

$$\begin{aligned} Y_0 + \alpha Y_1 + \alpha^2 Y_2 + \ldots &= \Psi_1(y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \ldots), \\ Y_0 + \alpha^2 Y_1 + \ldots &= \Psi_2(y_0 + \alpha^2 y_1 + \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On tire de là les valeurs des Y qui sont alors les solutions des équations (A).

Cet exemple montre le parti que l'on peut tirer de la théorie des équivalences algébriques. Cette théorie a été développée à un tout autre point de vue par MM. Weierstrass et Dedekind, mais d'une façon moins simple, à notre avis, en considérant les fonctions interpolaires comme des quantités imaginaires dont la véritable nature se trouve ainsi masquée et qui les rend moins propres aux applications.

IV. — EXPRESSION DE LA RÉSULTANTE SOUS FORME DE PRODUIT.

Soit G une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entière, et G_i sa valeur pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ... On aura

$$G \equiv G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2 + \ldots + G_\mu \xi_\mu;$$

si l'on permute dans le second membre de cette formule les quantités $G_1, G_2, \ldots$ circulairement, on obtient de nouvelles fonctions

$$\begin{aligned} G^1 &\equiv G_2 \xi_1 + G_3 \xi_2 + \ldots + G_1 \xi_\mu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G^{\mu-1} &\equiv G_\mu \xi_1 + G_1 \xi_2 + \ldots + G_{\mu-1} \xi_\mu, \end{aligned}$$

et il est clair que l'on a

$$G\, G'\, G'' \ldots G^{\mu-1} \equiv G_1\, G_2 \ldots G_\mu (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu),$$

ou

$$GG' \ldots G^{\mu-1} \equiv G_1\, G_2 \ldots G_\mu.$$

Si, au lieu de permuter circulairement les G_i, on les

permutait de toutes les manières possibles, le produit des G, G′, G″, ... serait une puissance du résultant.

Si l'on convient d'appeler *conjuguées* les expressions que l'on obtient en permutant les coefficients a_1, a_2, ... dans une expression de la forme

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_\mu\xi_\mu,$$

il est facile de voir que l'équivalence

$$F(X) \equiv 0$$

à coefficients indépendants des x, admettant une solution de la forme $a_1\xi_1 + \ldots + a_\mu\xi_\mu$, admet toutes ses conjuguées; et alors il est naturel d'appeler module d'une fonction G, par rapport aux diviseurs f_1, f_2, ..., le produit $G_1\,G_2\,\ldots\,G_\mu$.

Le produit de toutes les conjuguées de G est une puissance de son module (à des multiples des f près).

FIN DE LA QUATRIÈME PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.
PRÉFACE V

QUATRIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER. — LE THÉORÈME DE JACOBI 1

I. — Préliminaires 1
II. — Théorème de Jacobi 3
III. — Étude des fonctions interpolaires 6
IV. — Sur la fonction A 11

CHAPITRE II. — LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET L'ÉLIMINATION 13

I. — Définition des fonctions symétriques 13
II. — Deuxième exemple 14
III. — Formation de la résultante 15
IV. — Nouvelle méthode pour former la résultante 16
V. — Les polynomes multiplicateurs 19
VI. — Conclusion 21
VII. — Calcul des fonctions symétriques 22
VIII. — Résolution d'un système d'équations 24

CHAPITRE III. — ÉQUATIONS HOMOGÈNES 27

I. — Préliminaires 27
II. — Changement de variables 28
III. — Théorème sur les déterminants 31

CHAPITRE IV. — PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS 33

I. — Nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polynome 33

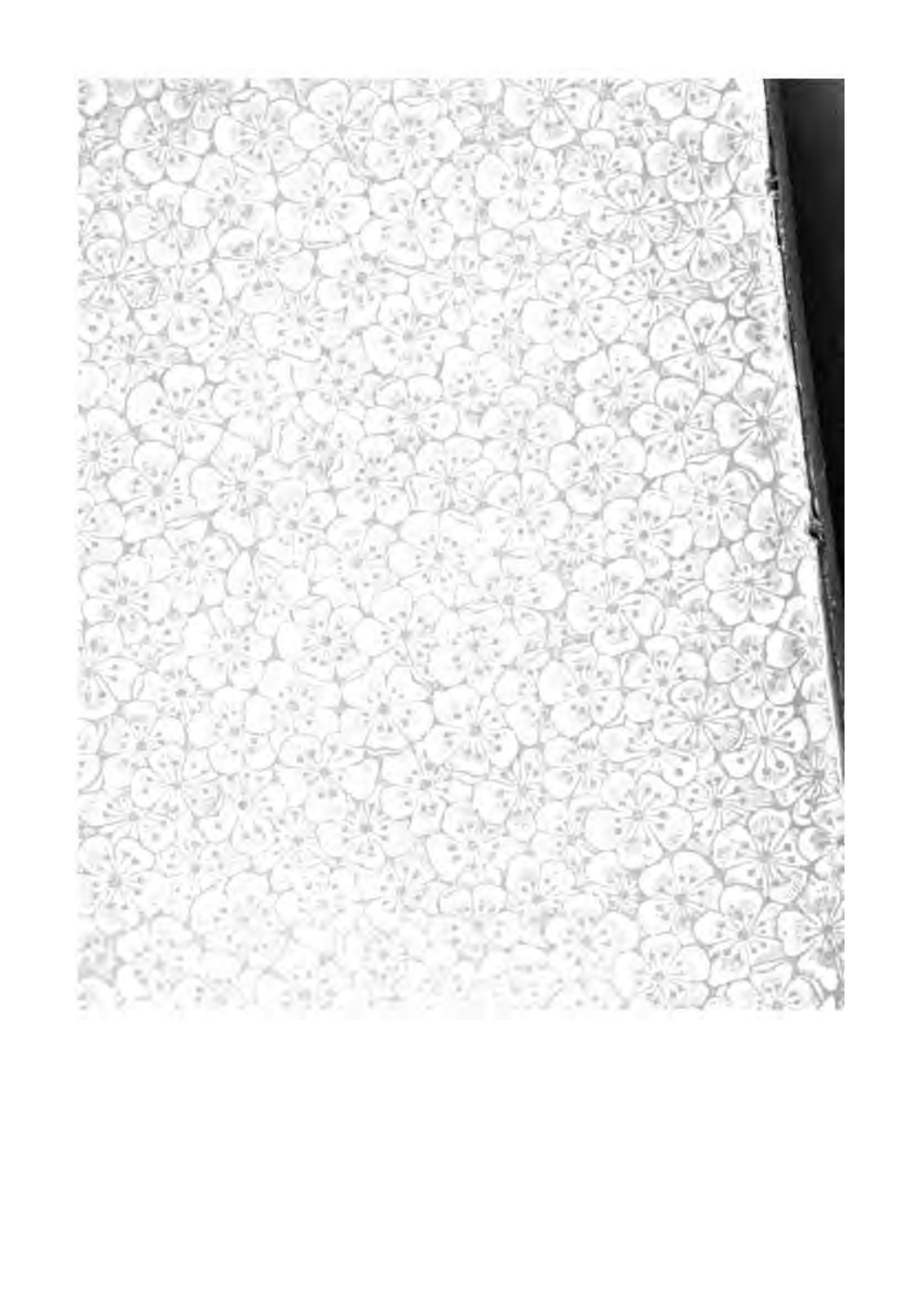
Pages.
II. — Relations entre les solutions 37
III. — Des diverses formes que peut revêtir une fonction des solutions communes 38
IV. — Théorème d'Abel 41
V. — Notions sur les discriminants 44

CHAPITRE V. — ÉQUIVALENCES ALGÉBRIQUES 46

I. — Équivalences algébriques 46
II. — Racines des équivalences 47
III. — Extension de la notion de fonction 49
IV. — Expression de la résultante sous forme de produit.. 52

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA QUATRIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

20977 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.





DATE DUE

